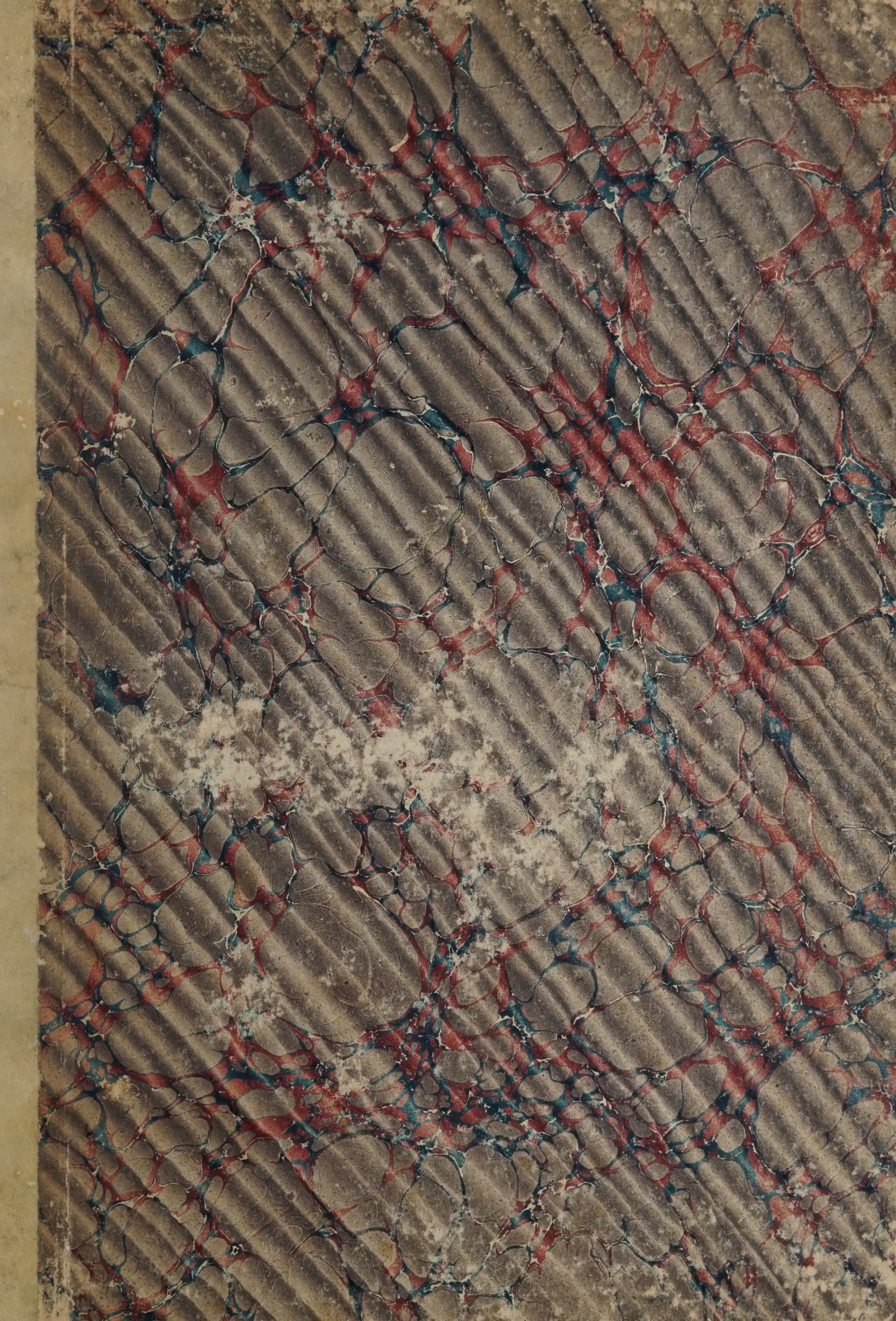


ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

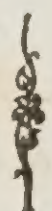
ANNALI
DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

PUBBLICATI DA

BARNABA TORTOLINI
Professore di Calcolo Sublime all' Università di Roma

E Compilati da

E. BETTI a *Pisa*
F. BRIOSCHI a *Pavia*



A. GENOCCHI a *Torino*
B. TORTOLINI a *Roma*

(In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche)

TOMO V.

ROMA
PRESSO FRANCESCO BLEGGI LIBRAJO
(Via del Piè di Marmo N°. 38.)

1863.

TIPOGRAFIA DELLA S. C. DE PROPAGANDA FIDE.

ANNALI

DI MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

PROPRIETA' D'UNA MANIERA DI POLIGONI DERIVATI

NOTA

DI R. RUBINI.



Sin dal 1854 il chiar: prof: Padula nel vol. V degli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* (pag. 286) enunziò alquanti teoremi intorno a una maniera di poligoni *derivati* da un poligono dato: noi, per semplice esercizio, cercammo dimostrarli, senza pretendere di pubblicare le nostre dimostrazioni. Riandando ora sul medesimo argomento, ci siamo avveduti dell'analogia di quei teoremi con altri che si riferiscono a poligoni altrimenti derivati; e, variando la forma di derivazione, siamo giunti ad altre proprietà. Ciò ha dato luogo alla presente nota.

§. I.

Abbiansi in un piano un poligono P una retta R e un punto A: sia M_k un vertice qualunque del poligono, da esso si conduca una parallela ad R, e su quella parallela si tagli una porzione M_kN_k proporzionale alla distanza AM_k tra il punto A e il vertice M_k. Prendendo le distanze M_kN_k sempre da un medesimo lato, i punti N_k saranno i vertici d'un nuovo poligono P, che diremo *derivato* dal poligono P, il quale chiameremo *derivante*; mentre diremo *direttrice* la retta R, e *centro di derivazione* il punto A.

Posto ciò, rispetto a un qualunque sistema di assi ortogonali dinotiamo con

x_k, y_k le coordinate del vertice M_k;

t_k, u_k le coordinate del vertice N_k corrispondente di M_k;

α, β le coordinate del centro A;

poniamo $OM_k = d_k$; $OA = \delta$, essendo O l'origine delle coordinate.

Sia inoltre

$$(1) \qquad y = \lambda x + \mu$$

l'equazione della direttrice : quella della retta che passa pe'vertici corrispondenti M_k, N_k sarà

$$(2) \qquad y = \lambda x + \mu_k ;$$

e sarà inoltre

$$(3) \quad M_kN_k = (x_k - t_k)\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{x_k - t_k}{\cos\varphi} = (y_k - u_k)\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \frac{y_k - u_k}{\operatorname{sen}\varphi},$$

essendo $\operatorname{tang}\varphi = \lambda$.

Similmente

$$(4) \qquad \overline{AM}^2 = (x_k - \alpha)^2 + (y_k - \beta)^2 = d_k^2 + \delta^2 - 2\,\alpha x_k - 2\beta y_k ;$$

e dinotando con r una costante, che, per l'omogeneità, supporremo essere una retta avremo per la soprascritta legge di derivazione

$$(5) \qquad rM_kN_k = \overline{AM}_k^2 .$$

Per brevità di linguaggio chiameremo *ragione di derivazione* la costante r.

Ora in virtù di queste equazioni (3), (4) e (5), deduciamo :

$$(6) \quad \begin{cases} t_k = x_k - \dfrac{1}{a}(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k) , \\ u_k = y_k - \dfrac{1}{b}(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k), \end{cases}$$

avendo messo per semplicità

$$(7) \qquad r\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{r}{\cos\varphi} = a ; \qquad r\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi} = b;$$

e però l'equazione (1) della direttrice può essere scritta ancora così :

$$(8) \qquad y = \frac{a}{b}x + \mu .$$

Finalmente dinotando con S la superficie del poligono derivante P, e con S' quello del poligono derivato P', avremo :

$$(9) \qquad S = \pm\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(y_{k+1} - y_{k-1})\,x_k = \mp\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(x_{k+1} - x_{k-1})y_k ;$$

$$(10) \qquad S' = \pm\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(u_{k+1} - u_{k-1})t_k ;$$

avvertendo che n rappresenta il numero dei lati del poligono, e che pel valore $k=1$ l'indice corrispondente zero devesi mutare in n; e per $k=n$ il corrispondente indice $n+1$ devesi mutare in 1.

§. II.

Ponendo in (10) in luogo delle u e t i corrispondenti valori tratti dalla (6), e tenendo presenti la (9) e le seguenti formole :

$$\sum_{k=1}^{k=n} (y_{k+1} - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{k=n} (x_{k+1} - x_{k-1}) = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (y_{k+1} - y_{k-1})\, y_k = \sum_{k=1}^{k=n} (x_{k+1} - x_{k-1}) x_k = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (d^2_{k+n} - d^2_{k-1}) x_k = - \sum_{k-1}^{k=n} (x_{k+1} - x_{k-1}) d^2_k$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (d^2_{k+1} - d^2_{k-1}) y_k = - \sum_{k=1}^{k=n} (y_{k+1} - y_{k-1}) d^2_k\;;$$

si troverà :

$$\text{(11)} \qquad S' = S + \frac{2S}{b}\left[\beta \mp \frac{n}{4S} + \frac{b}{a}\left(\alpha - \frac{m}{4S}\right)\right],$$

in cui per sola semplicità è messo

$$\text{(12)} \qquad \mp \sum_{k=1}^{k=n} (d^2_{k+2} - d^2_{k-1})\, y_k = m;\; \sum_{k=1}^{k=n} (d^2_{k+1} - d^2_{k-1}) x_k = n.$$

§. III.

Per un dato poligono e un dato sistema di assi, le quantità S, m, n son date: ora se nella formola (11), oltre alla S, si suppone rimaner costanti anche a e b, e quindi la ragione r e la direzione φ della direttrice, allora la differenza $S'-S$ rimarrà costante per tutti quei centri di derivazione, che soddisfanno all'equazione

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = \text{cost.}$$

ma questa è una retta normale alla direttrice, quindi abbiamo il seguente

Teorema I. — *Per uno stesso poligono derivante, una stessa ragione di derivazione, e una medesima direttrice, la differenza tra la superficie del poligono derivato e quella del derivante rimane costante, mentre il centro di derivazione descrive una retta normale alla direttrice.*

Sieno A (α', β') e A$''(\alpha'', \beta'')$ due diversi centri di derivazione, S', S'' le superficie

de'corrispondenti poligoni derivati da un medesimo poligono di superficie S, con una medesima direttrice e una stessa ragione di derivazione; secondo la formola (11), avremo:

$$S' = \frac{2S}{b}\left[\beta' - \frac{n}{4S} + \frac{b}{a}\left(\alpha' - \frac{m}{4S}\right)\right],$$

$$S'' = \frac{2S}{b}\left[\beta'' - \frac{n}{4S} + \frac{b}{a}\left(\alpha'' - \frac{m}{4S}\right)\right],$$

e quindi, sottrando e tenendo presenti le (7), si trae:

$$(13) \qquad S' - S'' = 2S\left(\frac{\alpha' - \alpha''}{a} + \frac{\beta' - \beta''}{b}\right) = \frac{(\alpha' - \alpha'')\cos\varphi + (\beta' - \beta'')\operatorname{sen}\varphi}{\frac{1}{2}r} \cdot S;$$

ma il numeratore di quest' ultima frazione è la proiezione ortogonale di $A'A''$ sulla direttrice, quindi si ha il seguente

Corollario. — *Qualunque sia la direttrice, la differenza delle superficie di due poligoni, derivati da un medesimo poligono con due diversi centri e con una medesima ragione, sta alla superficie del poligono derivante, come la proiezione della distanza de'centri di derivazione sulla direttrice sta alla metà della ragione di derivazione.*

§. IV.

La stessa formola (11) ci mostra che sarà $S' = S$, indipendentemente da a e b, purchè α e β soddisfacciano l'equazione

$$(14) \qquad \beta - \frac{n}{4S} = -\frac{b}{a}\left(\alpha - \frac{m}{4S}\right);$$

la quale essendo $\frac{b}{a}$ un coefficiente arbitrario rappresenta un punto di coordinate

$$(15) \qquad \alpha_0 = \frac{m}{4S}, \qquad \beta_0 = \frac{n}{4S};$$

quindi ne consegue il seguente

Teorema II. — *Qualunque sieno il poligono derivante, la direttrice e la ragione di derivazione, vi è sempre un centro di derivazione* A_0, *rispetto al quale il poligono derivato è equivalente al derivante.*

Questo centro lo diremo di derivazione *per equivalenza.*

Applicando le formole (15) al caso d'un triangolo, prendendo per asse del x un lato qualunque del triangolo, e per origine il punto di mezzo di questo lato si trova, secondo la formola (12), $m = 0$, e quindi $\alpha_0 = 0$; laonde

Corollario I. — *In ogni triangolo il centro di derivazione per equivalenza è lo stesso centro del circolo circoscritto.*

Se il poligono derivante è iscrittibile in un circolo, prendendo il centro per origine delle coordinate, le d_k risultano tutte uguali al raggio, e quindi, secondo le formole (12) $m = 0$, $n = 0$, e per conseguenza ancora $\alpha_0 = \beta_0 = 0$; dunque

Corollario II. — *Se il poligono derivante è iscrittibile in un circolo, il centro di derivazione per equivalenza è lo stesso centro del circolo circoscritto.*

Introducendo nella (11) le α_0, β_0, e rimettendo per a e b i loro valori (7), s'ottiene

$$(16) \qquad S' - S = \frac{(\alpha - \alpha_0)\cos\varphi + (\beta - \beta_0)\operatorname{sen}\varphi}{\frac{1}{2}r} \cdot S,$$

quindi

Corollario III. — *La differenza tra l'area del poligono derivato e quella del derivante sta a questa seconda, come la proiezione della distanza fra il corrispondente centro di derivazione e quello di derivazione per equivalenza sulla direttrice, sta alla metà della ragione di derivazione.*

La (16) dà $S' = S$, se

$$(17) \qquad (\alpha - \alpha_0)\cos\varphi + (\beta - \beta_0)\operatorname{sen}\varphi = 0,$$

Inoltre, essendo

$$\frac{d(S' - S)}{d\varphi} = -(\alpha - \alpha_0)\operatorname{sen}\varphi + (\beta - \beta_0)\cos\varphi,$$

sarà $\frac{d(S' - S)}{d\varphi} = 0$, se

$$(18) \qquad (\alpha - \alpha_0)\operatorname{sen}\varphi - (\beta - \beta_0)\cos\varphi = 0,$$

e però da coteste formole (17) e (18) ne deduciamo il seguente

Corollario IV. — *Rispetto a un centro di derivazione A, il poligono derivato risulterà equivalente al derivante, se la direttrice è perpendicolare alla congiungente questo centro con quello di derivazione per equivalenza; e la differenza tra le aree de' detti poligoni sarà massima, se la direttrice è parallela alla medesima congiungente.*

Rimanendo gli stessi tutti gli altri elementi, sia φ' un nuovo angolo tale che $\varphi' = 90° + \varphi$, e sia S'' la superficie del corrispondente poligono derivato; avremo, secondo la formola (16)

$$(19) \qquad S'' - S = \frac{-(\alpha - \alpha_0)\operatorname{sen}\varphi + (\beta - \beta_0)\cos\varphi}{\frac{1}{2}r} \cdot S,$$

e quindi, quadrando la (16) e quest'equazione, e addizionando i risultamenti, otterremo:

$$(20) \qquad (S' - S)^2 + (S'' - S)^2 = \left[(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2\right] \frac{4S^2}{r^2} = \text{cost.};$$

laonde

Corollario V. — *Derivando da un medesimo poligono, di superficie* S, *con un medesimo centro e una stessa ragione di derivazione, ma con due direttrici differenti, due poligoni di superficie* S′, S″, *la somma de' quadrati* $(S'-S)^2$, $(S''-S)^2$ *sarà costante, qualunque sieno le due direttrici.*

§. V.

Consideriamo ora tre poligoni derivanti, le cui rispettive superficie sieno S, S′, S″; secondo le formole (15), avremo:

$$(21)\qquad \alpha_0=\frac{m}{4S},\ \beta_0=\frac{n}{4S};\ \alpha'_0=\frac{m'}{4S'},\ \beta'_0=\frac{n'}{4S'};\ \alpha''_0=\frac{m''}{4S''},\ \beta''_0=\frac{n''}{4S''},$$

essendo le α'_0, β'_0; α''_0, β''_0; m', n'; m'', n'' quantità analoghe alle α_0, β_0; m, n; e sarà il determinante

$$\sum(\pm mn'S'') = 16\ SS'S''.\sum(\pm 1\ \alpha'_0\beta''_0).$$

Ma supponendo

$$(22)\qquad m=m'+m'',\ n=n'+n'',\ S=S'+S'',$$

si ha $\sum(\pm mn'S'')=0$, quindi anche $\sum(\pm 1\alpha'_0\ \beta''_0)=0$. Or questa è la condizione perchè i tre punti (α_0, β_0), (α'_0, β'_0); (α''_0, β''_0) sieno in linea retta, quindi abbiamo il teorema qui appresso:

Teorema III. — *Dividendo, mercè una diagonale, un dato poligono* P *in due altri poligoni* P′, P″, *i tre corrispondenti centri di derivazione per equivalenza stanno per dritto.*

Da cotesto teorema combinato col corollario I. del. § prec. risulta il seguente

Corollario I. — *Il centro di derivazione per equivalenza d' un quadrigono è l'intersezione delle due perpendicolari innalzate sulle due diagonali dai loro punti di mezzo.*

Corollario II. — In generale un poligono di un numero impari di lati si può scomporre sempre per mezzo d'una diagonale in un triangolo e in un'altro poligono di $n-1$ lati; e siccome si possono per un medesimo vertice condurre due diagonali che operino una simile scomposizione, e lo stesso può farsi a qualunque altro vertice; così s'hanno in tutto $2n$ di tali scomposizioni; però, siccome, una medesima diagonale passa per due vertici, così il detto numero dev'esser ridotto a metà, e però il totale numero di scomposizioni veramente distinte è soltanto n. Quando poi il poligono è d'un numero pari n di lati, si può sempre scomporre per mezzo d'una diagonale che passa per due vertici opposti in due altri poligoni dello stesso numero $\frac{n}{2}+1$ lati, sì che si hanno in questo caso n scomposizioni di questa natura; ma osservando an–

che qui che i due vertici posti agli estremi d'una medesima diagonale danno la stessa soluzione, così le scomposizioni veramente distinte saranno nel caso attuale soltanto $\frac{n}{2}$.

Posto ciò, nel caso d'un poligono d'un numero impari di lati, il centro di derivazione per equivalenza è l'intersezione di n rette, che sono le congiungenti degli analoghi centri delle due porzioni, in cui può essere scomposto nel modo sopraindicato; e quando il poligono è d'un numero pari di lati le rette che passano pel detto centro sono solamente $\frac{n}{2}$.

Secondo le formole (21) e (22) si ha

$$\alpha'_0 S' + \alpha''_0 S'' = \alpha_0 S;$$

quindi supponendo per un momento che la retta che passa pe'tre centri A_0, A'_0, A''_0 sia l'asse della x, e l'origine sia il centro A_0 del dato poligono, sarà $\alpha_0 = 0$, e l'equazione ultima dà

$$\alpha'_0 S' + \alpha''_0 S'' = 0; \quad S' : S'' :: \alpha''_0 : -\alpha'_0,$$

e però indipendentemente dal segno si conchiude il seguente

Corollario III. — *Le due porzioni, in che rimane diviso un dato poligono per mezzo d'una diagonale, stanno tra loro nella ragione inversa delle distanze de' rispettivi centri di derivazione per equivalenza dall'analogo centro del poligono dato.*

§. VI.

Congiugnendo l'origine O co'due vertici consecutivi M_k, M_{k+1}, le coordinate $p_{k,k+1}$, $q_{k,k+1}$, del centro del circolo circoscritto al triangolo OM_kM_{k+1} saranno date dalle formole seguenti:

$$(23) \qquad p_{k,k+1} = \frac{1}{2}\,\frac{d_k^2\, y_{k+1} - y_k d_{k+1}^2}{x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}}, \qquad q_{k,k+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{d_k^2\, x_{k+k} - x_k d_{k+1}^2}{x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}}.$$

Ora le formole (15), tenendo presenti i significati di m ed n espressi nelle (12), e quello di S dato dalla (9), possono essere scritte eziandio al modo qui appresso:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{k=1}^{k=n}(d_k^2\, y_{k+1} - y_k\, d_{k+1}^2)}{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k y_{k+1} - y_k\, x_{k+1})}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\sum_{k=1}^{k=n}(d_k^2\, x_{k+1} - x_k\, d_{k+1}^2)}{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k\, y_{k+1} - x_k\, y_{k+1})};$$

e però sostituendo i precedenti valori (23), in queste ultime formole, e ponendo

$$(24) \qquad x_k\, y_{k+1} - y_k\, x_{k+1} = m\, Q_{k,k+1},$$

essendo m una costante, otterremo

$$(25) \qquad \alpha_0 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1}\, p_{k,k+1}}{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1}}, \qquad \beta_0 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1}\, q_{k,k+1}}{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1}};$$

e da coteste formole si trae il teorema qui appresso:

Teorema IV. — *Se nel piano d'un poligono si prenda dovunque un punto* O, *e si congiunga coi sussecutivi vertici* M_1, M_2 ... M_n *del dato poligono; se inoltre a ciascun triangolo* OM_1M_2, *ec. si circoscriva il corrispondente circolo, e ai centri si applichino pesi* (in generale forze parallele) *proporzionali alle aree de' rispettivi triangoli iscritti; il centro di derivazione per equivalenza del dato poligono sarà il centro di gravità di quel sistema di pesi.*

§. VII.

Lo stesso procedimento analitico fin qui adoperato può ben servire a dimostrare gl'indicati teoremi del prof. Padula; alcuni dei quali si scostano alquanto dai precedenti per virtù della differenza nella derivazione. Ne confronteremo brevemente taluni, e vedrem pure a quali altre conseguenze si giunga; ma prima di ogn'altro richiameremo la maniera di derivare considerata dal sullodato Professore, la quale dinoteremo col simbolo (P) e che si scosta dalla nostra che indicheremo con (R), solo pel modo di determinare, sulle parallele alla direttrice, i vertici del poligono derivato; imperocchè secondo la derivazione (R), questi vertici si assegnano staccando sulle dette parallele, e a partire dai vertici del poligono derivante, dei semmenti proporzionali ai quadrati delle distanze di questi medesimi vertici dal centro di derivazione; laddove che, secondo la derivazione (P), i detti semmenti devono esser tagliati a partire dai punti in cui le parallele alla direttrice, sono rispettivamente incontrate da una normale comune (ved. A. di S. F. e M. t. V. pag. 286.).

Ora ritenendo le medesime denominazioni adottate in questa nota, le coordinate t_k, u_k del vertice N_k del poligono derivato sono espresse da

$$(26) \quad \begin{cases} t_k = \dfrac{1}{a}(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k) - \lambda \dfrac{y_k - \lambda x_k}{1+\lambda^2} \\[2ex] u_k = \dfrac{1}{b}(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k) + \dfrac{y_k - \lambda x_k}{1+\lambda^2} \end{cases}$$

e con ciò, dinotando con S_1 la superficie del poligono derivato, calcolata colla formola (10), e tenendo presenti le formole (7) e quelle in principio del §. II. si trova:

$$(27) \qquad S_1 = \frac{2S}{b}\left[\beta - \frac{n}{4S} + \frac{a}{b}\left(\alpha - \frac{m}{4S}\right)\right].$$

Or paragonando cotesta formola con la (11) si fa chiaro in che stia la concordanza o la differenza nell'enunziato dei teoremi del Prof. PADULA e dei nostri.

Il centro A_0, determinato dalle formole (15), è identico nelle due derivazioni, se non che nella derivazione (P) il detto centro da'*poligoni derivati nulli,* mentre nella derivazione (R) li dà *equivalenti al poligono derivante.*

Il cor: III, teor: II. si modifica, nella prima derivazione, al modo seguente: *l'area del poligono derivato, rispetto a un punto* A, *sta a quella del poligono derivante come la proiezione di* AA_0 *della direttrice sta alla metà della ragione di derivazione.*

E però paragonando il detto cor: III. con quest'ultimo del PADULA ne deduciamo la proposizione seguente: *se da un medesimo poligono di superficie* S *e con una stessa direttrice, una medesima ragione, e uno stesso centro di derivazione si derivano due poligoni, l'uno* S_1, *secondo la derivazione* (P), *l'altro* S' *secondo la derivazione* (R) *la differenza* $S' - S = S_1$.

Le formole (26) poi mostrano facilmente il seguente corollario che ha luogo nella derivazione (P); cioè, *quando il poligono derivante e iscrittibile, il derivato di area nulla ha i suoi vertici collocati in una retta normale alla direttrice.*

In effetti, prendendo per asse della x una parallela alla direttrice, con che $\lambda = 0$, $b = \infty$; e prendendo per origine il centro del circolo che è centro della derivazione nulla quelle formole riduconsi a $t_k = \frac{\rho^2}{a}$, $u_k = y_k$, essendo ρ il raggio del circolo.

Similmente in questa derivazione (P) *i vertici di un quadrigono derivato da un altro quadrigono, rispetto a un qualunque centro di derivazione* A, *sono allocati su due parallele, quando la direttrice è normale ad* AA_0.

Imperocchè, analogamente al corollario III. §. II. la superficie del quadrigono in questo caso è nulla; ma essa è dinotata da

$$(t_1 - t_3)(u_2 - u_4) - (u_1 - u_3)(t_2 - t_4) = 0,$$

e questa equazione mostra la verità dell'enunziato.

Lasciamo da parte ogni altro confronto, e rimandiamo al citato vol. V degli annali di S. F. e M. per quelle osservazioni che riguardino l'uso del teorema IV. (§. V.).

§. VIII.

Se nel poligono derivante supponiamo un vertice variabile, mentre i rimanenti restan fissi il centro di derivazione A_0 (nulla o per equivalenza) andrà anch'esso variando di posizione; e si può cercare il luogo che descrive, mentre il vertice variabile, che sup-

poniamo sia (x_1, y_1) si muove anch'esso sopra una data linea

$$\varphi(x_1, y_1) = 0. \tag{28}$$

È chiaro che per risolvere questo problema bisognerà trovare le coordinate di A_0, che dinoteremo con t ed u, in funzione di x_1, y_1, e quindi combinare tali espressioni di t ed u con la (28) per eliminarne x_1, y_1. Ora per aversi le espressioni di t ed u in funzione di x_1, y_1 può farsi in due modi, sia partendo dalle formole (15), sia facendo uso del cor: III, §. IV: noi ci atterremo a questa seconda maniera.

Pertanto avendo supposto il vertice $M_1(x_1, y_1)$ variabile, il triangolo $M_1 M_2 M_n$ sarà variabile, mentre il rimanente poligono $M_2 M_3 \ldots M_n$ sarà costante. Prendasi per origine delle coordinate il vertice M_2, per asse della x la retta $M_2 M_n$, e si dinotino con s l'area del poligono fisso $M_2 M_3 \ldots M_n$, con α, β le coordinate del suo centro di derivazione A_0; e con a la distanza, o diagonale $M_2 M_n$.

Il centro di derivazione A_0 del triangolo variabile $M_1 M_2 M_n$ essendo il centro del circolo circoscritto (cor: I, teor. II, §. III) le sue cordinate saranno

$$\frac{1}{2}a, \quad \frac{y_1^2 + x_1^2 - a x_1}{2y_1},$$

e comechè la distanza di questo centro dal centro variabile (t, u) deve stare a quella del centro (α, β) al medesimo centro (t, u) nella inversa ragione della superficie $\frac{1}{2} ay_1$ del triangolo a quella della superficie s del poligono $M_2 M_3 \ldots M_n$; e siccome inoltre tutti e tre questi centri stanno per dritto (teor. III, §. IV.) così le coordinate t, ed u saranno espresse come segue

$$\left\{\begin{aligned} t &= \frac{a^2 y_1 \pm 4\alpha s}{2ay_1 \pm 4s}, \\ u &= \frac{a(y_1^2 + x_1^2 - ax_1) \pm 4\beta s}{2ay_1 \pm 4s}, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Posto ciò supponiamo, il vertice (x_1, y_1) muoversi sopra una retta $y = \lambda x + \mu$: l'equazione (28) sarà in tal caso

$$y_1 = \lambda x_1 + \mu; \tag{30}$$

sicchè bisognerà eliminare x_1, y_1 fra le (29) e (30), il che s'ottiene agevolmente; imperocchè la prima (29) messovi in luogo di y_1 il suo valore (30), e risolutala rispetto ad x_1, dà

$$x_1 = -\frac{a\mu(a - 2t) \pm 4s(\alpha - t)}{a\lambda(a - 2t)};$$

e la seconda (29) con la medesima sostituzione e risoluzione, dà:

$$a(1+\lambda^2)x_1^2 + a[2\lambda(\mu - u) - a]x_1 + a\mu(\mu - 2u) \pm 4s(\beta - u) = 0,$$

e sostituendo in quest'ultima equazione il precedente valore di x_1 si giugne ad una equazione alla quale si può dare la forma seguente:

$$(30)\left\{\begin{matrix} (1+\lambda^2)\left[a\mu(a-2t) \pm 4s(\alpha - t)\right]^2 \\ -a\lambda(a-2t)\left[(\lambda a\mu^2 - a^2\mu - 4\lambda\beta s)(a-2t) \pm 4s(a-2\lambda\mu)(\alpha - t) + 4\lambda s(2\alpha - a)u\right] \end{matrix}\right\} = 0,$$

che rappresenta un'iperbola di cui un asintoto ha per equazione $t = \frac{1}{2}a$, ed è perciò la retta normale alla diagonale $M_2 M_n$ e passa sul punto di mezzo di questa diagonale; quindi si ha il seguente

Teorema. — *Essendo dato un poligono di cui un vertice si muova lungo una retta, mentre gli altri rimangono fissi, il centro di derivazione* A_0 *descrive un'iperbola.*

Osservazioni. — L'equazione (30), allorchè $\alpha = \frac{1}{2}a$, il che ha luogo quando la porzione fissa del poligono è iscrittibile in un circolo, diviene della forma

$$\left\{(1+\lambda^2)(a\mu + 2s)^2 - a\lambda[\lambda a\mu^2 - a^2\mu - (2\beta + 2\lambda\mu - a)2s]\right\}(a - 2t)^2 = 0,$$

e quindi rappresenta una retta $t = \frac{1}{2}a$, che è la bisegante normalmente la diagonale $M_2 M_n$; quindi l'iperbola del teorema precedente, è in questo caso, una retta.

Èd è pure una retta parallela a quella ora trovata, quando il vertice mobile scorre sopra una parallela alla diagonale $M_2 M_n$ com'è agevole il verificare; imperocchè basta porre nella (30) $\lambda = 0$, e si ha subito

$$a\mu(a - 2t) + 4s(\alpha - t) = 0.$$

IX.

Passiamo ora a un'altra maniera di derivazione, supponendo dato un'poligono derivante, un centro A, e una ragione a di derivazione; indi congiunto il vertice M_k col centro A, e menata per M_k la perpendicolare ad AM_k, si tagli su questa una porzione $M_k N_k = a.\ AM_k$; e facendo la medesima costruzione per ogni vertice del poligono dato, e prendendo i semmenti $M_k N_k$ sempre nel medesimo senso, s'avrà un nuovo poligono derivato dal dato.

Ritenute le medesime denominazioni precedenti, l'equazione della retta condotta pel vertice $M_k(x_k, y_k)$ perpendicolarmente ad AM_k sarà

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}(x - \alpha),$$

e inoltre

$$AM_k = \sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y - \beta)^2},$$

$$M_k N_k = \frac{(t_1 - x_1)\sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2}}{y_1 - \beta} = -\frac{(u_1 - y_1)\sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2}}{x_1 - \alpha};$$

quindi, secondo le condizioni del problema

$$(31) \qquad \frac{t_1 - x_1}{y_1 - \beta} = -\frac{u_1 - y_1}{x_1 - \alpha} = a,$$

da cui si trae

$$t_1 = x_1 + a(y_1 - \beta) \; ; \qquad u_1 = y_1 - a(x_1 - \alpha) \, ;$$

e messi questi valori nella (10), e riducendo in virtù delle prime formole del §. II e della (9), avremo

$$(32) \qquad S' = (1 + a^2)S.$$

Cotesto risultamento, che ci mostra essere la *superficie del poligono derivato proporzionale a quella del derivante, qualunque sia il centro di derivazione*, ci sembra molto importante per la valutazione delle superficie terminate da quelle curve che si deducono, secondo l'indicata derivazione da altre curve, di cui si conosce la quadratura. Così se la curva derivante è un circolo di raggio r, e il centro di derivazione è lo stesso centro del circolo, si trova agevolmente che la curva derivata è un'altro circolo concentrico al dato, e di raggio $r\sqrt{1 + a^2}$; il che conduce ad un'espressione per la superficie di questo secondo circolo, la quale conferma la formola (32).

Nel caso più generale che il centro di derivazione non fosse il centro stesso del circolo derivante, ma un punto di coordinate α, β, l'equazione della curva derivata è la seguente del 6.° grado

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(t^2+u^2+c^2)(\beta+u)+2(\alpha t+\beta u+r^2)(a^2\beta-u)]^2 \\ +[(t^2+u^2+c^2)(\alpha+t)+2(\alpha t+\beta u+r^2)(a^2\alpha-t)]^2 \end{array} \right\} = 4(1+a^2)r^2(\alpha u-\beta t)^2,$$

in cui

$$(34) \qquad c^2 = (1 - a^2)r^2 - a^2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Allorchè $\alpha = \beta = 0$, la (33) si scinde nelle tre seguenti equazioni

$$t^2 + u^2 = 0\,, \qquad t^2 + u^2 - (1 + \alpha^2)r^2 = 0\,, \qquad t^2 + u^2 - (1 + a^2)r^2 = 0,$$

la prima delle quali dà lo stesso centro del circolo, ed è estranea alla questione; le altre due coincidono in dare il sopraindicato circolo concentrico al derivante.

Secondo la formola (32) dopo n sussecutive derivazioni, restando la stessa la ragine a, la superficie $S^{(n)}$ del poligono derivato diviene $(1 + a^2)^n$ volte quella del dato; e se $a = 1$, risulta $S^{(n)} = 2^n . S$.

Se i vertici del poligono dato si trovano allocati in una retta R, allora $S = 0$, secondo la (32) anche $S' = 0$: in questo caso i vertici del poligono derivato pur essi si trovano in una seconda retta R'; imperocchè dovunque si prendano tre punti sulla retta R, s'avrà sempre un triangolo derivato nullo, e quindi tre punti corrispondenti posti anch'essi per dritto. Da ciò deduciamo il seguente

TEOREMA I. — *Se intorno ad un punto qualunque* A *si fa ruotare una retta* B, *la quale incontri una retta fissa* R, *e da ciascun punto d'incontro* C *si meni al corrispondente raggio* AC *la normale* $CC' = a.AC$, *sempre nel medesimo senso; il luogo di* C' *sarà una seconda retta* R'.

Anzi, potendo prendere le indicate normali in un senso e nell'opposto, rispetto a ciascun raggio, così si ha una seconda retta analoga alla R'.

Ora è chiaro che la normale CC' inviluppa una parabola, che ha per fuoco A, per asse la perpendicolare menata da questo punto sulla retta R, e questa retta per tangente al vertice; quindi si può stabilire il teorema quì appresso.

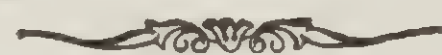
TEOREMA II. — *Se dal fuoco d'una parabola si menano le perpendicolari alle tangenti, e su ciascuna tangente, a partire dal piede, si tagliano, ne' due sensi, due porzioni eguali e ciascuna proporzionale alla lunghezza della rispettiva perpendicolare; il luogo geometrico degli estremi di quelle porzioni è il sistema di due rette simmetricamente disposte rispetto all'asse della parabola.*

(*Sarà continuato*).

Sopra un teorema di geometria descrittiva e sua applicazione al tracciamento del contorno dell'ombra di alcuni corpi

NOTA

DEL PROF. GIUSEPPE BRUNO.



Sia A una linea piana qualunque ed O una retta od asse contenuto nel piano di essa curva. Sia A' la posizione che ha preso la curva A quando questa si è fatta muovere nel suo piano in guisa che tutti i suoi punti abbiano descritto rette perpendicolari all'O aventi una lunghezza comune qualunque a. Si immagini ora un'altra linea qualunque piana mobile in modo che, mentre essa si mantiene sempre simile a se stessa e similmente disposta ed il suo piano sempre perpendicolare all'asse O, i punti in cui quest'asse incontra i piani delle successive posizioni di detta linea mobile sieno centri omologhi di similitudine delle ora nominate posizioni. La grandezza di questa linea mobile varii successivamente prima in modo che nelle sue varie posizioni la detta linea mobile incontri la linea A, poi talmente che nel suo moto sempre s'appoggi sulla linea A'; i luoghi geometrici così generati dalla linea mobile sono due superficie che chiameremo S ed S'. Se per l'asse O si conduca un piano qualunque, questo taglia le superficie S ed S' secondo due linee B e B' delle quali la seconda B' non è altro che la prima B trasportata nel suo piano in modo che tutti i suoi punti abbiano percorso rette perpendicolari all'asse O di lunghezza comune b tale che il rapporto $\frac{b}{a}$ sia uguale al rapporto dei *raggi* secondo cui una qualunque delle posizioni della linea mobile è tagliata dai piani della direttrice A e B.

Da quest'osservazione che è una conseguenza immediata della similitudine di forma e posizione che la linea mobile sempre conserva si deduce che se si prende un punto qualunque M sulla superficie S, e per esso si conduce una perpendicolare p all'asse O la quale (prolungata se fa d'uopo) incontri la superficie S' in M', i piani tangenti ad S ed S' in M ed M' sono fra di loro paralleli.

Infatti conducendo per p due piani uno dei quali passa per O l'altro vi sia perpendicolare, questi piani taglieranno le due superficie S ed S' ciascuno secondo due linee le quali passano pei punti M ed M' ed hanno in questi punti le tangenti rispettivamente parallele.

Se perciò ad una S' delle due superficie S ed S' si voglia condurre un piano tangente parallelo ad un piano dato, e l'altra superficie S sia di forma tanto più sem-

plice che ad essa riesca più agevole il condurre un piano tangente parallelo al dato si potrà far servire la costruzione di quest'ultima alla determinazione del chiesto piano tangente ad S'. Sia infatti P il piano tangente ad S parallelo al piano dato, e sia M il suo punto di contatto. Per M si conduca una perpendicolare p all' asse O la quale incontri in M' la supérficie S': il piano condotto per M' parallelamente a P sarà il piano domandato. E se sulla superficie S fosse segnata una linea qualunque C, e si domandasse di tracciare sulla superficie S' una linea C' tale che nei punti di essa i piani tangenti ad S' fossero rispettivamente paralleli ai piani tangenti ad S nei punti di C basterebbe per ciascun punto M della linea C ripetere l'operazione superiormente indicata, e si determinerebbe così sulla superficie S' altrettanti punti come M' la cui successione costituirebbe la domandata linea C'.

Le considerazioni sopra esposte ricevono un'applicazione nel tracciamento geometrico del contorno C' dell'ombra della superficie S' quando si suppongono i raggi di luce tutti paralleli fra loro e ad una retta data L e si conosca inoltre il contorno C dell'ombra della superficie S illuminata anch'essa dai raggi paralleli ad L. Infatti le C e C' sono le linee di contatto delle superficie S ed S' con superficie cilindriche ad esse circoscritte avanti le loro generatrici parallele ad L, epperò i piani tangenti ad S' nei punti di C' sono rispettivamente paralleli ai piani tangenti ad S lungo la C, e quindi per quello che s'è detto poc'anzi conosciuta C facilmente si determina C'. Anzi più generalmente se s' immagina conosciuta sulla superficie S la linea Γ tale che i suoi diversi punti sieno con uguale intensità illuminati, ossia tale (poichè l'intensità dell'illuminazione in un punto di una superficie data, se i raggi luminosi procedono da un punto unico infinitamente lontano, è proporzionale al seno dell' angolo fatto dalla direzione dei raggi luminosi col piano tangente in quel punto alla superficie data) che in ogni suo punto il piano tangente ad S faccia un angolo costante e dato con L e si domandi di segnare sopra S' la linea Γ' di cui i varii punti sieno illuminati in misura uguale fra loro, ed uguale a quella con cui sono illuminati i punti della Γ su di S, la determinazione di Γ' per mezzo di Γ si farà ancora nello stesso modo con cui si è detto più in su dedursi la linea C' dalla C. Modificando alcun poco i ragionamenti fin qui fatti si potrebbero estenderne le conclusioni al caso in cui la direttrice A di S, e quindi anche la direttrice A' di S' non fossero linee piane, come pure sarebbe facile il dimostrare analiticamente le dette conclusioni a cui siamo giunti con considerazioni puramente geometriche. Ma passiamo invece ad arrecare esempi di questioni non infrequenti la cui soluzione è una facile applicazione delle proposizioni ora dimostrate.

Se la linea A sia una circonferenza di circolo avente il suo centro sull'asse O, e la linea mobile sia ancor essa una circonferenza circolare il cui centro percorra l'asse O, le superficie S ed S' saranno rispettivamente una sfera ed un anello, e sic-

come sulla sfera tanto il contorno dell'ombra propria quanto le linee ugualmente illuminate sono circonferenze di circoli aventi i loro centri sul diametro della sfera che è parallelo alla direzione della luce, ed i cui raggi si determinano con costruzioni molto semplici, facilmente pure si possano segnare, ed il contorno dell' ombra propria della superficie dell'anello, e delle linee della superficie stessa, i cui punti sono illuminati con una stessa intensità data qualunque.

La linea mobile sia ancora una circonferenza, il cui centro sempre si trovi sull'asse C, e la linea A sia una sezione conica qualunque uno dei cui assi giaccia secondo la stessa retta O, la superficie S sarà una superficie di rivoluzione di 2.° ordine la cui linea di contatto con un cilindro circoscritto avente le generatrici parallele ad una retta data L si sa determinare, poichè essa è l'intersezione della superficie stessa col piano diametrale di essa che è conjugato delle corde parallele ad L, e quindi si sanno costruire le projezioni di detta curva di contatto, giacchè queste projezioni sono sezioni coniche delle quali si determina facilmente un sistema di diametri conjugati. Non sarà perciò nè lungo nè malagevole il descrivere la linea di contatto dell'ombra propria della superficie di rivoluzione generata da una data sezione conica che rota intorno ad una retta qualunque contenuta nel suo piano e parallela ad un suo asse.

La figura annessa è relativa al caso in cui la direttrice della superficie sia un elisse, e la generatrice mobile sia puranco elisse di cui il centro nelle successive posizioni che occupa essa generatrice sempre si trovi sopra una retta data contenuta nel piano e parallela ad un asse della elisse direttrice. Si è supposto di più (unicamente però per fissar meglio le idee, e perchè la figura avesse una miglior disposizione) che i punti in cui la generatrice nelle sue successive posizioni taglia la direttrice sieno vertici dell'elissi generatrici.

I piani di projezione furono presi, al solito, ortogonali fra loro, e quello di essi che dicesi comunemente verticale fu scelto parallelo all'elisse direttrice, e l'orizzontale perpendicolare alla retta dei centri della generatrice nelle sue posizioni successive. La elisse direttrice si projetta verticalmente in $A'B'C'D'$ in vera grandezza con un asse $A'C'$ perpendicolare alla linea di terra, ed orizzontalmente secondo DB parallela alla linea di terra stessa.

La linea luogo dei centri delle generatrici è projettata orizzontalmente in g sul prolungamento di DB e verticalmente in $c'g'a'$. La generatrice nelle sue varie posizioni si projetta sul piano verticale secondo rette parallele alla linea di terra, ed orizzontalmente secondo elissi simili, concentriche in g, ed aventi ciascuna un asse omologo parallelo alla linea di terra. Nella figura sono segnate le projezioni

$$(1) \qquad \begin{cases} DFD_1F_1 \\ D'D'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} GiG_1j \\ A'A'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} BHB_1H_1 \\ B'B'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} GiG_1j \\ C'C'_1 \end{cases}$$

delle quattro posizioni che ha la generatrice quando incontra la direttrice in alcuno dei suoi vertici. La superficie è così projettata orizzontalmente nella corona compresa fra le due ellissi $DFD_{I}F_{I}$ e $BHB_{I}H_{I}$ e verticalmente nella figura $A'B'C'\ C'_{I}B'_{I}A'_{I}$; ed ha una forma annulare. I raggi di luce sono supposti paralleli alla retta che si projetta orizzontalmente in L verticalmente in L', e si vuole segnare il contorno dell' ombra propria tanto sulla parte esteriore che sulla interiore dell'ora descritta superficie annulare. Per questo fine immagino trasportata orizzontalmente l'elisse direttrice della superficie annulare nel suo piano fintantochè il suo asse verticale che prima projettavasi in $\left\{\begin{matrix} G \\ A'C' \end{matrix}\right.$ venga a coincidere colla retta ad esso asse parallella $\left\{\begin{matrix} g \\ a'c' \end{matrix}\right.$, ossia colla retta dei centri dell'elisse mobile. In tal posizione l'elisse direttrice si projetterà orizzontalmente secondo la retta *bd* parallela alla linea di terra, e verticalmente secondo l'elisse $a'b'c'd'$. Si concepisca ora un'elisse la quale restando sempre simile e similmente disposta alla generatrice della superficie annulare, come questa muovasi mantenendo il suo centro sulla retta $\left\{\begin{matrix} g \\ c'a' \end{matrix}\right.$, il suo piano perpendicolare alla retta stessa, e i cui due assi varino di grandezza talmente che il suo perimetro in ogni sua posizione incontri l'elisse poc' anzi nominata $\left\{\begin{matrix} bd \\ b'a'd'c' \end{matrix}\right.$. Il luogo geometrico di tutte le posizioni di questa elisse mobile è un elissoide a tre assi del quale la projezione verticale è l'elisse $a'b'c'd'$ e la orizzontale un'elisse $b\,l\,d\,f$ che ha il centro in g, un asse bd parallelo alla linea di terra ed uguale all' asse orizzontale $b'\ d'$ dell' elisse $a'b'c'd'$, e l'altro asse lf di grandezza determinata dalla condizione che l'elisse $bldf$ sia simile all'elisse $BHB_{I}H_{I}$ e similmente disposta. Gli assi del detto elissoide saranno così uno parallelo alla linea di terra, e gli altri due perpendicolari uno al piano orizzontale l'altro al piano verticale di projezione : essi si projettano rispettivamente in $\left\{\begin{matrix} bd \\ b'd' \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} g \\ a'c' \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} l\,f \\ g' \end{matrix}\right.$: il centro poi dell'elissoide è projettato orizzontalmente in g, verticalmente in g'. Si immagini quest'elissoide illuminato da raggi paralleli alla retta $\left\{\begin{matrix} L \\ L' \end{matrix}\right.$; il contorno della sua ombra si sa essere una sezione fatta nella superficie dell'ellissoide da un piano che passa pel centro di questa superficie, e projettarsi perciò sui due piani di projezione secondo due elissi concentriche alle elissi projezioni dell'elissoide.

Se si conducono due piani verticali tangenti all'elissoide e paralleli alla direzione della luce , essi avranno per traccia orizzontale le rette parallele ad L tangenti nei punti 3 e 7 all'elisse $blfd$: i punti 3 e 7 apparterranno perciò alla projezione orizzontale del contorno dell'ombra dell'elissoide : gli accennati punti di contatto trovan-

dosi sulla sezione principale dell'ellissoide che è parallela al piano orizzontale di projezione si projetteranno sulle $d'b'$ nei punti $3'$ e $7'$ i quali punti perciò saranno sulla projezione verticale del cercato contorno dell'ombra dell' elissoide. Le tangenti in 8 ed in 7 all'elisse $bldf$ sono pure tangenti all'elisse projezione orizzontale del contorno dell'ombra, poichè questa projezione dell'ombra che abbiamo dimostrato dover passare per 3 e per 7 deve essere iscritta nell'elisse $bldf$ projezione dell'elissoide: epperò la projezione orizzontale del contorno dell' ombra hà per un suo diametro la retta 37, ed il coniugato di questo diametro giace nella direzione della retta L ossia secondo hk. Per determinare la grandezza di questo secondo diametro s'immagini tagliato l'elissoide col piano verticale la cui traccia orizzontale è hk. La sezione sarà un elisse projettata orizzontalmente in hk, e verticalmente secondo un elisse di cui un asse è $a'c'$ l' altro $h'k'$, essendo h' e k' i punti in cui le perpendicolari alla linea di terra condotte per h e per k incontrano $d'b'$. Se alla sunnominata elisse sezione dell'ellissoide si conducono due tangenti parallele alla direzione della luce i punti di contatto, che sono punti del contorno dell'ombra dell' elissoide si projetteranno orizzontalmente sopra hk, epperciò le projezioni orizzontali dei detti punti di contatto saranno le estremità del diametro dell' elisse projezione orizzontale dell' ombra che è coniugato di 37.

Ora il punto dell'accennata elisse sezione dell' elissoide in cui la tangente è parallela alla retta $\begin{cases} L \\ L' \end{cases}$ si projetta verticalmente nel punto in cui la projezione verticale della ridetta sezione è toccata da una retta parallela alla projezione verticale della direzione della luce, ossia nel punto in cui l'elisse che ha per assi $a'c'$, $h'k'$ ha la sua tangente parallela ad L'. È nota una costruzione con cui questi punti di contatto si determinano anche senza costruire l'elisse; sieno dunque $1'$ e $5'$ questi punti di contatto, essi saranno altri due punti della projezione verticale del contorno dell'ombra dell'elissoide. Per $1'$ e $5'$ si conducano le perpendicolari alla linea di terra fino ad incontrare hk in 1 e 5 : nelle due rette 37 e 15 si avranno due diametri coniugati della ridetta projezione orizzontale del contorno dell'ombra dell' elissoide che si potrà perciò facilmente segnare, e sarà l'elisse 12345678. La elisse projezione verticale dello stesso contorno dell'ombra dell'elissoide si potrebbe determinare con un procedimento analogo, cercando cioè la grandezza del diametro di essa parallelo ad L', del quale è coniugato il diametro $8'4'$ che unisce i punti $8'$ e $4'$ in cui la tangente all'elisse $a'b'c'd'$ è parallela ad L': Ma vi si arriva più speditamente osservando che $3'7'$ ed $1'5'$ sono anche due diametri coniugati della projezione verticale del contorno dell'ombra, perchè essi sono le projezioni verticali di due diametri dell' elisse contorno dell'ombra che si projettano orizzontalmente secondo i diametri 37, 15 della sua projezione orizzontale, i quali sono tra loro coniugati. Sopra i diametri $3'7'$ ed

ed $1'5'$ considerati come coniugati si costruisca dunque l'elisse $1'2'3'4'5'6'7'8'$, questa sarà la projezione verticale del contorno dell'ombra dell'elissoide. La figura stessa indica abbastanza senza più insistere come si determinino i punti più elevato e più depresso, e gli altri punti particolari dell'accennato contorno: passeremo dunque senz' altro a dedurne la projezione del contorno dell'ombra della superficie annulare.

E cominciando dal contorno dell'ombra sulla superficie esteriore dell'anello: se si tirino da g ai diversi punti dell'ellisse 12345678 delle rette, e sul prolungamento di ciascuna di esse come $g\,5$ si porti da 5 in r una lunghezza uguale a gi, i punti determinati come r saranno sulla curva $mnpqrstu$ projezione orizzontale del contorno dell'ombra della parte esteriore della superficie annulare la quale projezione sarà perciò determinata : condotto poi per $5'$ una parallela e per r una perpendicolare alla linea di terra finchè s'incontrino in r', r' sarà un punto della projezione verticale dello stesso contorno d'ombra, la qual projezione si potrà dunque determinare e sarà

$$m'\ n'\ p'\ q'\ r'\ s'\ t'\ u'.$$

Se poi la lunghezza gi si porta ancora sulla $g\,5$ ma non a partire dal punto 5 ma sibbene dal punto 1 in ρ, questo punto ρ apparterrà alla projezione orizzontale $\mu\ \nu\ \pi\ \chi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon$ del contorno dell'ombra della parte interna della superficie annulare. Se finalmente per $1'$ si tira una parallela alla linea di terra e per ρ una perpendicolare alla linea stessa, il punto ρ' d'incontro delle rette tirate sarà sulla projezione verticale del contorno dell' ombra della parte interna della superficie dell' anello. Unendo tutti i punti determinati come ρ' si avrà intera l'ora nominata projezione nella linea $\mu'\ \nu'\ \pi'\ \chi'\ \rho'\ \delta'\ \tau'\ \upsilon'$.

ETUDES SUR LES COURBES A' DOUBLE COURBURE
TRACÉES SUR UNE SURFACES ALGÈBRIQUE D'UN ORDRE QUELCONQUE.

PAR E. DE JONQUIÈRES.



1. Dans une communication importante, faite à l'académie le 2 Décembre 1861 (*), au sujet des courbes à double courbure qu'on peut tracer sur l'hyperboloïde à une nappe, Mr. Chasles, après avoir présenté quelques réflexions sur les causes qui ont pu retarder les progrès de la théorie des courbes à double courbure en général, s'exprimait en ces termes :

« On est donc induit à penser que la manière d'étudier les courbes à double » courbure devrait être telle, qu'elle devînt, comme cas particulier, celle en usage pour les courbes planes. Il semble qu'on pourra satisfaire à cette condition si, au lieu de considérer les courbes gauches dans l'espace indéfini, on les étudie par familles, sur telle ou telle surface déterminée : la surface plane ne sera plus qu'un cas particulier de la question, et les procédés employés sur les surfaces courbes deviendront ceux que les géomètres pratiquent sur le plan ».

2. Le présent Mémoire, inspiré par ces justes réflexions, et par la lecture des communications faites à l'Académie, dans ces derniers temps par Mr. Chasles, a pour but de répondre, dans une certaine mesure, au programme tracé par l'illustre géomètre. Je m'occuperai ici des courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque, et qui sont les intersectiones *complètes* de cette surface par d'autres surfaces algébriques. Les résultats auxquels je parviendrai ne seront donc, en général, démontrés que pour les courbes gauches qui satisferont à cette condition, courbes comprises par conséquent parmi celles dans le degré est exprimé par un nombre non premier.

Notations. — Définitions — Propriétés générales.

3. La surface algébrique donnée du degré n, et n'ayant que les singularités qui lui sont propres, sur laquelle on aura à considérer des courbes à double courbure, sera représentée par S^n; les surfaces sécantes le seront par S^m, S^p, S^r, ... etc. Les courbes gauches résultantes seront désignées par la lettre G, affectée d'un exposant égal au degré de la courbe. Ainsi G^{mn} désigne la courbe gauche, intersection complète des surfaces S^n, S^m; et son degré $n\,m$ exprime qu'un plan quelconque la rencontre en nm points.

(*) J'ai eu connaisance de ce mémoire le 29 août 1862.

4. Trois surfaces S^n, S^m, S^p, qui n'ont pas de courbe commune, se coupent généralement en $n\,m\,p$ points. Donc deux courbes gauches G^{nm}, G^{np}, tracées sur une même S^n, se coupent en nmp points. Si $m = p$, le nombre des points d'intersection est nm^2. Dans ce cas, il passe, par ces nm^2 points, une infinité de courbes gauches G^{nm}, qu'on peut regarder comme étant les intersections de S^n par les surfaces d'un faisceau (S^m), dont la courbe commune G^{m2} coupe S^n aux nm^2 points dont il s'agit. Ces nm^2 points forment la *base* du faisceau (G^{nm}), ils en sont les *points fondamentaux*. Par chaque point de S^n, autre que les points de la base du faisceau, il ne passe qu'une courbe G^{nm} du faisceau. Cette importante propriété *suffit pour définir le faisceau*.

5. Quand les surfaces sécantes forment *un réseau*, il en est de même des courbes gauches qu'elles interceptent sur S^n; il n'en passe qu'une par deux points donnés, *propriété qui suffit pour caractérises le réseau et le définir*.

6. Si la surface S^n n'était pas donnée, il faudrait, pour déterminer une courbe gauche G^{nm} $(n > m)$,

$$A = \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{6}\right)$$

points donnés, ainsi que l'a démontré M. Jacobi, dans le tome XV du Journal de Crelle (p. 299). mais quand la surface S^n est donnée, la courbe G^{nm}. ne dépendant plus que de la surface S^m, est déterminé par un moindre nombre de points. Car, si l'on désigne le nombre précèdent par A, et celui ci: $\left(\frac{(m+1)(m+1)(m+3)-6}{6}\right)$ par B, l'inégalité $A > B$, revient, en faisant $n = m + i$, à cette autre:

$$3mi\,(2m + i + 4) > \text{zero},$$

que est vraie toutes les fois qu'on n'à pas $n = m$.

Quand $n > m$, on peut prendre sur S^n tous les points nécessaires à la déterminations de la courbe G^{nm}, on, en d'autres termes, de la surface S^m. Si $n = m$, tous les points nécessaires à la détermination de G^{nm}, dont le nombre en alors égal à celui que donne la formule précédente, peuvent être pris sur S^n; mais il faut en prendre un de plus, hors de cette surface, pour detérminer l'une des S^m qui passent, en nombre infini, par la courbe. Enfin, dans le cas de $n > m$, parmi les

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 = C$$

points nécessaires à la détermination d'une surface du degré n, on n'en peut prender arbitrairement que A au plus sur S^m. Car, si l'on en prenait seulement $A+1$, la surface S^n se décomposerait en deux autres, savoir la surface S^m, qui est donnée,

et la surface S^{n-m}, du degré $(n-m)$, qui est déterminée par des

$$C-A-1=\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{6}-1$$

points restants.

7. Les lignes les plus simples qu'on ait à considérer sur une surface S^n, sont les sections ou courbes planes de cette surface. Elles correspondent aux lignes droites sur le plan, et, si l'on convient que les plans de ces sections devront (sauf d'autres déterminations spécifiées) passer toujours par un même point O, choisi d'ailleurs arbitrairement dans l'espace, on peut dire que deux points suffisent pour déterminer une courbe plane C^n, sur la surface comme sur le plan.

8. Une section plane de S^n peut toucher une courbe gauche G^{mn} en un point, ou en deux points distincts, ou en deux points consécutifs. Dans ce dernier cas, elle prend le nom de *plan osculateur* de la courbe qui devient osculateur stationnaire, s'il est osculateur en deux points; dans les deux autres, elle correspond aux tangentes simples et aux tangentes doubles des courbes planes.

Outre ces singularités qui existent, en général sur une courbe gauche quelconque, ces courbes peuvent être données de points doubles ou multiples, de tangentes rectilignes doubles ou d'inflexion, de plans osculateurs doubles.

Par exemple, *si les deux surfaces* S^n, S^m, *se touchent en un point, ce point est un point double de leur courbe d'intersection.*

Remarque. Le nombre des points doubles (ou de rebroussement, indistinctement), dont une courbe gauche G^{nm} peut être donnée, est limité comme il l'est dans les courbes planes: Il s'agit de fixer cette limite. Supposons $n>m$, et posons

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}-1=A.$$

Soit aussi désigné par x le nombre maximum des points doubles sont G^{nm} peut être donnée, cette courbe étant d'ailleurs une courbe générale dans son degré, c'est-à-dire une courbe non décomposée.

On peut faire passer une infinité de surfaces du degré m par $A-1$ points quelconques de la courbe G^{nm} (4). Prenons, pour ces points, les x points doubles de G^{nm}, $(A-x-1)$ autres points simples de cette courbe, et un autre point quelconque de l'éspace, pour y faire passer une surface $\sum^m$. Les trois surfaces S^n, S^m, $\sum^m$ auront en commun, par équivalence $2x+A-x-1=x+A-1$ points simples. Or le nombre doit être égal à nm^2. Donc on a $x=nm^2+1-A$, au plus; et telle est la limite cherchée.

Si $n=m$, la surface $\sum^m$ ne peut être assujettie à passer que par $A-2$ points

quelconques de la courbe gauche G^{mn}, si l'on veut que cette surface ne contienne pas toute la courbe; la limite est donc alors $x = n^3 + 2 - A$, au plus.

Et comme les points doubles de G^{nm} proviennent des points de contact des surfaces génératrices S^n, S^m qu'on suppose n'avoir pas de courbes doubles, on conclut, de ce qui précède, les théorèmes suivants:

1.° *Une courbe gauche* G^{nm} *ne peut avoir plus de* $(nm^2 + 1 - A)$ *points doubles, si* $n > m$; *ni plus de* $(n^3 + 2 - A)$, *si* $n = m$.

2.° *Deux surfaces* S^n, S^m, *ne peuvent se toucher qu'en* $(nm^2 + 1 - A)$ *points, au plus, si* $n > m$; *et, si* $n = m$, *elles ne peuvent se toucher qu'en* $(n^3 + 2 - A)$ *points au plus.*

M. G. Salmon, dans son intéressant mémoire *on the classification of curves of double curvature*, §. 16, fixe aussi une, limite au nombre x. Mais cette limite, déduite de considérations différentes, est moins basse que celle que je donne ici.

Dans le cas où la courbe G^{nm} se décompose en courbes de degrés moindres, le nombre de ses points doubles peut être plus grand, ainsi que cela arrive également pour les courbes planes. Je m'occuperai de ce cas particulier, ainsi que des autres propriétés de ces courbes gauches décomposées, dans un autre mémoire, à cause de l'étendue et de l'importance spéciale du sujet.

9. Les faisceaux de courbes gauches jouissent des deux propriétés fondamentales suivantes, savoir :

1.° *Les courbes gauches d'un faisceau corréspondent anharmoniquement aux tangentes qui leur sont menées en un des points fondamentaux du faisceau.*

2.° *Deux faisceaux* (G^{nm}), $G^{(np)}$, *dont les courbes se correspondent anharmoniquement, engendrent, par les intersections mutuelles des courbes correspondantes, une courbe* $G^{n(m+p)}$, *qui passe par les bases des deux faisceaux, c'est-à-dire par* $n(m^2 + p^2)$ *points déterminés.*

Ces deux théorémes résultent directement des propriétés analogues des faisceaux de surfaces. On a aussi le suivant :

10. *Les courbes correspondantes de trois faisceaux proiectifs de courbes gauches sur* S^n, *se coupent en* $n(mp + pr + rm)$ *points.*

11. On peut appeler *serie* de courbes gauches, d'ordre nm et *d'indice* M, un groupe de courbes tracés sur S^n telles, qu'il en passe M par un point quelconque de S^n.

La considération des séries donne lieu aux théorêmes suivants :

1.° *Si les courbes de deux séries, d'ordres et d'indices* nm, M *et* np, P, *respectivement; se correspondent une à une, les courbes correspondantes se coupent sur une courbe gauche du degré* $n(mP + pM)$ *au plus.*

2.° *Si les courbes de trois séries, d'ordres et d'indices* mn, M; np, P; nr, R,

respectivement, se correspondent une à une, les courbes correspondantes se coupent, trois à trois, en n(Mpr + Prm + Rmp) *points au plus situés sur* S^n.

DU CONTACT DES COURBES GAUCHES.

12. Le théorème suivant, qu'on démontre sans difficulté, est fondamental pour l'étude des propriétés des courbes gauches:

Théorème. *Le lieu d'un point, dont les plans polaires, relatifs à quatre surfaces données, passent par un même point* (variable avec le premier), *est une surface* $\Sigma^{(m+n+p+r-4)}$, *du degré* $(m+m+p+r-4)$.

13. Si les surfaces S^p, S^r sont du même degré, on pourra énoncer le théorème ainsi:

Le lieu d'un point tel, que ses plans polaires, relatifs à deux surfaces S^m, S^n, *se coupent suivant une droite située dans le même plan que la droite d'intersection des plans polaires du même point, relatifs à deux surfaces* $S_1{}^p$, $S_2{}^p$, *est une surface du degré* $(m+n+2p-4)$.

14. Si l'on considère la faisceau (S^p), que déterminent les deux surfaces $S_1{}^p$, $S_2{}^p$, on sait que les plans polaires d'un même point, relatifs à toutes les surfaces du faisceau, passent par une même droite; et il y a toujours, dans le faisceau, une certaine surface, pour laquelle le plan polaire dont il s'agit, passe par cette droite et a une direction determinée. Donc on peut dire que:

La surface $\Sigma^{(m+n+2p-4)}$ *est le lieu d'un point, dont les plans polaires relatifs à deux surfaces fixes* S^n, S^m *et à l'une des surfaces du faisceau* (S^p), *passent tous les trois par une même droite.*

15. Les points de rencontre de la surface Σ avec la courbe gauche G^{nm}, tracée sur S^n, sont donc tels, que chacun d'eux a pour plan polaire, relatif à l'une des S^p, un plan passant par la tangente en ce point á la courbe gauche. Or ce plan est tangent à cette S^p; donc le point dont il s'agit est un point de contact de G^{mn} avec la S^p; Donc, *dans un faisceau de surfaces du degré p, il existe, en général,* $mn(m+n+2p-4)$ *surfaces qui touchent une courbe gauche* G^{nm}.

16. Et, comme ces surfaces déterminent, sur S^n, un faisceau de courbes gauches G^{np}:

Dans un faisceau de courbes gauches G^{np}, *tracées sur* S^n, *il y a, en général,* $nm(n+m+2p-4)$ *courbes, dont chacune touche, en un point, une courbe* G^{nm}, *tracée sur la même surface.*

17. Ce théorème donne lieu à plusieurs corollaires; nous n'en citerons que deux, savoir:

1° Si on fait $m=1$ dans la formule précédente, *Parmi les courbes d'un fai-*

sceau ($G^{n p}$), *il y en a, en général,* $n(n+2p-3)$, *dont chacune touche une section plane de la surface* S^n.

Ce nombre est diminué de deux unités, si la section passe par un des points fondamentaux du faisceau.

18. 2° Si on fait $p=1$ dans la formule du n° (15) on voit que, *Par une droite, on peut mener* $mn(m+n-2)$ *plans tangents à une courbe* G^{mn}; ou pour conserver une analogie plus complète, dans les termes, avec ce qui se passe sur le plan.

Par un point de S^n, *on peut mener* $mn(m+n-2)$ *courbes planes tangentes à* G^{mn}; ces courbes devant selon la convention établie plus haut (7), passer par un même point 0.

Ce nombre est diminué de deux unités, si le point de S^n est un point de la courbe G^{mn}; il est moindre de quatre unités, si le point 0 est, en outre, lui même un point de G^{mn}.

Si la courbe a d points doubles et r points de robroussement, le nombre de sections tangentes est $[nm(n+m-2)-2d-3r]$.

19. D'après ce qu'on a demontré ci-dessus (13), la surface $\sum^{(n+m-2)}$, dont les points de rencontre avec G^{mn} sont les points conctat des plans tangents à cette courbe, issus d'une droite a O, est le lieu d'un point, dont les plans polaires, relatifs aux deux surfaces S^n, S^m, se coupent suivant une droite qui rencontre a O, en d'autres termes, quand un point se meut sur la droite a O, ses surfaces premières polaires, relatives a S^n et S^m, se coupent sur une courbe gauche $G^{(n-1)(m-1)}$, dont le lieu est la surface $\sum^{(n+m-2)}$.

Or, il est aisé devoir que la même définition peut s'appliquer, dans la théorie des courbes planes, a la courbes planes, à la courbe *polaire premiere* d'un point a, relative à une courbe C^m.

On peut donc, par une extension fort légitime, appeler *courbe gauche polaire de la droite* a O, sur S^n, *relative à la courbe gauche* G^{nm}, la courbe $\Gamma^{n(n+m-2)}$, suivant laquelle la dite surface coupe S^n.

Cette courbe passe par les points de contact des sections planes tangentes à G^{nm} menées par a O, et par les points doubles de G^{nm}, si cette courbe en possède Bref, sans entrer dans une énumération fastidieuse, elle jouit de toutes les propriétés de son homonyme, relatives au conctact des sections planes de la courbe G^{nm}.

20. Ce qui établit entre ces deux courbes une différence notable, c'est que *les polaires gauches successives* d'une même droite, au lieu d'aller en décroissant, quant à leur degré, vont au contraire en augmentant, de la manière suivante: $n(n-2+m)$; $n[2(n-2)+m]$; $n[3(n-2)+m]$, et ainsi de suite. Pour qu'elles aillent en diminuant, il faut que $n=1$, c'est a dire qu'il s'agisse de courbes planes. Il est pourtant un cas remarquable, où leur degré reste stationnaire, c'est celui ou $n=2$; la polaire est alors, comme la courbe gauche G^{2m}, du degré $2m$. Il s'ensuit que les

points, où elle rencontre G^{2m}, forment la base d'un faisceau de courbes du même ordre (4). Donc, *quand une courbe d'ordre pair est tracée sur une surface du second degré, les points de contact des plans tangents qu'on peut lui mener, par une droite quelconque, forment la base d'un faisceau du même ordre;* théorème énoncé par M. Chasles dans le mémoire précité § 23.

Les surfaces du second ordre jouissent seules, comme on voit, de cette propriété.

21. Les *courbes gauches polaires* donnent lieu aux deux théorême suivants, qui sont susceptibles d'applications utiles, savoir:

1° *Les courbes gauches polaires d'une même droite, relatives a toutes les courbes d'un faisceau* (G^{mn}), *forment elles-mêmes un faisceau, et correspondent anharmoniquement à ces courbes.*

2° *les courbes gauches polaires, relatives à une même* G^{nm}, *de toutes les droites contenues dans un plan donné et passant par un point de ce plan, forment un faisceau et correspondent anharmoniquement à ces droites.*

On voit on effet, sans aucune difficulté, que, dans l'un et l'autre cas, il ne passe, par un point quelconque de l'espace, qu'une surface $\sum^{n+m-2}$, et par conséquent qu'une seule courbe gauche polaire par un point donné sur S^n, qui satisfassent à la question ce qui, d'aprés (4), suffit pour prouver que ces surfaces, ou les courbes qui en dérivent, forment un faisceau.

22. *La perspective d'une courbe gauche* G^{nm} *sur un plan, est une courbe du degré* $n\,m$, *qui a* $\frac{1}{2}\,n\,m\,(n-1)\,(m-1)$ *points doubles;*

En d'autres termes, le cône mené par une courbe gauche G^{nm} *a*, en général, $\frac{1}{2}\,n\,m\,(n-1)\,(m-1)$ arétes doubles.

En effet, d'après la formule qui établit une relation entre le degré, la classe et le nombre D des arêtes doubles d'un cône, qui n'a pas d'arêtes de rebroussement, il vient, en ayant égard à (18),

$$D=\frac{1}{2}\left[mn\,(mn-1)-mn\,(m+n-2)\right]=\frac{1}{2}\,mn\,(m-1)\,(n-1).$$

23. On conclut aussi très-aisément, de ce même théorème (18), que *quand trois surfaces* S^p, S^q, S^r, *ont une courbe gauche commune* G^{nm}, *elles se coupent en*

$$\left[p\,q\,r-nm\,(p+q+r-2)+nm\,(n+m-2)\right]$$

points, non situés sur cette courbe commune. (voir le mémoire de M. Salmon, intitulé: *on the degree of the surface reciprocal to a given one;* tome XXIII des transactions de l'académie royale d'Irlande, pages 484, 485).

PLANS OSCULATEURS À UNE COURBE GAUCHE G^{nm}.

24. Le nombre des plans osculateurs qu'on peut mener à G^{nm}, par un point quelconque O, est évidemment égal au nombre des plans tangents stationnaires du cône, de degré *mn*, qui a la courbe pour base et le point O pour sommet. Les for-

mules de M. Plücker, relatives aux courbes planes, étant directement applicables aux surfaces coniques, on aura immédiatement, pour le nombre cherché $N = 3\,mn\,(mn - 2)$ — six fois le nombre des arêtes doubles du cône; car il ne possède pas, par hypothèse, d'arêtes des rebroussement. Or le nombre des arêtes doubles est (22) $\frac{1}{2}\,nm\,(n - 1)\,(m - 1)$. Donc $N = 3\,mn\,(m + n - 3)$.

Autrement. Menons un plan arbitraire M, par le point O. Les droites de ce plan, qui passent par le point O, ont pour courbes polaires gauches, des courbes $G^{n(n+m-2)}$, qui forment un faisceau (21-2°). Quand une de ces courbe touche G^{nm} en un point, la section plane, déterminée par la droite correspondante du plan M et par ce point, touche G^{nm} en ce point par un double contact; donc c'est un des plans osculateurs menés par le point O. Or il y a, dans le faisceau (16), $mn\,(3m + 3\,n - 8)$ courbes qui touchent G^{nm}. Mais il y en a d'étrangères à la question, savoir les mn, relatives aux droites qui joignent le point O aux points ou le plan M coupe G^{nm}. Donc il en reste $3mn\,(m + n - 3)$; ce qui confirme le résultat obtenu ci-dessus par une autre méthode.

25. Le nombre précédente doit être diminué de trois unités, si le point O est pris sur la courbe, et qu'on fasse abstraction des plans osculateurs au point O lui même. On voit en effet que, si c, d, o, a, b, sont cinq points consécutifs de la courbe, le point O appartient aux trois plans osculateurs infiniment voisins

$$c\,d\,o,\quad d\,o\,a,\quad o\,a\,b.$$

En général, le nombre des plans osculateurs est diminué de six unités pour chaque point double de G^{nm}, et de huit unités pour chacun de ses points de rebroussement; la formule relative aux tangentes d' inflexion des courbes planes leur étant applicable. Et, si le point O est placé en un point double, ou en un point de rebroussement, la diminution est de neuf ou onze unités respectivement.

DÉVELOPPABLE OSCULATRICE *A' LA COURBE* G^{nm}.

26. L'*ordre* de la développable est égal au nombre des tangentes de la courbe qui s'appuient sur une droite; donc à

$$n\,m\,(n + m - 2) - 2\,d - 3\,d' \qquad (18);$$

car le nombre de ces tangentes est égal à celui des plans tangents qu'on peut mener à G^{nm} par la droite, d et d' expriment, respectivement, les nombres des points doubles et de rebroussement de la G^{nm}, quand elle en possède.

27. La *classe* de la surface développable, c'est-à-dire le nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par un point, est egal au nombre des plans osculateurs de G^{nm} qui passent par ce point; donc la classe est

$$3\,n\,m\,(n + m - 3) - 6\,d - 8\,d'.$$

PROPRIÉTÉ DES SECTIONS PLANES DE LA DÉVELOPPABLE

OSCULATRICE A' LA COURBE G^{nm}.

28. Les formules, obtenues ci dessus (26) et (27), permettent de déterminer immédiatement, avec l'aide des formules de M. Plücker, toutes les particularités d'une section plane $\sum$ de la développable osculatrice, comme l'ont fait MM. Cayley, et G. Salmon dans deux excellents mémoire, insérés au tome X du *Journal de Liouville, et dans le Journal de Cambridge et Dublin; livraison de fevrier* 1850.

29. 1° *L'ordre* de la courbe est celui de la développable, $nm(n+m-2)$.

2° *La classe* est le nombre des tangentes qu'on peut lui mener par un point; ces tangentes sont les traces, sur le plan coupant, des plans tangents à la développable, ou plans osculateurs à la courbe gauche, qu'on peut mener par le point; conséquemment leur nombre, ou la classe de la courbe, est $3nm(n+m-3)$; en supposant que la courbe G^{nm} n'ait pas de points multiples.

3° Les points de rebroussement de la courbe $\sum$ sont les points de rencontre de la courbe gauche par le plan sécant; leur nombre est donc mn.

4° D'après cela, la formule de M. Plücker, qui établit une relation entre l'ordre, la classe et les nombres des points doubles et de rebroussement, donne pour le nombre des points doubles cherchés,

$$2D = mn(m+n-2)\left[mn(m+n-2)-1\right] - 3\,mn(m+n-3) - 3\,mn,$$

d'où
$$D = \tfrac{1}{2}mn\left(mn(m+n-2)^2 - 4(m+n)+8\right).$$

5° Le nombre des *tangentes d'inflexion* de la courbe $\sum$ est donné pour la formule connue relative à ces tangentes; donc on aura ici

$$T' = 3\,mn(m+n-2)\left[mn(m+n-2)-2\right] - 3\,mn\left[mn(m+n-2)^2 - 4(m+n)+8\right] - 8\,mn = mn\left[6(m+n)-20\right].$$

C'est, en d'autres termes, le nombre de *plans osculateurs stationnaires* de la courbe gauche G^{nm}, c'est-à-dire qui ont un contact du 3e ordre avec G^{nm}.

6° Quant aux droites, qui, étant chacune l'intersection de deux plans osculateurs de G^{nm}, sont situées dans un même plan, leur nombre est le même que celui des tangentes doubles de la section plane $\sum$. Or, en appellant T ce nombre, on a, par la 3e formule de M. Plücker,

$$2T = 3\,mn(m+n-3)\left[3\,mn(m+n-3)-1\right] - mn(m+n-2) - 3\,mn\left[6(m+n)-20\right].$$

Donc
$$T = \tfrac{1}{2}mn\left[9\,mn(m+n-3)^2 - 22(m+n)+71\right].$$

30. Si la courbe donnée G^{nm} possédait des points doubles et des points de rebroussement, les nombres di-dessus subiraient une modification qu'il est aisé de cal-

culer, en remarqant que, pour obtenir ces nouveaux nombres, il suffit de substituer les nombres $[nm(n+m-2)-2d-3d']$ et $[3nm(n+m-3)-6d-8d']$, respectivement, à ceux $nm[n+m-2]$ et $3nm(n+m-3)$, qui sont entrés seuls, avec le nombre nm (qui exprime le degré de la courbe) dans la composition des formules précédentes.

PROPRIETÉS DU CÔNE MENÉ PAR LA COURBE G^{nm} *ET AYANT SON SOMMET EN UN POINT QUELCONQUE DE L'ESPACE.*

31. *L'ordre* du cône est le même que celui de la courbe : nm. Sa *classe* est le nombre des plans tangentes qu'on peut lui mener par une droite quelconque partant du sommet: ces plans sont tangentes à la courbe gauche. Donc la classe du cône est $mn(m+n-2)$. Les *plans d'inflexion* du cône sont les plans osculateurs de la courbe, qui passent par le sommet du cône. Leur nombre est donc

$$3\,mn\,(m+n-3).$$

Les *plans tangentes doubles*, qui coupent S^n suivant des sections doublement tangentes à G^{mn}, correspondantes aux tangentes doubles des courbes planes, sont au nombre de

$$\tfrac{1}{2}mn(mn-2)(m^2n^2-9)-mn(m-1)(n-1)[mn(mn-1)-6]$$
$$+\tfrac{1}{2}mn(m-1)(n-1)[mn(m-1)(n-1)-2]=\tfrac{1}{2}mn[mn(m+n-2)^2-10(m+n)+28].$$

Enfin ses *arêtes doubles* sont, comme on l'a vu plus haut (22), au nombre de

$$\tfrac{1}{2}\,nm\,(n-1)\,(m-1).$$

COURBE NODALE SUR LA DEVELOPPABLE OSCULATRICE A' UNE COURBE G^{nm}. (1)

32. On appelle courbe *double* ou *nodale* la courbe lieu des points dans lequels se rencontrent, deux à deux, les géneratrices de la surface.

La courbe d'intersection de la developpable par un plan, et en général, par une surface quelconque, a un *point double* ou *noeud*, en chaque point situé sur la courbe nodale.

Il s'ensuit que l'ordre de cette courbe est marqué par le nombre des points doubles d'une section plane de la surface développable. L'ordre de la courbe nodale est donc (29. 4°) $\frac{1}{2}nm[nm(n+m-2)^2-4(n+m)+8]$. Cette courbe rencontre chaque génératrice de la développable en $nm(n+m-2)-4$ points.

(1) Dans ce paragraphe et dans plusieurs autres, j'ai suivi, pour le classement des matières, l'ordre adopté par M. Chasles dans son, *Mémoire sur les courbes tracée à la surface de l'hyperboloide, à une nappe*, et j'ai employé ses expressions et définitions, quand le sujet m'a permis de le faire. Indépendamment des motifs particuliers à la circonstance, il me semble que l'uniformité dans les termes destinés à désigner une même chose, ne peut être que profitable aux progrès de la science, et qu'en mathématiques, comme ailleurs, il faut s'abstenir d'un néologisme qui n'est pas justifié par la nouveauté du sujet.

Car un plan, mené par une tangente de G^{nm}, coupe la surface développable osculatrice suivant une courbe d'ordre $nm(n+m-2)-1$, qui a une inflexion sur la tangente, et par conséquent la rencontre en $nm(n+m-2)-4$ autres points. Ces points appartiennent à autant de génératrices de la développable, c'est-à-dire de tangentes à la courbe gauche: Ainsi $nm(n+m-2)-4$ exprime le nombre des tangentes de G^{nm}, qui rencontrent une autre tangente quelconque, ce qui, d'après la definition de la courbe nodale, justifie la proposition énoncée.

Les points de la courbe G^{nm}, en chacun desquels le plan osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe, points dont le nombre est $mn[6(m+n)-20]$, (29. 5°), sont situés sur la courbe nodale de la développable osculatrice.

33. Les diverses déterminations, qui ont fait le sujet des paragraphes précédents, mettent en parfaite évidence ce fait, que des courbes gauches du *même degré*, et qui n'ont d'ailleurs aucune singularité, autre que celles qui sont propres à ce degré, peuvent être très différentes les unes des autres, selon les dégres respectifs des surfaces dont elles sont les intersections, et qu'ainsi les courbes gauches offrent des *espèces* distinctes dans le même degré, lors même qu' elles sont les intersections complètes de deux surfaces, tandis que, dans les mêmes circonstances, les courbes planes ne présentent que des *variétés* dans un même degré.

Par exemple, une courbe gauche du 36e, degré peut être l'intersection *complète* de deux surfaces,

1° l'une du 18e, et l'autre du 2e degré;
2° l'une du 12e, l'autre du 3e degré;
3° l'une du 9e, l'autre du 4e degré;
4° l'une du 6e, l'autre du 6e degré.

Dans le premier cas, on peut lui mener 36. 18 plus tangents par une droite, et 3. 36. 17 plans osculateurs par un point;

Dans le second cas, ces nombres sont, respectivement, 36. 13 et 3. 36. 12.

Dans le troisième cas, ils sont 36. 11 et 3. 36. 10;

Enfin, dans le quatrième cas, 36. 10 et 3. 36. 9.

On voit donc, sans entrer dans plus de détails, quelles différences fondamentales existent entre ces quatre *espèces* de courbes gauches *du même degré*; différences qu'on remarquerait nécessairement aussi dans les courbes de ce degré, qui seraient les intersections *partielles* de deux surfaces, si on avait à les examiner ici (1).

PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE COURBES GAUCHES.

34. *Quand deux faisceaux de courbes gauches* (G^{nm}) (G^{np}), *tracées sur* S^n, *ont*

(1) Au sujet des différences que présentent les courbes d'un même degré, selon qu'elles sont les intersections complètes ou partielles de deux surfaces, voyez 1.° le mémoire déja cité de M. G Salmon: *On the classification of the curves of double curvature*: 2.° en ce qui touche notamment les courbes du

un point fondamental commun a, *il existe trois courbes du premier faisceau, qui sont osculatrices à trois courbes du second faisceau.*

Car les courbes des deux faisceaux, qui se touchent en a, se correspondent anharmoniquement, et engendrent une courbe gauche $G^{n(m+p)}$, doueé d'un point triple en a. Or si une courbe G^{nm} est osculatrice d'une G^{np}, au point a, leur troisième point commun, infiniment voisin du point a, devra se trouver sur $G^{n(m+p)}$; ainsi ces deux courbes se confondront, respectivement, avec les courbes osculatrices en a d'une des branches de $G^{n(m+p)}$. Cette courbe n'a que trois branches passant en a; donc il ne peut y avoir que trois G^{nm} et trois G^{np}, satisfaisant a la condition de lui être osculatrices en ce point. Donc etc.

35. Si dans le théorème précédent, on fait $p = 1$, on a ce théorème:

Dans un faisceau de G^{nm}, *une droite étant menée par un point fondamental, il existe trois courbes, dont les plans osculateurs en ce point passent par la droite.*

36. *Quand les courbes d'un faisceau de* G^{nm}, *sont tangentes entre elles, en un point fondamental, il existe une courbe qui, au lieu d'être tangente aux autres, a un point double en ce point.*

37. *Dans un faisceau de* G^{nm}, *qui ont toutes un point double en un point fondamental, le couples de tangentes à ces courbes en ce point sont en involution ; et il y a deux courbes qui ont un rebroussement en ce point.*

38. La considération de sphères concentriques, ayant leur centre en un point donné, et des courbes sphériques G^{2n}, qu'elles interceptent sur S^n, conduit au théorême suivant, qui a son équivalent dans la théorie des courbes planes:

Par un point donné, on peut, en général, mener $mn(m+n-1)$ *plans normaux à une courbe gauche* G^{nm}.

39. *Le lieu des points de contact des courbes de deux faisceaux* (G^{nm}), (G^{np}), *est une courbe* $G^{n(n+2m+2p-4)}$, *du degré* $n(n+2m+2p-4)$ *qui passe par les* $n(m^2+p^2)$ *points qui forment les bases des deux faisceaux.*

40. Si l'on fait $p = 1$, dans le théorème précédent, on a celui-ci: *Le lieu des points de contact des plans d'un faisceau* (ou des section planes formant un faisceau sur S^n) *avec les courbes d'un faisceau* G^{nm}, *est une courbe gauche* Γ *du degré* $n(n+2m-2)$.

Cette courbe passe par les nm^2 points qui forment la base de (G^{nm}), et par les n points d'intersection de S^n avec la droite L, axe du faisceau.

Ce théorême résulte aussi directement de (21. 1°) et (9. 2°).

41. On en conclut ensuite, en considèrant les courbes Γ, Γ', relatives à deux

---

quatrième ordre, Un intéressant mémoire de M. L. Cremona, inséré dans le tome IV des des *Annali di Matematica pura ed applicata*, sous le titre: *Intorno alla curva gobba del quartoordine;* et 3.° un mémoire de M. Chasles sur le même sujet, inséré, à la date du 4 novembre 1861, dans le tome LIII des *Comptes-Rendus*.

*

droites L, L' menées arbitrairement par un même point o, que: *le nombre des points doubles d'un faisceau de courbes gauches* (G^{nm}), *est en général,*

$$\Delta = n\left[(n+2m-3)^2 - (m-1)(m+2n-3)\right].$$

Car les deux courbes Γ, Γ' se coupent en $n(n+2m-2)^2$ points qui satisfont à la question, à l'exception: 1º des mn^2 points de la base du faisceau (G^{nm}); 2º, des $n(n+2m-3)$ points de contact du faisceau avec le plan $L\,o\,L'$; 3º des $n(n-1)(2m-1)$ points de rencontre des $n(n-1)$ tangentes, menées dans ce plan à S^n, avec la courbe C^{2m-1}, qui est, dans ce plan, le lieu des points de contact des tangentes, menées par le point o aux courbes planes C^m, suivant lesquelles le plan $L\,o\,L'$ coupe le faisceau des surfaces S^m, d'où proviennent les courbes gauches G^{nm}.

Autrement. Dans l'état de généralité où se trouvent, par hypothèse, la surface S^n, et les surfaces S^m, les seuls points doubles dont peuvent être donées les courbes gauches G^{mn}, ne peuvent provenir que de celles des surfaces S^m, qui touchent S^n (8). Or, il y a $\left[n(n+2m-3)^2-(m-1)(m+2n-3)\right]$, surfaces S^m, qui sont dans ce cas; tel est donc aussi le nombre des points doubles du faisceau. La première démonstration est néammoins plus satisfaisante.

42. Si $m=n$, la formule se simplifie beaucoup; elle se réduit à

$$\Delta = 6\,n\,(n-1)^2.$$

43. *Le nombre des points où les courbes des deux faisceaux ont entre elles un contact du second ordre est*

$$N = n\left[n^2 + 3(m^2+p^2) + 6n(m+p) + 12mp - 12n - 24(m+p) + 26\right].$$

44. *Corollaire.* Si l'on suppose $p=1$, dans la formule précédente, elle devient $H = n\,(n^2 + 3\,m^2 + 6\,mn - 12\,m - 6\,n + 5)$, et elle exprime que:

Étant donné un faisceau de courbes gauches (G^{nm}), *sur une* S^n, *et une droite, il passe, en général, par cette droite,* H *plans, dont chacun est osculateur à l'une des courbes du faisceau.*

Ce théorême, qui resulte de (43), peut aussi se démontrer en remarquant que, si l'on mène, par la droite, des plans tangents à la courbe $\Gamma^{n(n+2m-2)}$ du nº (40), ces plans, au nombre de $n(n+2m-2)(2n+2m-4)$, satisferont à la question sauf toutefois ceux qui passent. 1º par les n points fondamentaux du faisceau des sections planes, comptés deux fois; 2º par les nm^2 points qui forment la base du faisceau (G^{nm}); 3º enfin les $n(n-1)^2$ plans tangents menés à S^n par la droite; et il vient: $n\,(n+2\,m-2)\,(2\,n+2\,m-4) - 2\,n - n\,m^2 - n\,(n-1)^2 = H$, comme ci-dessus.

45. *Quand on a trois faisceaux de courbes gauches, sur une même* S^n, *savoir* (G^{nm}), (G^{np}), (G^{nr}), *le nombre des points tels, que les trois courbes qui y passent, appartenant à trois faisceaux, sont tangentes entre elles, est:*

$$T = n[4(mp + pr + rm) + 2(n - 4)(m + p + r) - 4n + 10].$$

c'est une conséquence de (39) et de (41).

PROPRIÉTÉS RELATIVES À UNE RÉSEAU DE COURBES GAUCHES.

46. Les réseaux de courbes gauches jouissent des propriétés générales des réseaux de courbes planes ou de surfaces, et notamment des suivantes, qui nous seront utiles, et dont la première de leur definition même (5).

1°. *Parmi les courbes gauches d'un réseau, celles qui passent par un même point forment un faisceau.*

2°. *Deux faisceaux, appartenant à une même réseau, ont une courbe commune.*

47. Cela posé, *les courbes gauches polaires* $\Gamma^{n(n+m-2)}$ *de toutes les droites qu'on peut mener par un point quelconque* o, *forment un réseau sur la surface* S^n, *quand elles sont relatives à une même courbe* G^{nm} *de cette surface.*

Conformément à la définition du réseau (5), il suffit de prouver qu'il ne passe qu'une seule de ces courbes par deux points a, b, pris arbitrairement sur S^n, ou, ce qui revient au même, qu'il ne passe, par ces deux points, qu'une seule surface $\sum^{n+m-2}$ genératrice de la courbe. Or, d'après la definition de ces surfaces, quand une surface $\sum^{n+m-2}$ passe par les points a et b, la droite d'intersection L des plans polaires du point a, relatifs à S^m et S^n, s'appuie sur une droite passant en O; et pareillement, la droite d'intersection L' des plans polaires du point b, relatifs aux deux surfaces S^m, S^n, s'appuie sur une droite passant en O. Ainsi la droite, dont la surface $\sum$ est la courbe gauche polaire, relative à G^{mn}, passe par le point O et s'appuie sur deux droites données L, L'; donc elle est unique, et par conséquent la surface $\sum$ et la courbe gauche qui en dérive, sont uniques aussi; ce qui démontre la proposition.

48. Soit i un point de contact de deux surfaces du réseau. Il y en a une infinité d'autres qui se touchent en i (46. 1°), et parmi elles il y en a une qui possède un point double en i (36). Donc *le lieu des points de contact des courbes gauches polaires, relatives aux droites qui passent en* O, *est aussi le lieu de leurs points doubles.*

Par des motifs identiques à ceux qui se présentent dans la théorie des courbes planes, ce lieu n'est autre chose que celui des points de contact de deux faisceaux quelconques du reséau; donc c'est une courbe gauche du degré

$$n[n + 4(n + m - 2) - 4] = n(5n + 4m - 12).$$

Mais les deux faisceaux ont une courbe commune (46. 2°), qui est étrangère à la question. Le lieu est donc une courbe $\Phi^{n(4n+3m-10)}$ du degré $n(4n + 3m - 10)$.

49. *La courbe* Φ *passe par les points doubles de la proposée* G^{nm}, *quand celle-ci en possède.* Car la courbe gauche polaire de toute droite menée par un point double

de G^{nm}, a elle-même un point double en ce point (19). On peut donc, par un double motif, donner à la courbe Φ le nom de *courbe nodale* relative à la courbe G^{nm}, ainsi qu'on l'a fait, dans la théorie des courbes planes, pour une courbe qui jouit de propriétés analogues.

50. *La courbe nodale Φ passe par tous les points de G^{nm}, tels que les plans osculateurs à la courbe en ces points passent en* O.

Soit i un point qui jouit de cette propriété ; je dis que la courbe Φ y passe. En effet, quand une section plane $O\,a\;b\;i$ de S^n, touche la courbe G^{nm} en i, par un simple contact, toutes les droites menées par le point O dans ce plan, telles que Oa, Ob, Oc, . . . etc. ont, pour courbes gauches polaires, des courbes qui passent simplement par le point i. Mais quand la section $O a b i$ est osculatrice de G^{nm} au point i, ces courbes ont toutes un contact simple avec G^{nm} au point i, et par conséquent elles se touchent en ce point ; Donc ce point se trouve sur la courbe Φ. Les points de contact des plans osculateurs issus du point O, se trouvent donc parmi les

$$mn\,(4\,n - 3\,m - 10),$$

points de rencontre des courbes Φ et G^{nm}. Mais tous ne satisfont pas à la question. Il faut en déduire les $mn\,(n-1)$ points de rencontre de cette courbe et de la courbe du contour apparent de la surface S^n, vue du point O. Car chacun de ces points α jouit aussi de la propriété, que la section plane de S^n, contenue dans le plan tangent $O\alpha t$, section qui a un point double au point α, a, en ce point, trois points consécutifs communes avec la courbe G^{nm}; et pourtant le plan osculateur en ce point ne passe pas, en général, par le point o, qui est pris arbitrairement. Donc enfin, il résulte de cette analyse, que le nombre des plans osculateurs de G^{nm}, qui passent en O est:

$$mn\,(4\,n + 3\,m - 10) - mn\,(m-1) = 3\,mn\,(m+n-3), \qquad (*)$$

ainsi qu'on l'a démontré de deux autres manières (24).

51. Le lecteur remarquera que toutes les formules précédentes s'appliquent aux courbes planes, en y faisant $n = 1$; et que les procédés de démonstration et d'investigation conviennent également à ces courbes.

Il me semble donc que le voeu émis par M. Chasles, dans la note citée au début du présent mémoire, se trouve a peu près rempli, du moins dans les limites où j'ai tout d'abord eviconscrit la question.

Golfe du Mexique, 21. Octobre 1862.

(*) On peut encore démontrer ce théorème d'une quatrième manière. En effet, la perspective de la courbe G^{nm} sur un plan, est une C^{nm} plane, qui a $\frac{1}{2}\,mn\,(m-1)\,(n-1)$ points doubles (22) donc qui a $3\,mn\,(mn-2) - mn\frac{(m-1)\,(n-1)}{2} = 3mn\,(m+n-3)$ tangentes d'inflexion. Or, chacune de ces tangentes corréspond à un plan osculateur de la courbe gauche, mené par le centre de la perspective. Cette propriété de la courbe gauche est une de celles en très petit nombre, qu'on pourrait démontrer par cette voie.

SUR UN TRIPLE SYSTÈME PARTICULIER DE SURFACES ORTHOGONALES.

PAR M. EDOUARD COMBESCURE

DOCTEUR-ÈS-SCIENCES



Dans la plupart des traités élémentaires d'analyse on donne, comme application du problème des trajectoires orthogonales, l'exemple des courbes paraboliques ou hyperboliques renfermées dans l'équation $x^m y^n = a$. On peut se proposer, à l'égard des surfaces paraboliques ou hyperboliques comprises dans l'équation $x^m y^n z^p = \gamma$, où γ est le paramètre variable, la question de trouver les surfaces qui leur sont orthogonales, ce qui n'offre pas la moindre difficulté. Or il arrive ici qu'il existe deux séries de ces surfaces orthogonales qui sont en même temps orthogonales entr'elles; de façon que, en vertu du théorème de M. Dupin, elles s'entrecoupent suivant leurs mutuelles lignes de courbure. La détermination d'un triple système orthogonal offrant en général de très-grandes difficultés, je présente le calcul suivant à cause de son extrême simplicité.

§ I.

Soit, en coordonnées rectangulaires,

$$x^m y^n z^p = \gamma$$

l'équation d'une famille de surfaces paraboliques ou hyperboliques au paramètre γ; et $f(x, y, z) = \alpha$ l'équation d'une surface quelconque orthogonale aux proposées. En désignant par S une somme symétrique par rapport à x, y, z, on devra avoir

$$S \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\gamma}{dx} = 0:$$

c'est-à-dire ici

$$\frac{m}{x} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{n}{y} \frac{d\alpha}{dy} + \frac{p}{z} \frac{d\alpha}{dz} = 0,$$

d'où l'on tire pour f ou α une fonction arbitraire de u et v, en prenant

$$\frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{p} = 2u, \qquad \frac{y^2}{n} - \frac{z^2}{p} = 2v.$$

Maintenant pour que les surfaces $\alpha = f(u, v)$, $\beta = \varphi(u, v)$, qui sont orthogonales aux proposées, quelles que soient les formes f et φ, soient orthogonales entr'elles, il faudra que l'on ait

$$S \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du}\,S\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{dv}+\frac{d\alpha}{dv}\frac{d\beta}{du}\right)S\,\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\frac{d\alpha}{dv}\frac{d\beta}{dv}\,S\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=0.$$

Or des expressions de u et v on tire

$$S\left(\frac{du}{dx}\right)^2=\frac{x^2}{m^2}+\frac{z^2}{p^2}=\frac{2u}{m}+\frac{(p+m)z^2}{m\,p^2}$$

$$S\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=\frac{2v}{n}+\frac{(p+n)z^2}{n\,p^2}$$

$$S\,\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}=\frac{z^2}{p^2}.$$

En substituant dans l'équation précédente et observant que α et β ne doivent dépendre que de u et de v, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$\frac{u}{m}\,\frac{d\alpha}{du}\,\frac{d\beta}{du}+\frac{v}{n}\,\frac{d\alpha}{dv}\,\frac{d\beta}{dv}=0,$$

$$\frac{p+m}{m}\,\frac{d\alpha}{du}\,\frac{d\beta}{du}+\frac{p+n}{n}\,\frac{d\alpha}{dv}\,\frac{d\beta}{dv}+\frac{d\alpha}{du}\,\frac{d\beta}{dv}+\frac{d\alpha}{dv}\,\frac{d\beta}{du}=0.$$

Si l'on élimine le rapport $\frac{d\alpha}{du}:\frac{d\alpha}{dv}$ entre ces dernières équations, on obtient

$$\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{n+p}{n}-\frac{m+p}{n}t\right)\frac{d\beta}{du}\,\frac{d\beta}{dv}-\frac{m}{n}t\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2=0$$

où l'on a posé $v=ut$.

Da cette équation on tire

$$\frac{d\beta}{du}:\frac{d\beta}{dv}=S\pm\sqrt{\left(s+\frac{m}{m+p}\right)^2+\frac{mp\,(m+n+p)}{n\,(m+p)^2}}$$

en faisant, pour abréger,

$$s=\frac{m+p}{2n}\,t-\frac{n+p}{2n}.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\left(s+\frac{m}{m+p}\right)^2+\frac{mp\,(m+n+p)}{n\,(m+p)^2}}=s+\frac{m}{m+p}+\frac{(m+n+p)\,\theta}{n\,(m+p)}$$

il en résulte

$$s+\frac{m}{m+p}=\frac{mnp-(m+n+p)\,\theta^2}{2\,n\,(m+p)\,\theta},$$

$$\sqrt{\left(s+\frac{m}{m+p}\right)^2+\frac{mp\,(m+n+p)}{n\,(m+p)^2}}=\frac{mnp+(m+n+p)\,\theta^2}{2\,n\,(m+p)\,\theta},$$

$$t=\frac{(p-\theta)\,[mn+(m+n+p)\theta]}{(m+p)^2\,\theta},$$

$$\mathrm{d}\,t=-\frac{mnp+(m+n+p)\,\theta^2}{(m+p)^2\theta^2}\,d\,\theta.$$

En vertu de ces relations l'équation qui détermine $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}$ donnera, pour le cas du signe supérieur,

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}=\frac{m\,(p-\theta)}{(m+p)\,\theta},$$

et, pour le cas du signe inférieur,

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}=-\frac{mn+(m+n+p)\,\theta}{n\,(m+p)}.$$

Comme on doit avoir

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=-\frac{m}{n}\,t.\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u},$$

si l'on prend pour $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}$ la valeur fournie par la première des équations précédentes, on trouvera pour $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}$ la valeur de $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}$ fournie par la seconde; ce qu'il était facile de prévoir. On peut donc adopter pour déterminer α et β les deux équations séparées

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}v}=\frac{m\,(p-\theta)}{(m+p)\,\theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}:\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=-\frac{mn+(m+n+p)\,\theta}{n\,(m+p)}.$$

Posant, pour intégrer la première,

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{(m+p)\theta}+\frac{\mathrm{d}v}{m(p-\theta)}=0,$$

ou, à cause de $v=ut$,

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{u}\left(\frac{1}{(m+p)\theta}+\frac{t}{m(p-\theta)}\right)+\frac{\mathrm{d}\,t}{m(p-\theta)}=0,$$

on aura, d'après les valeurs ci-dessus de t et de $\mathrm{d}\,t$,

$$(m+n+p)\frac{\mathrm{d}\,u}{u}=\frac{mnp+(m+n+p)\,\theta^2}{\theta(\theta+m)\,(p-\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\left(\frac{n}{\theta}-\frac{m+n}{\theta+m}+\frac{p+n}{p-\theta}\right)\mathrm{d}\theta;$$

d'où l'on conclut

$$\beta=u^{m+n+p}\,(\theta+m)^{m+n}\,(\theta-p)^{p+n}\,\theta^{-n}.$$

De même, pour déterminer α, on devra poser

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}\left(\frac{1}{n(m+p)}-\frac{t}{mn+(m+n+p)\theta}\right)=\frac{\mathrm{d}\,t}{mn+(m+n+p)\theta}$$

ou

$$-\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{[mnp+(m+n+p)\theta^2]n\,\mathrm{d}\theta}{\theta\,\{(m+n+p)\,\theta-np\}\,\{(m+n+p)\theta+mn\}}$$

$$=\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{m+n}{(m+n+p)\theta-np}+\frac{p+n}{(m+n+p)\,\theta+mn}\right)\mathrm{d}\theta\ ;$$

d'où l'on conclura

$$\alpha=u^{m+n+p}\,\{(m+n+p)\,\theta-np\}^{m+n}\,\{(m+n+p)\,\theta+mn\}^{p+n}\,\theta^{-(m+n+p)}.$$

Ainsi en résumé, on a le triple système de surfaces orthogonales,

$$\alpha=u^{m+n+p}\,\{(m+n+p)\,\theta-np\}^{m+n}\,\{(m+n+p)\,\theta+mn\}^{p+n}\,\theta^{-(m+n+p)},$$

$$\beta=u^{m+n+p}\,(\theta+m)^{m+n}\,(\theta-p)^{p+n}\,\theta^{-n},$$

$$\gamma=x^m\,y^n\,z^p,$$

aux paramètres α, β, γ. Il reste à introduire dans ces équations la valeur de θ en x, y, z et aussi celle de u qui est $\frac{x^2}{2m}-\frac{z^2}{2p}$. D'après les rélations posées précédemment on a

$$\frac{2\,(m+n+p)\,\theta}{m+p}=-(m+p)\,t+\frac{p\,(m+n+p)-mn}{m+p}$$

$$+\sqrt{(m+p)^2\,t^2-2\,\{p\,(m+n+p)-mn\}\,t+(n+p)^2},$$

ce qu'on peut écrire, si l'on veut,

$$\frac{2(m+n+p)\theta}{m+p}=\left[\sqrt{-\frac{(m+p)\,t}{2}+\frac{(\sqrt{p(m+n+p)}+\sqrt{-mn})^2}{2\,(m+p)}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{-\frac{(m+p)\,t}{2}+\frac{(\sqrt{p(m+n+p)}-\sqrt{-mn})^2}{2(m+p)}}\right]^2$$

où l'on doit mettre pour t sa valeur $\frac{v}{u}$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{y^2}{n}-\frac{z^2}{p}\right):\left(\frac{x^2}{m}-\frac{z^2}{p}\right)$$

Les paramètres α, β, γ sont exprimés directement en fonction de x, y, z; mais la détermination de x, y, z en fonctions de α, β, γ dépend d' équations qui ne sont pas résolubles algébriquement quand m, n, p restent indéterminés. Ainsi, en divisant α par β, on aura une équation à la seule inconnue θ. Quand on l'aura résolue, u s'en suivra sans difficulté et il en sera de même de v. Ayant ainsi u et v en fonctions de α, β on aura à résoudre l'équation

$$\left(2u+\frac{z^2}{p}\right)^m\left(2v+\frac{z^2}{p}\right)^n z^{2p}=m^{-m}n^{-n}\gamma^2,$$

qui donnera z en fonction de α, β, γ. Les expressions de x et y en résulteront tout de suite.

§ II.

Je vais examiner avec quelques détails le cas particulier où deux des exposants m, n, p sont égaux à 1 et le 3me à -1. Alors en changeant un peu la notation, on peut prendre pour les trois séries de surfaces orthogonales

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}&=2\alpha,\\ \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}&=2\beta,\\ \frac{xy}{z}&=2\gamma.\end{aligned}\right.$$

La 3me est un paraboloide hyperbolique. La 2me le lieu des points dont la différence des distances aux axes Ox, Oy est constante. Pour la 1re c'est la somme des mêmes distances qui est constante.

On sait que l'Académie de Bruxelles a proposé, en 1860, pour le concours de 1862, la question de « trouver l'intégrale de l'équation des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante » (voir les *Ann. de M. Terquem*, t. XX, p. 152). Ce lieu géométrique, dans le cas où les deux droites sont rectangulaires, a été l'objet d'une étude particulière à la page 57 du volume cité. J'ignore si la question des lignes de courbure a été résolue pour un angle quelconque des droites. Quand l'angle est droit la solution est une conséquence de la triple orthogonalité du système ci-dessus. Cette orthogonalité peut se vérifier ici, si on le désire, et l'on trouve tout de suite

$$S\,\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}=0,\qquad S\,\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dx}=0,\qquad S\,\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx}=0.$$

Si l'on désigne indifféremment par $a\sqrt{2}$ le paramètre 2α ou 2β les deux premières des équations (a) donnent, par l'évanouissement des radicaux, l'équation unique

$$a^4 + \frac{1}{4}(x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 2\,a^2\,z^2,$$

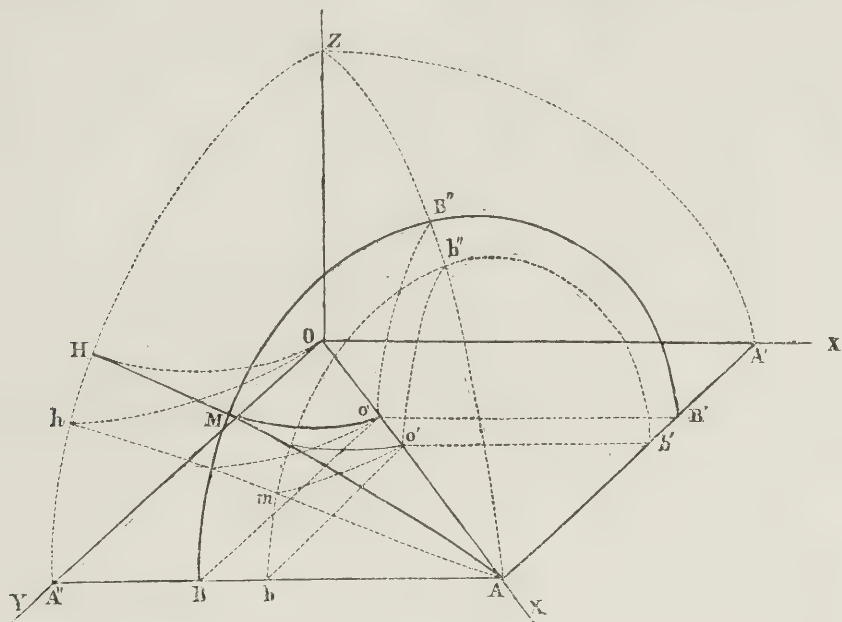
qui rapportée aux bissectrices des angles des axes Ox, Oy peut s'écrire

$$(a^2 - x'^2)(a^2 - y'^2) = 2\,a^2\,z^2$$

et montre que la surface coupe le plan horizontal xy suivant un carré, au côté $2a$, qu'elle recouvre symétriquement par dessus et par dessous de façon à former une espèce de coussin carré deux fois plus large dans le sens des diagonales qu'épais dans le sens des z. A chaque sommet du coussin est adapté une sorte de *paraboloïde elliptique* dont l'axe fait suite à la diagonale correspondante du carré et l'ouverture est tournée en dehors. Ces pseudo-paraboloïdes remplissent respectivement de leur projection chacun des angles formés par les prolongements des côtés du carré; tandis qu'ils ne se projettent jamais dans les bandes infinies formées par les côtés opposés. Un coussin représente une surface individuelle (α). Quand α varie de zero à α le coussin, d'abord réduit à un point (l'origine), se dilate progressivement en restant semblable à lui même, de façon à donner lieu à une suite de couches semblables d'épaisseur infiniment petite, mais jamais nulle. Les quatre nappes qui s'ouvrent aux coins d'un carré représentent une surface individuelle (β), ou plus exactement les deux nappes qui partent de deux sommets opposés, suivant la diagonale, correspondent à la valeur $+\beta$ et les deux autres à la valeur $-\beta$. Quand β varie de 0 à $+\infty$ la surface d'abord confondue avec les plans indéfinis des zx', zy' se rétrecit progressivement dans le sens vertical et finit par se confondre avec les angles droits mobiles qui lui servent de base sur le plan horizontal et qui sont eux-mêmes alors transportés à l'infini dans deux sens opposés. Une surface individuelle (α) est rencontrée par toutes les surfaces β pour lesquelles $\pm\beta < \alpha$. Si $\pm\beta = \alpha$ la rencontre est réduite aux quatre sommets du carré (α); et si $\pm\beta > \alpha$ il n'y a plus de rencontre. Quant au paraboloïde, qui traverse le plan horizontal suivant les droites Ox, Oy quelque soit γ, il coupe toujours les deux autres séries de surfaces. Lorsque γ varie de zéro à l'infini le paraboloïde, d'abord confondu avec les plans indéfinis zOx, zOy, se rapproche successivement du plan xy et finit par se confondre avec les deux angles xOy opposés par le sommet. Pour des valeurs négatives de γ on a un paraboloïde *renversé* et *retourné* d'un angle droit. Les deux paraboloïdes $(+\gamma)$ et $(-\gamma)$ coupent la surface (α) suivant une espèce de carré curviligne dont deux côtés opposés sont au dessus du plan horizontal xy et les deux autres au dessous. En résumé les limites des paramètres sont:

	α	β	γ
	0 $\quad +\infty, \; -\infty$	$+\infty, \; -\infty$	$+\infty$

avec la condition $\pm\beta \leqq \alpha$, pour que (α) et (β) se coupent effectivement.



La figure ci-jointe est destinée à donner une idée de l'intersection et de la forme des trois surfaces. ZOAA'A'' représente le huitième d'une surface (α) (où $OA = 2\alpha$) comprise entre les deux plans bissecteurs ZOX', ZOY'. ZHA'', ZA' sont deux sections elliptiques faites par ces plans. BB''B'O' représente un huitième de surface quadruple (β) ($OO' = 2\beta$) limitée à la surface (α). HMAO est un quart de paraboloïde simple limité à la même surface. Ces trois surfaces particulières se coupent au point M suivant les lignes de courbure BMB'', HMA de (α); BMB'', MO' de (β) ; HMA, MO' de (γ). Sur la figure *bb''b'o'* est une autre surface (β), *hm*AO un autre paraboloïde. Les courbes BMB''B' se reproduisent symétriquement au dessous du plan horizontal et sont fermées: elles ont pour équations

$$x^2 + z^2 = (\alpha + \beta)^2,$$

$$y^2 + z^2 = (\alpha - \beta)^2,$$

et résultent de l'intersection de deux cylindres de révolution autour de OX et OY, la somme des rayons des deux cylindres étant 2α. Les courbes HMA complètes sont des espèces de carrés curvilignes, ainsi qu'on l'a dit. Comme elles sont des lignes de

courbure du paraboloïde, ainsi que MO', il est inutile d'entrer dans d'autres détails à leur sujet.

Le système coordonné α, β, γ ètant suffisamment décrit, si l'on veut exprimer x, y, z en fonction de ces variables on aura

$$4\gamma^2 z^2 = x^2 y^2 = \{(\alpha+\beta)^2 - z^2\}\{(\alpha-\beta)^2 - z^2\}$$

d'où

$$(b)\quad \begin{cases} z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 - 2\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}, \\ y^2 = -2\alpha\beta - 2\gamma^2 + 2\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}, \\ x^2 = 2\alpha\beta - 2\gamma^2 + 2\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}. \end{cases}$$

Si l'on pose $\gamma = \varepsilon\sqrt{-1}$, ces équations donnent

$$\pm z = \sqrt{(\alpha+\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)} - \sqrt{(\beta+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)},$$

$$\pm y = \sqrt{(-1)(\alpha-\varepsilon)(\beta+\varepsilon)} + \sqrt{(-1)(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)},$$

$$\pm x = \sqrt{(\alpha+\varepsilon)(\beta+\varepsilon)} + \sqrt{(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)}.$$

On déduit aisément de ces dernières expressions

$$\left(d\,S_\alpha\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2 = 1 + \sqrt{\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}},$$

$$\left(d\,S_\beta\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2 = 1 + \sqrt{\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}},$$

$$\left(d\,S_\gamma\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\gamma}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}} - \sqrt[4]{\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}}\right)^2,$$

ce qu'on pourra conclure plus rapidement des expressions des paramètres différentiels du premier ordre $\sqrt{S\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2}$, etc. et qui sont ici

$$(c)\quad \begin{cases} h_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}}}}, \\ h_\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}}}}, \\ h_\gamma = \dfrac{}{\sqrt[4]{\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}} - \sqrt[4]{\dfrac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}}}. \end{cases}$$

La rectification des arcs S_α, S_β qui répondent aux courbes O'M, AM dépend des fonctions elliptiques. Celle de S_γ, qui répond à la courbe BM dépend des fonctions ultra elliptiques.

Le parallélipipède infinitésimal compris entre six surfaces coordonnées infiniment voisines a pour expression

$$dV = dS_\alpha\ dS_\beta\ dS_\gamma = \left(\sqrt{\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}} - \sqrt{\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}}\right) d\alpha\ d\beta\ d\gamma.$$

Si l'on intègre d'abord de $\gamma = 0$ à $\gamma = +\infty$, on aura le quart d'anneau qu'on peut se représenter comme ayant pour base BMB$''b''mb$ et pour épaisseur variable dS_α normal à cette base, la largeur étant dS_β. Si l'on intègre ensuite de $\beta = 0$ à $\beta = \alpha$ on aura la couche dont la base intérieure serait ZA$''$AB$''$Z et l'épaisseur dS_α. Enfin en intégrant de $\alpha = 0$ a $\alpha = \alpha$ on aura la seizième partie d'un coussin complet (α). Si l'on pose

$$\gamma = \beta \text{ tang } \varphi$$

on aura donc, en appellant V ce volume,

$$\tfrac{1}{16} V = \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\, d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2\varphi + \beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Le même volume peut se calculer autrement; car, d'après l'équation

$$2a^2 z^2 = (a^2 - x'^2)(a^2 - y'^2),$$

on a

$$\tfrac{1}{8}\gamma = \int_0^a \int_0^a \frac{1}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - x'^2}\ \sqrt{a^2 - y'^2}\ dx'\, dy' = \frac{a^3}{\sqrt{2}} \frac{\pi^2}{16} = \tfrac{1}{8}\pi^2 \alpha^3;$$

par conséquent

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\, d\varphi}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\pi^2 \alpha^3}{16},$$

ou, en posant $b = \alpha\sqrt{1 - k^2}$, et effectuant l'intégration par rapport à α,

$$\int_0^1 \frac{k^3\, dk}{\sqrt{1 - k^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{3\pi^2}{16}.$$

D'après le développement ordinaire de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(\frac{1.\,3.\,5.\ldots(2i-1)}{2.\,4.\,6.\ \ldots\ 2i}\right)^2 k^{2i},$$

où le coefficient de k^{2i} pour $i = 0$ est égal à 1, la relation précédente, en effectuant l'intégration par rapport à k, deviendra

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1.\,3.\,5.\ldots(2i-1)}{2.\,4.\,6.\ldots\ldots 2\,i} \cdot \frac{(2\,i+2)}{(2\,i+1)\,(2\,i+3)} = \frac{3\pi}{8}.$$

On peut obtenir par les mêmes considérations une formule de transformation intégrale assez générale. En continuant de désigner par x' et y' les coordonnées rectilignes rapportées aux bissectrices des axes primitifs Ox, Oy, on a

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \qquad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}};$$

mais en ajoutant $2\,x\,y = 4\,\gamma\,z$ à la somme des deux dernières équations (b) et ayant égard à la relation $z = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2} - \sqrt{\gamma^2+\beta^2}$, on formera une expression de $(x+y)^2$, on aura de même $(x-y)^2$; d'où, en omettant les doubles signe on tirera

$$(b')\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \sqrt{2}\,\sqrt{(\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}+\gamma)\,(\sqrt{\gamma^2+\beta^2}-\gamma)},\\ y' &= \sqrt{2}\,\sqrt{(\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}-\gamma)\,(\sqrt{\gamma^2+\beta^2}+\gamma)},\\ z &= \sqrt{\gamma^2+\alpha^2} - \sqrt{\gamma^2+\beta^2}, \end{aligned} \right.$$

ce qu'on peut transformer de diverses manières, soit en observant que

$$\sqrt{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}+\gamma} = \sqrt{\frac{\gamma+\alpha\,i}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-\alpha\,i}{2}}$$

où $i = \sqrt{-1}$, soit en posant $\alpha = \gamma \operatorname{tang}\psi$, $\beta = \gamma \operatorname{tang}\chi$, etc. Cela posé, si l'on regarde la fonction quelconque $f(x',\ y'\ z)$ comme le poids spécifique de l'élément de volume de la surface (α), on aura, en intégrant entre les mêmes limites que précédemment, la formule de transformation suivante

$$\int_0^\alpha d\,\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\infty f(x', y', z) \frac{(\alpha^2-\beta^2)\,d\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}\,\sqrt{\gamma^2+\beta^2}}$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^1\int_0^1 d\,\xi\,d\,\eta \int_0^\zeta f(a\,\xi,\ a\,\eta,\ \zeta)\ d\,\zeta:$$

dans le second membre

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\xi^2}\ \sqrt{1-\eta^2},\ a = \alpha\sqrt{2},$$

dans le premier x', y', z doivent être remplacés par leurs valeurs (b'). On remarquera spécialement le cas où f est le produit de trois fonctions qui ne dépendent que de z, y', x' respectivement, par exemple celui où il s'agirait de la détermina-

tion du centre de gravité; celui aussi où f serait égal à

$$\frac{1}{(1-\xi^2)\sqrt{1-b^2\xi^2}\,.\,(1-\eta^2)\sqrt{1-c^2\eta^2}}$$

parce qu'alors le second nombre de la formule précédente se réduit , à un facteur numérique près, au produit de deux fonctions elliptiques complètes de première espèce; etc.

Je terminerai cette étude particulière en donnant l'expression des rayons principaux de courbure des surfaces coordonnées (α), (β), (γ). En désignant par $\overset{(\beta)}{R}_\alpha$ le rayon principal de courbure de la surface (α) le long de l'arc S_β, etc. et se rappelant la formule générale

$$\frac{1}{\overset{(\beta)}{R}_\alpha} = h_\alpha \frac{d\,.\log h_\beta}{d\,\alpha},$$

(voir les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* de *M. Lamé*, pag. 41) on aura ici , d'après les valeurs particulières (c) des paramètres h_α, h_β, h_γ le tableau suivant, qui contient aussi les rayons de courbure paramétriques

$$\overset{(\alpha)}{R}_\alpha\,,\quad \overset{(b)}{R}_b\,,\quad \overset{(\gamma)}{R}_\gamma\;:$$

$$\left\{\begin{aligned}
\overset{(\alpha)}{R}_\alpha &= \frac{2\left[\gamma^2+\alpha^2+\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}\right]^{\frac{3}{2}}}{\alpha\sqrt{\gamma^2+\beta^2}},\\
\overset{(\beta)}{R}_\beta &= -\frac{2\left[\gamma^2+\alpha^2+\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}\right]^{\frac{3}{2}}}{\alpha\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}},\\
\overset{(\gamma)}{R}_\alpha &= -\frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha\left(1+\sqrt{\dfrac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}}\right)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\overset{(\alpha)}{R}_\beta &= -\frac{2\left[\gamma^2+\beta^2+\sqrt{\gamma^2+\alpha^2)\,(\gamma^2+\beta^2)}\right]^{\frac{3}{2}}}{\beta\sqrt{\gamma^2+\beta^2}},\\
\overset{(\beta)}{R}_\beta &= \frac{2\left[\gamma^2+\beta^2+\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}\right]^{\frac{3}{2}}}{\beta\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}},\\
\overset{(\gamma)}{R}_\beta &= \frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta\left(1+\sqrt{\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}}\right)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
R_\gamma^{(\alpha)} &= -\frac{2(\gamma^2+\alpha^2)}{\gamma}\sqrt[4]{\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}},\\
R_\gamma^{(\beta)} &= \frac{2(\gamma^2+\beta^2)}{\gamma}\sqrt[4]{\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}},\\
R_\gamma^{(\gamma)} &= \frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\gamma\left(\sqrt[4]{\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2+\beta^2}}+\sqrt[4]{\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}}\right)^3},
\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclura les rayons de courbure des arcs S_α, S_β, S_γ au moyen de la formule (*Coord. curv.* p. 64)

$$\frac{1}{\left(r_\alpha\right)^2}=\frac{1}{\left(R_\beta^{(\alpha)}\right)^2}+\frac{1}{\left(R_\gamma^{(\alpha)}\right)^2}$$

et des analogues.

§. III.

L'analyse du § I, à partir de l'introduction de la variable θ, laisse échapper le cas où l'on aurait

$$m+n+p=o.$$

En introduisant cette hypothèse dans les équations trouvées jusque là, on arrive sans la moindre peine au système suivant

$$\alpha^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$\beta=\frac{x^2+\frac{m}{m+n}z^2}{y^2+\frac{n}{m+n}z^2},$$

$$\gamma=\left(\frac{x}{z}\right)^m\left(\frac{y}{z}\right)^n$$

qui, pour $m=o$ reproduit les coordonnées sphériques habituelles, et, pour $m=n$, le système formé par la sphère et deux cônes orthogonaux du second degré, lequel n'est pas compris dans le système des cônes homofocaux. Si le rapport $\frac{m}{n}$ est quelconque les équations précédentes ne sont pas résolubles algébriquement par rapport à x, y, z; car la détermination de ces quantités en fonction de α, β, γ dépend de

l'équation $X = k + X^r$, où r est un nombre connu quelconque et k une quantité aussi connue.

La recherche des surfaces orthogonales entr'elles et aux sphères

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \gamma,$$

revient, comme on sait, à déterminer les cônes concentriques aux proposées et orthogonaux entr'eux ou, ce qui est la même chose, à déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur la sphère. Si l'on fait

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z},$$

on a à satisfaire à l'unique équation

$$\frac{d\alpha}{du}\left[(1 + u^2)\frac{d\beta}{du} + uv\frac{d\beta}{dv}\right] + \frac{d\alpha}{dv}\left[(1 + v^2)\frac{d\beta}{dv} + uv\frac{d\beta}{du}\right] = o.$$

ou à intégrer l'équation différentielle ordinaire

$$du\left[(1 + v^2)\frac{d\beta}{dv} + uv\frac{d\beta}{du}\right] = dv\left[(1 + u^2)\frac{d\beta}{du} + uv\frac{d\beta}{dv}\right],$$

ce qui n'est pas possible généralement quand on prend pour β (ce qui détermine la famille de courbes tracées sur la sphère) une fonction quelconque de u et de v. Dans le cas particulier où β est une fonction homogène de u et de v, on peut supposer

$$\beta = u^m f(t) = \left(\frac{x}{z}\right)^m f\left(\frac{y}{x}\right)$$

où $t = \frac{v}{u} = \frac{y}{x}$. L'équation différentielle, en faisant $u^2 = \frac{1}{w}$, se transforme dans la suivante

$$[(1 + t^2) f' - mtf]\, dw + 2\,[(mf - tf')\, w + mf)]\, dt = o$$

qui est linéaire par rapport à w. En l'intégrant par le procédé connu, et la résolvant par rapport à la constante α on aura l'expression de cette dernière fonction.

S. Etienne novembre 1862.

LETTRE de M. W. ROBERTS *à le redacteur.*

Mon chèr M.[r] Tortolini,

Dans une Note, inserée dans vos Annales n.° 4–1860, page 254. M. Brioschi a fait une reclamation de priorité, en faveur de M. Schlömilch, relativement aux deux integrales definies

$$\int_0^K \log \operatorname{sn} u \, \mathrm{d} u, \quad \int_0^K \log (1 + \mathrm{d}n \,.\, u) \, \mathrm{d} u$$

sur l'évolution desquelles, M. Sylvester avait publié une Note intéressante dans un Journal anglais. Veuillez m'excuser de rappeller au souvenir de vos lecteurs, que j'avais déjà donné dans le journal de mathématique, Tom : XI, première serie, page 471, la determination de l'intégrale definie generale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log (1 + n \sin^2 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{ou,} \quad \int_0^K \log (1 + n \operatorname{sn}^2 u) \, \mathrm{d}u$$

n étant une constante reelle quelconque admissibile. J'ai donné comme des cas particuliers de cette integrale les valeurs des intégrales

$$\int_0^K \log \operatorname{sn} u \, \mathrm{d}u, \qquad \int_0^K \log \operatorname{cn} u \, \mathrm{d}u.$$

D'après ce que M. Schlömilch a dit dans la traduction française de sa note inserée dans le Journal de M. Liouville, cahier de fevrier 1857, Jacobi avait déjà donné l'évolution de ces intégrales par des substitutions imaginaires. A l'occasion de l'article de M. Schlömilch, M. Liouville a bien voulu indiquer dans une petite note, que j'avais consideré le sujet de ces integrales dans deux mémoires inserés dans son Journal tom. XI, page 471, et tom. XII, page 455, La formule (1) de mon premier mémoire, peut être mise sous la forme interessante que voici

$$\Theta(q, x) = \sqrt{\frac{2 \mathrm{K} k'}{\pi}} \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{K}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta) \, \mathrm{d}\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}}}$$

ou Θ est le fonction jacobienne bien connue, K, K$'$ les fonctions completes aux deux modules k, k' respectivement,

$$q = \mathrm{e}^{\frac{-\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}, \quad \text{et} \quad x = \frac{\pi}{2 \mathrm{K}} \mathrm{F}(k, \varphi).$$

Dans l'autre mémoire, j'ai donné les valeurs de quelques integrales doubles definies.

Permettez moi de rappellér a votre attention qu'une des ces dernières peut se transformér d'une manière interessante, comme je l'ai montré dans le journal de mathématiques juin 1850. En effet on a

$$\int_0^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu)}}$$

$$= \frac{1}{3c^2} KK' \log\left[4b^2 c^2 (c^2 - b^2)\right] - \frac{\pi}{6c^2}(K^2 + K'^2)$$

K, K' étant les fonctions completes a modules complementaires k, k' ou

$$k = \frac{b}{c},\; k' = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}.$$

Quant a la seconde des integrales de M. Sylvester, elle peut se deduire très facilement d'une integrale generale dont la valeur se trouve determinée dans une mémoire que j'ai publie dans le journal de mathématiques tom. XI. page 157.

College de la Trinité.

a Dublin, le 17 janvier 1863.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

INTORNO AL LIBER KARASTONIS

LETTERA DI MAURIZIO STEINSCHNEIDER A D. BALDASSARRE BONCOMPAGNI

Nel volume quarto della storia della letteratura araba compilata dal celebre orientalista defunto *von Hammer* si trovano due articoli (p. 279 e 326) sopra il filosofo e medico arabo - di religione cristiano [1]) – *Costa ben Luca*, che fiorì nella seconda metà del secolo nono [2]). L'Hammer ci dà anche due liste delle opere composte, ovvero tradotte da Costa, non senza contradizioni, che fanno vacillare il lettore non orientalista, e non senza ripetizione nella stessa lista, come per esempio il libro sopra *lo specchio ustorio* (p. 481 n.° 62) già è nominato di sopra (n.° 42 - nell'altro articolo p. 328 n.° 40). È da maravigliarsi che Costa abbia trovato un luogo in quella storia diffusa soltanto fra i filosofi e medici, e non fra i *matematici*, sebbene la maggior parte delle sue opere ancora conservate, se non nell'originale arabo, almeno in una traduzione ebraica, come per esempio sopra il libro d' *Archimede* : della sfera e del cilindro [3]) appartengono alle scienze matematiche. Ma l'Hammer in tutta la sua opera ha limitato la sua diligenza ed erudizione alla *nomenclatura* delle opere nominate dagli scrittori sopra la letteratura araba e di rado ha fatto uso dei catalogi, lasciando al lettore la cura d'istruirsi altrove, se le opere da lui nominate esistano ancora e dove esistano. Considerando quanto imperfetta è ancora la nostra cognizione dei manoscritti arabi esistenti, e quanto poco gli stessi orientalisti si sono adoperati a studiare i manoscritti *ebraici*, *latini*, ecc. tradotti dall'Arabo, per profittarne all'uso della bibliografia araba, si condonerà facilmente all' Hammer questa limitazione della sua opera.

L'oggetto della seguente notizia è anche di mostrare che l'esame dei manoscritti latini può giovare non solo alla bibliografia, ma bensì alla stessa *lessicografia* araba,

[1]) Se l' Hammer lo fa rinnegare questa sua religione e divenir Musulmano, questo è un' errore la cui origine mostrerò in un'opera *sopra i scritti polemici ed apologetici in lingua araba* che uscirà nell'anno futuro fra i trattati pubblicati dalla società degli orientalisti di Germania.

[2]) Alcuni autori lo fanno ancora vivere nell'anno 923; non posso entrar qui nelle ragioni che di ciò mi fanno dubitare.

[3]) *Catalogus Codd. hebr. Lugd. Batav.* 1858 p. 319. Di altre due opere di Costa sopra *la sfera*, spesse volte confuse dai Bibliografi, parlerò nell'opera mentovata nella nota 1.

e se oso indirizzarla a V. E., coll'umilissimo voto di compiacersi di pubblicarla, mi credo tanto obbligato a ciò fare, quanto scusatone per varie ragioni, che basterà accennare con poche parole. Si tratterà di *Gherardo di Cremona*, la cui vita ed opere sono state l'oggetto degl'illustri studi di V. E., e sopra cui spero ancora gettar qualche nuovo lume, illustrando il catalogo delle sue opere, pubblicato per opera di V. E. dal Codice Vaticano n.° 2392 in un'operetta speciale già cominciata qualche anno fa (*). Si tratterà poi di alcune opere sconosciute sopra un oggetto matematico, e già basterebbe la notizia sopra il Cod. di San Marco, unita alla presente notizia e dovuta all'estrema bontà di V. E., per lusingarmi ch'Ella non vorrà disdegnare di pubblicare il risultato delle mie ricerche.

Se poi oso scrivere questa volta nella lingua italiana, già a me dilettissima fra le lingue moderne fino dalla mia fanciullezza, spero che non ne sarò accusato di vanità ed albagia, sentendo io stesso ottimamente la mancanza di pratica in questa lingua. Dovendo per altro esprimermi in una lingua diversa dalla mia vernacola, ho proferito l'italiana e devo arrendermi alla critica ed affidarmi all'indulgenza de' miei lettori italiani.

Ritorno al mio argomento.

Nell'opera citata di Hammer, p. 481, si leggè sotto il numero 64.

« *Karschun* (?), trattando dello stesso oggetto, come il libro [omonimo] d'Ibn » Heisem, ommesso da Casiri. »

In verità il libro chiamato da Hammer « *Kerschun* », ma con segno d'interrogazione, non è ommesso da Casiri nel testo arabo, ove si legge (*Biblioteca Arabico-Hispana*, I, p. 420) القرسطون (كتاب (*Kitâb el-Karastûn*), ma, Casiri ha tradotto questa parola - non sò perchè! - « *de Musica* », e quindi credo, un libro di Musica e nominato fra le opere di Costa dal *De Rossi* (Dizionario stor. degli autori arab. p. 113) e dal *Wünstenfeld* (Storia dei medici arabi, in lingua tedesca, p. 59, n.° 14).

Anche sotto l'articolo: « El Hasan Ben el-Heisem (هيثم) » della storia ecc. di Hammer (V. 319) non si trova alcuna spiegazione della voce « Karschun », ragionevolmente messa in dubbio, essendo senza fallo una corruzione (قرشون) di قرسطون, come è evidente in un altro luogo, cioè sotto l'articolo: « Beni Musa ben Schakir », ove lo stesso Hammer (IV, 310) scrive: « *Kitab el-Karstun* » (sic), ed anche qui il Casiri (I, 418) traduce la stessa parola قرسطون : *de Musica*. Niuno dubiterà, che in tutti questi luoghi ci sia la stessa parola, significando lo stesso soggetto di opera di tanti autori, e certamente già è interessante di sapere di qual soggetto abbiano trattato alcuni dei più celebri ed antichi matematici arabi, — e vedremo più oltre che un quarto non meno celebre matematico del secolo nono abbia scritto una monografia

(*) Vedi la nota 2 della pagina 5.

sopra lo stesso soggetto; benchè non si trovi nemmeno un articolo القرسطون (كتاب) nel gran lessico bibliografico di Hagi Chalfa! — Mà non abbiamo ancora finito col Costa.

Nel catalogo delle sue opere che l'Hammer ha comunicato secondo l'autore arabo Ibn Abi Oçeibia (IV, 281 n.° 57 – pag. 328 n.° 55) il « carastun » diviene – *Diophantus!* Dovremmo dunque emendare dapertutto il قرسطون e sostituirvi ديوفنطوس? Confesso che quando prima m'accorgeva dell'identità delle opere, mi lusingava d'aver fatto una scoperta importante nella storia dell' Algebra. Un' opera sopra Diofanto scritta da uno dei tre figli di Musa ben Sciachir, che vissero al tempo del Califfo Maamun, porrebbe fine ad una gran questione conosciuta sopra l'algebra degli Arabi e la sua origine da quella degli *Indi*. Finora nessuno ha potuto dimostrare per certo, che Diofanto era conosciuto dagli Arabi prima d'*Abu'l Wefa el-Buzgiani*, che fiorì circa il 970 [1]). E poi qual numero d' autori scrivendo, traducendo, o commentando ecc. un'opera di Diofanto! – Quella stessa circostanza mi persuase tosto dov' era da cercar l'errore: certamente non da parte di tutti gli autori arabi, che nulla sapevano d'una vecchia traduzione di Diofanto, e che scrissero costantemente *Carastun*, la qual voce, già mutata dall'Hammer in un luogo in *Carsciun*, forse in altro luogo da lui o nel suo testo arabo era emendata per congettura nel nome di Diofanto, senza pensare alle conseguenze storiche che pendono da questo nome.

Lasciando dunque Diofanto da parte, mi dimandava che cosa fosse questa voce قرسطون, che già nella sua composizione non mostrava origine araba, anzi non era reperibile nei lessici arabi a me noti. Ne feci domanda al mio maestro, il celebre arabista Prof. Fleischer a Lipsia, e mi rispose nel novembre dell' anno 1861, che non osava proporre alcuna congettura, ma che certamente la traduzione del Casiri era erronea. Già disperava di trovare « *le mot de l'enigme* », quando l'aiuto veniva da una parte, donde non l'aveva sperato.

Studiando nell'anno scorso le opere di V. E. sopra *Gherardo di Cremona* e *Platone Tiburtino* più esattamente, che non poteva farlo prima, onde preparare una seconda edizione della mia notizia (non ancora finita) sopra le opere di V. E. [2]), m'imbattei nel catalogo delle traduzioni di Gherardo (apud Boncompagni, p. 5) sul titolo: *Liber carastonis*, che antecedentemente aveva letto con poca attenzione. Già aveva acquistato la certezza, che la voce قرسطون era corretta, ed inoltre la speranza di trovare la soluzione dei manoscritti latini del medio evo. Tosto m'accorgeva dell'esistenza d'un *liber Karastonis* (« *harastonis* » per isbaglio di coloro che non leg-

---

[1]) Wenrich, De auctorum graecor. versionibus ecc. p. 273; Libri, Hist. des sciences mathém. I, 115; Chasles, Comptes Rendus etc. XIII (1841) p. 613, 621; Nesselmann, Die Algebra der Griechen (1842) p. 274; L. Am. Sédillot, Matériaux etc. (1845—8) I p. 451.

[2]) Les ouvrages du Prince Boncompagni etc. Rome 1859.

gevano bene) nel manoscritto n.° 184 della biblioteca del Convento di San Marco di Firenze, mentovato da V. E. nell'opera: *Delle versioni fatte da Tiburtino*, ecc. (pag. 35, lin. ult. e pag. 36). L'autore arabo ivi nominato è il celebre matematico « *The-* » *bit* » (*Tabit ben Corra*), Sabeo di religione, che fiorì nel secolo nono. Non esitava di scrivere a V. E., pregandola di favorirmi graziosamente un estratto di quel Codice, che bastasse per farmi sapere di che cosa trattava quest' operetta; e come sempre, anche questa volta, al desiderio d'illustrare cose oscure scientifiche fu corrisposto liberalissimamente da V. E. Intanto io mi poneva a scorrere qualche catalogo di manoscritti latini, e tosto trovava in quello dei manoscritti di Parigi, mentovati non meno di *tre* Codici della stessa opera di « Thebit », cioè i Codici 7377 B^3, 7434^6, 8680 A, e (cosa curiosa) ci è indicato il titolo: *Liber carastonis sive de statera* ed ecco il senso della voce da me fin allora cercato invano nei lassici arabi, e trovato in un catalogo di manoscritti latini! – Ho narrato finora il corso curioso delle mie ricerche, finirò nella stessa maniera, aggiungendo qualche conclusione.

Avendo riferito questo felice risultato allo stesso Prof. Fleischer, e scrivendogli che la voce sembra esser *greca*, egli mi rispose ai 14. Ottobre di quest'anno 1862 nei seguenti termini: « La ringrazio della sua notizia. Thaalibi ha la voce قرسطون nel suo lessico sinonimico (فقه اللغة, v. *Berichte über die Sitzungen der K. Sächsischen Gasellschaftn des Wissenschaften, Philogisch-historische Classe*, vol. VI, 1845, p. 1 e seg.) [1]) in una delle ultime sezioni, fra quelle voci, che, secondo l'opinione di alcuni linguisti, sono d'origine greca, ed egli la spiega per قبّان, cioè *statera*. Ci è soltanto la questione, quale sia la voce greca originale. Che la derivazione dalla lingua greca sia giusta, già sembra mostrarlo indubitatamente tutta la forma della voce. »

Mi sia adesso permesso di riassumere i risultamenti di tutto il precedente.

1.° قرسطون vuol dir *bilancia*, la voce araba è d'origine greca, ma la voce greca è ancora da trovarsi. – Senza arrischiare una congettura certa, lasciando questo ai filologi classici, voglio soltanto accennare, che questa voce era forse primamente usata nel *Siriaco*, e che la voca greca è forse composta di χειρ *mano*? – È vero che il traduttore latino scriveva *caraston* con due *a*, leggeva dunque قَرَسْطون; ma gli arabi amano la vocale *a*, e non di rado hanno pronunciato le consonanti d'una voce quando non trovavano la vocale indicata nel loro testo. Cercando dunque il suono greco, è da tenersi alle consonanti.

2.° Già esistevano almeno 4 opere trattanti della bilancia, vale a dire:

a) d'uno dei *figli* di *Musa ben Sciachir*

[1]) Il فقه اللغة è stato stampato nel 1861, se non m'inganno.

b) di *Tabit ben Corra* (morì nell'anno 901)

c) di *Costa b. Luca* (Sec. IX., se non X.)

d) d'*Ibn Heithem* (che è il celebre « Alhazen » e morì nell'anno 1038).

Non si sa certamente quale di questi autori abbia impiegato la voce *caraston* , che poi era comune fra i dotti.

3º Il *liber carastonis*, esistente almeno in 4 manoscritti, è di Thabit, ma non si trova nei cataloghi delle sue opere, conosciuti finora. [1])

4º *Gherardo di Cremona* tradusse un *liber carastonis* dall'arabo, ed è da presumere che sia l'opera di Thabit ancora esistente, ch'egli abbia tradotto, finchè non trovi altro nome di traduttore nominato in uno dei manoscritti dell'opera di Thabit.

Non tocca a me il giudicare del valore scientifico dell' opera di Thabit , fatta come dice (o finge ?) nel proemio, per uno dei suoi amici. Il tema deve aver avuto qualche maggior interesse pei dotti del suo tempo, forse avendo relazione ad alcuna delle dottrine d'*Euclide.*

Riporto qui appresso secondo la lezione del suddetto Codice di San Marco , il proemio, il principio e la fine dell'opuscolo di « Thebit », che devo alla grazia di V. E., bramando nell' interesse degli orientalisti , che questi documenti siano conosciuti da coloro che si occupano di manoscritti arabi e che forse potrebbero col mezzo loro scoprire l'originale arabo.

Mi sottoscrivo colla dovuta riverenza

di V. E.

Berlino, 15 Decembre 1862.

gratissimo e devotissimo servitore
M. Steinschneider.

---

[1]) Cf. Chwolsohn, Die Ssabier etc. T. I. p. 586. — Nell'Indice del *Bandini*, V, p. 672 il Thebit è stato confuso coi suoi traduttori.

PROEMIO E PRINCIPIO DEL *LIBER KARASTONIS*

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE N.° 184 DELLA BIBLIOTECA DEL CONVENTO DI SAN MARCO DI FIRENZE (carta numerata 112, *verso*, e carta numerata 113, *recto*).

Incipit liber karastonis. editus a thebith. filio thore.

C Ontinuet deus conseruationem tuam. et multiplicet ex salute portionem tuam. et non puer germano ego qualis tu es. absterget mentes cum inquisicio ne sua et excitet animum ad speculandum. et imprimit scientiam per naturam suam et circuit per seipsum et commouet super illud quod expellit assimilationem ab eo et ab eo exponuntur ueritates. legi o frater Epistolam tuam in eo quod dixi de speculatione tua in causis karastonis cum vestigiis inuentis in eo et figuris demonstratis super ipsum et quod venisti ea postquam cessans ab alijs occupatus fuisti in eis et bene exercuisti cogitationem in eis inter ignotum quod non recipiunt mentes. et ignotum quod non uerificat experimentum. perpendi ergo. illud super permutationem linguarum interpretum et vicissitudinem manuum scriptorum. holitaui (*sic*) ergo cum illo et tu non sanasti ex malis opinionis animam tuam. et tu quidem quesiuisti a me expositionem illius cum dictionibus planis et intentionibus detectis et vijs que apropinquare faciunt a longitudine eius. et alleuiant difficultatem eius. Et quidem respondeo tibi in eis et de eo quod || quesiuisti et ulime dicam tibi ex eis ubi volueris cum figurabus sufficientibus et demonstrationibus car. 113 *recto* sanis Scies ergo locum erroris et vnde multiplicatus adeo donec forsan factus comprehendens et fit communis.

Jam ciuisti. dirigat te deus. et tui pectoris illuminet intellectum quod cause karastonis deriuate sunt ex figuris geometricis non ergo fit excusacio et qui vult eas intelligere considerationem earum et speculatione et pluribus illius sicut cognitio figurarum sectorum. et sectionum proporcionalitatum earum et qualiter est earum assimilatio. et cognitio proporcionalitatum linearum innumeris ad inuicem. Liber enim noster iste non colorat diuersitatem illius et cuius expositionis hoc autem capitulum est inuitum (*sic*) super librum qui nominatur liber *euclidis*. Qui ergo vult aliquid eius inueniet ipsum illic exquisitum quia ergo iam premisimus quod necesse fuit premitti de rememoratione eius. quod conuenit ei qui considerat hoc capitulum et intelligit ipsum tunc incipiamus exponere illud quod intendimus et quod volumus. Dico ergo quod omnium duorum spatiorum que duo mota secant in tempore. licet proporcio vnius ad alterum est sicut proportio virtutis motus eius quod secat spacium vna virtute motus secantis spacium alterum. et ponam ad illud exemplum dico duorum viatorum perambulat primus 30. milieria et perambulat secundus .60. miliaria in tempore. 1.no Notum est ergo quod virtus et motus eius qui ambulat .60. miliaria dupla est virtutis motus eius qui perambulat 30. miliaria. sicut spacium quod est .60. miliaria est duplum spacii quod est .30. miliaria hoc est proportio incepta per se inter quam uter intellectum non est medium separans ea et quod post hoc dico quod omnis linea que diuiditur in duas sectiones et figitur punctum eius secans et mouetur linea tota penitus motu quod non redit ad locum suum tunc ipsa facit acadere duos sectores similes duorum circulorum medietas dyameter vnius quorum est linea longior cum medietas dyametri secundi est linea breuior.et quod proportio arcus quem figurat punctum extremitatis vnius duarum linearum ad arcum quem figurat punctum extremitatis linee secunde. est sicut proportio linee reuolventis illum arcum ad lineam secundam.

FINE DEL *LIBER KARASTONIS*

SECONDO LA LEZIONE DEL MEDESIMO CODICE N.° 184.

(carta numerata 119 *recto*)

Erit ergo illud augmentum in ponderatis. et currit pondus grauati in sectionibus secundum proportionalitatem predictam. et erit additio in ponderat. consequens in omni sectione earum. hanc ergo artem adiuvant demonstrationes. et verificat ipsam experimentum. Cum ergo uteris ex eis illo quod determinauimus, et intellexeris ex demonstrationibus eorum illud quod premisimus extrahet te .a. termino hehitationis (*sic*) et deteget te ab errore assimilacionis et faciet te videre locum rectitudinis et faciet te cognoscere casum erroris. &c. est finis

Explicit de karastione. deo gracias.

Cenno Necrologico

DI

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI.



Il dì 20 di Marzo di questo anno l'Italia ha perduto in *Ottaviano Fabrizio Mossotti* una delle sue più alte intelligenze, uno dei suoi più nobili caratteri, i giovani matematici il loro più amorevole maestro ed amico, le scienze matematiche uno dei loro più valenti cultori. Compresi di dolore annunziamo tanta perdita ai lettori degli *Annali* con poche parole intorno a questo uomo eminente.

Il *Mosotti* nella sua vita scientifica di mezzo secolo coltivò di preferenza le applicazioni dell' Analisi alla Fisica, alla Meccanica razionale e alla Meccanica celeste. Gli scritti che ha pubblicato sopra questi soggetti non sono notevoli per il loro numero ma sono ammirabili per la eleganza del calcolo, la chiarezza della esposizione, l'ordine con cui sono condotti e i risultati che essi contengono. L'Idrodinamica, le teoriche delle forze molecolari, della capillarità, della elettricità e dell'ottica e degli strumenti ottici e la meccanica celeste debbono a lui progressi e notevoli perfezionamenti. Come *Gauss* amava di produrre, ma non aveva premura di pubblicare i suoi lavori. Quindi ha lasciato alcuni scritti inediti quasi compiuti, che saranno raccolti e fatti conoscere al mondo scientifico dai suoi scolari ed amici. Di altri lavori dei quali parlava spesso e che nella sua mente erano già condotti a termine non rimangono che pochi appunti. Aveva vasta e profonda cognizione dell'Analisi pura, che nei suoi lavori applicava colla eleganza che si ammira nelle opere di Lagrange, e se non fosse stato attratto potentemente nel campo delle indagini sulla costituzione interna dei corpi, avrebbe contribuito di più all' avanzamento di questo importante ramo del sapere. Prima di *Abel* e di *Jacobi* aveva avuto l'idea di considerare le funzioni inverse degl'integrali ellittici di prima specie, ma occupato nei problemi di fisica matematica e di meccanica celeste non aveva dato seguito a questo pensiero che lo avrebbe portato alle scoperte analitiche che sono tra le più belle di questo secolo.

Il culto della scienza che egli aveva soltanto per il desiderio di scuoprire il vero, e non per il vero, e non per il desiderio di onori e d'influenza lo rendevano alieno dal darsi cura di divulgare i suoi scritti che quasi tutti compilati in lingua Italiana sono stati stampati in Italia, quindi all' estero era conosciuto e apprezzato generalmente meno di quello che meritava.

I giovani matematici e astronomi avevano tutto il suo affetto ed era largo con essi d'incoraggimenti e di ajuti. Di quelli che davano di se buone speranze ne parlava volentieri e con passione, e quando facevano qualche buon lavoro se ne compiaceva e rallegrava come di un avvenimento fortunato per sè.

Sempre calmo e sereno, affabile, pieno di benevolenza per tutti non si poteva avvicinare senza sentirsi compresi di amore e di riverenza per Lui. Caritatevole, non lasciava scontento nessuno che ricorresse a lui per soccorso. Quindi sono molto rari quelli uomini anche celebri per il loro valore scientifico, e per alti fatti, da quali sia stata pianta la perdita con dolore egualmente sincero e profondo.

INTORNO LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE GENERALI MEDIANTE TRASCENDENTI.

NOTA

DEL DOTTOR ANTONIO PIEVANI.



Nell'equazione algebrica generale:

$$x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + \dots + r\,x^2 + s\,x = v$$

che per concisione segnerò anche col simbolo: $E(x) = v$, l'incognita (x) è naturalmente funzione dei coefficienti: $a, b, c, \dots, r, s, v$ quantità fra loro indipendenti per essere la proposta equazione generale, sicchè derivando rispetto a (v) ambo i membri di tale eguaglianza si otterrà: $x'.\,E'(x) = 1$ cioè: $E'(x) = \frac{1}{x'}$ ove (x') esprime la derivata della (x) rispetto a (v) ed $E'(x)$ la derivata prima del polinomio $E(x)$ presa rispetto la (x).

L'Equazione trasformata che ha per radici gli (m) valori del polinomio $E'(x)$ corrispondenti agli (m) valori della incognita (x) sarà del grado (m) rispetto la nuova incognita $E'(x)$ che si segnerà anche con (y) ed ordinata terrà la forma:

$$y^m + \mathrm{A}\,y^{m-1} + \mathrm{B}\,y^{m-2} + \dots + \mathrm{R}\,y^2 + \mathrm{S}\,y = \mathrm{V}$$

ove A, B, ..., R, S, V saranno funzioni intiere simmetriche rispetto gli (m) valori del polinomio $E'(x)$ cioè funzioni razionali intere e simmetriche delle (m) radici della proposta, quantità quindi indipendenti dalla (x) ed esprimibili razionalmente ed interamente rispetto $(a, b, \dots, r, s, v)$.

L'effettiva ricerca dei parametri di tale trasformata presenterebbe invero qualche difficoltà nelle prolisse operazioni occorrenti; ma qui possiamo schivare le medesime col restringerci a dimostrare solo quel tanto che strettamente interessa la presente nota, vale a dire: essere zero S coefficiente nel termine in cui non entra l'incognita (y) che linearmente – essere il termine tutto noto V funzione razionale ed intera del grado $(m - 1)$ rispetto (v), e da ultimo – che se nel primo membro della trasformata in (y) si sostituisce a luogo della (v) inclusa nei parametri A, B, ..., R, S, il suo equivalente polinomio $E(x)$ ed a luogo della (y) il polinomio $E'(x)$ da essa lettera rappresentato, quel primo membro, il quale non conterrà più la (v) che implicitamente nella (x), risulterà funzione intera del grado $m(m - 1)$ al più rispetto la (x).

La prima delle citate proposizioni è dimostrata in due parole ed infatti: essendo

$$(y) = E'(x) = \frac{1}{x'}\left(-\frac{S}{V}\right)$$

sarebbe il coefficiente della potenza $(m-1)$ esima della (x') nell'equazione trasformata in (x') le cui (m) radici sono le derivate prime rispetto a (v) delle

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

radici della proposta equazione generale, cioè $\frac{S}{V}$ è la somma delle derivate prime delle citate radici ovvero la derivata della somma loro. Ma tal somma, come è noto, è il parametro $(-a)$ quantità indipendente da (v) e quindi sarà zero la derivata della predetta somma rispetto a (v) cioè la frazione $\frac{S}{V}$. Sussistendo in generale l'egualianza $\frac{S}{V}=0$ necessariamente e generalmente sarà $S=0$ ovvero $\frac{1}{V}=0$; ma $\frac{1}{V}$, fatta astrazione dal segno è il termine tutto noto nell'equazione ordinata che ha per radici le derivate delle radici della generale proposta, sicchè dovrebbe essere nullo il prodotto di simili derivate, cioè nulla la derivata di almeno una fra le citate radici, proposizione assurda, mentre ritenuta simboleggiata dalla lettera (x) una di cotali radici l'equazione $E(x)=v$ derivata rispetto a (v) offrirebbe: $x'.\ E'(x)=1$ cioè: zero eguale all'unità per essere $(x'=0)$; dunque l'egualianza $\frac{S}{V}=0$ include la $S=0$ che ripete l'enunciato del primo lemma propostomi a dimostrare.

La medesima verità potevasi comprendere osservando che l'eguaglianza $S=0$ corrisponde alla notissima

$$E'(x_1).\ E'(x_2).\ E'(x_3)\ldots E'(x_m)\left\{\frac{1}{E'(x_1)}+\frac{1}{E'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{E'(x_m)}\right\}=0$$

che si ricava dallo spezzamento della frazione $\frac{1}{E(x)}$ ove $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ rappresentino le (m) radici della equazione generale $E(x)=v$.

A rilevare la realtà del secondo lemma si ricordi che V, fatta astrazione dal segno, è il prodotto delle (m) radici della trasformata in (y) sovrasegnata, ossia: il prodotto degli (m) valori che si ottengono dal polinomio $E'(x)$ col sostituire successivamente nel medesimo alla lettera (x) le (m) radici $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$; ma essendo

$$E'(x) = m\,x^{m-1} + (m-1)\,a\,x^{m-2} + (m-1)\,b\,x^{m-2} + \ldots + 2\,rx + s,$$

V sarà il prodotto degli (m) polinomii:

$$mx_1^{m-1} + (m-1)\,a.\,x_1^{m-2} + (m-2)\,b.\,x_1^{m-3} + \ldots\ldots + 2\,r.\,x_1 + s$$
$$mx_2^{m-1} + (m-1)\,a.\,x_2^{m-2} + (m-2)\,b.\,x_2^{m-3} + \ldots\ldots + 2\,r.\,x_2 + s$$
$$mx_3^{m-1} + (m-1)\,a.\,x_3^{m-2} + (m-2)\,b.\,x_3^{m-3} + \ldots\ldots + 2\,r.\,x_3 + s$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$mx_m^{m-1} + (m-1)\,a.\,x_m^{m-2} + (m-2)\,b.\,x_m^{m-3} + \ldots\ldots + 2\,r.\,x_m + s$$

i quali (avuto riguardo alla relazione fra i coefficienti $(a, b, c, \ldots., r, s)$ e le radici $(x_1, x_2, x_3 \ldots.., x_m)$ sono palesemente altrettante funzioni intere omogenee della dimensione $(m-1)$ rispetto le suddette radici, e però il prodotto in discorso, esprimibile razionalmente ed interamente in funzione dei parametri della proposta, risulterà funzione omogenea intera della dimensione $m\,(m-1)$ rispetto le di lei radici $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ e di conseguenza non potrà contenere che la potenza $(m-1)$ esima al più della (v), che è noto, essere il prodotto delle (m) radici scritte ultimamente, anzi conterrà effettivamente la potenza (v^{m-1}) mentre fra i termini del prodotto dei citati polinomii vi ha il prodotto dei loro primi termini $m^m\,(x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_m)^{m-1}$ che equivale ad $m^m v^{m-1}$ in valore assoluto ed è il solo che contenga simile potenza di (v), dunque V è appunto funzione intera di grado $(m-1)$ rispetto a (v). Vengo a dimostrare la terza proposizione avvanzata da principio notando che la trasformata in (y) non è che l'equazione risultante dall'eliminare la (x) fra le due $E\,(x) = v$, $E'\,(x) = y$ così che col sostituire nella stessa alle (v, y) rispettivamente i polinomii $E(x)$, $E'(x)$ la si ridurrà ad una identità rispetto la (x); ma il secondo membro V della trasformata in (y), come funzione intera del grado $(m-1)$ rispetto a (v) già funzione della (x) di grado (m), diverrà, dietro la detta sostituzione, funzione intera del grado $m\,(m-1)$ al più rispetto la (x); dunque anche il primo della trasformata in (y) risulterà funzione della (x) intera e del grado $m(m-1)$, al più come vuole ragione d'identità e come si asseriva. Per essere $S = 0$, giusta la prima delle tre proposizioni dimostrate, la trasformata in (y) terrà la forma

$$(1) \qquad y^m + A\,y^{m-1} + B\,y^{m-2} + C\,y^{m-3} + \ldots\ldots. + R\,y^2 = V$$

ossia la:

$$(2) \qquad y^2 \{ y^{m-2} + A\,y^{m-3} + B\,y^{m-4} + C\,y^{m-5} + \ldots\ldots. + R \} = V.$$

Si sostituisca alla (y) nel solo primo fattore (y^2) del sinistro membro di quest'ultima il rispettivo equivalente $\frac{1}{x'}$ dato dalle eguaglianze: $y = E'\,(x) = \frac{1}{x'}$

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{x'}\right)^2 \{ y^{m-2} + A\,y^{m-3} + B\,y^{m-4} + C\,y^{m-5} + \ldots.. + R \} = V$$

*

Rovesciati i membri di quest'ultima ed estrattane la radice quadrata si ottiene

$$(4) \qquad \frac{x'}{\sqrt{\{ y^{m-2} + \mathrm{A}\, y^{m-3} + \mathrm{B}\, y^{m-4} + \ldots\ldots + \mathrm{R} \}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}}}.$$

Ma per il terzo lemma: il primo membro della trasformata in (y) riprodotta sotto (1) e (2) col sostituirvi a luogo della lettera (y) il polinomio $E'(x)$ da essa rappresentato ed a luogo della (v) implicita nei coefficienti A, B, C, . . . , R: l'equivalente polinomio $E(x)$ si riduce a funzione intera del grado $m(m - 1)$ al più rispetto la (x), epperò il polinomio

$$y^{m-2} + \mathrm{A}\, y^{m-3} + \mathrm{B}\, y^{m-4} + \ldots\ldots + \mathrm{R}$$

secondo fattore nel primo membro della (2) diverrà dietro l' accennata sostituzione funzione intera del grado $(m - 1)(m - 2)$ al più rispetto la (x) di cui (y^2) altro fattore del citato membro è funzione razionale intera del grado $2(m - 1)$.

Segnando ora con $\varphi(x)$ la funzione intera per (x) di grado $(m - 1)(m - 2)$ al più, equivalente al polinomio scritto ultimamente e con $\psi(v)$ la funzione indipendente dalla (x) intera e del grado $(m - 1)$ rispetto la (v) rappresentata da V per l'addietro giusta il secondo lemma, si ha dalle visibili sostituzioni nella (4):

$$\frac{x'}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\psi(v)}}$$

In questa equazione alle derivate di primo ordine le variabili si trovano già visibilmente separate e però integrando rispetto a (v) ambo i membri della medesima si otterrà in $\mathrm{F}(x) = f(v) + k$ la primitiva completa, ove $\mathrm{F}(x)$ rappresenti la primitiva rispetto la (x) della funzione $\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}$ e $f(v)$ la primitiva della $\frac{1}{\sqrt{\psi(v)}}$ presa rispetto alla (v) dalla quale è indipendente la costante arbitraria (k) introdotta dall'integrazione; ma una primitiva dell'equazione:

$$\frac{x'}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\psi(v)}}$$

è necessariamente la $E(x) = v$ mentre da questa seconda la prima appunto si è dedotta, nè questa può essere la completa non contenendo la costante arbitraria, nè molto meno la singolare non soddisfacendo le note condizioni caratteristiche di cotali primitive, dunque ne sarà necessariamente una equazione primitiva particolare; cioè la $E(x) = v$ esprime l'istessa relazione che la $\mathrm{F}(x) = f(v) + k$ ove l'arbitraria (k) indipendente dalla (v) venga opportunamente determinata. Ora sia (c) per ipotesi quello od uno di quei particolari valori della costante (k) che riducono la

$$\mathrm{F}(x) = f(v) + k$$

alla $E(x) = v$, e l'eguaglianza $F(x) = f(v) + c$ che lega fra loro le $F(x)$, $f(v)$ funzioni generalmente trascendenti potrà assumersi a luogo della $E(x) = v$. Onde avere la (c) si osservi che sostituendo alla (v) nella equazione più volte citata

$$F(x) = f(v) + c$$

il rispettivo equivalente $E(x)$ dato immediatamente dalla proposta cui l' antescritta corrisponde effettivamente la si trasformerà in una vera identità rispetto la (x) ossia in tale eguaglianza che è indipendente da speciali valori della (x), cosichè se nella

$$F(x) = f E(x) + c$$

si ponesse zero a luogo della (x) la risultante dovrebbe tuttavia conservarsi necessariamente vera. Ma effettuando l'annunciata sostituzione si ha: $F(o) = f(o) + c$, per essere $E(o) = o$, e quindi: $c = F(o) - f(o)$, la quale offre il particolare valore (c) della costante (k) che si domandava. Ordinariamente avviene che $F(o) - f(o)$ sia una espressione la quale presenta più valori che designerò per $(c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_n)$ ritenendo il simbolo (c) a denotare l'uno qualsiasi fra gli enne prenotati valori, ed in tale occorrenza le enne equazioni desumibili dalla stessa: $F(x) = f(v) + c$ col sostituirvi successivamente alla (c) le $(c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_n)$ esprimeranno tutte la stessa relazione rappresentabile dall'unica $E(x) = v$ che è la proposta. Indicando con Φ l'operazione inversa o reciproca della F si avrà: $x = \Phi\{f(v) + c\}$ ed i diversi valori della incognita (x) dipenderanno dai diversi valori della (c) : le operazioni trascendenti che entrano nelle funzioni Φ, f accade altra volta che si elidino fra loro nella trovata espressione di (x) sicchè la (x) ne rimane espressa soltanto per funzioni algebraiche ed in allora abbiamo la risoluzione algebrica della equazione $E(x) = v$; ma più soventi accade che le dette operazioni trascendenti non si distruggano scambievolmente ed allora l'equazione proposta $E(x) = v$ non è risolubile algebricamente, vale a dire l' incognita (x) non può venire espressa mediante i parametri della proposta col ripetere un numero di volte finito sopra i medesimi le sole prime sei operazioni elementari dell'algebra quali sono: somma e sottrazione, moltiplica e divisione , innalzamento a potenza ed estrazione di radicali; ciò che per lo appunto arriva nelle equazioni algebriche di grado superiore al quarto come dimostrava innanzi tutti il nostro Ruffini e quindi poneva al sicuro d'obbiezione di sorta il Norveggio Abel coll'esattezza e lucidità che distingue ogni di lui lavoro. Anzichè con una sola equazione conviene soventi rappresentare la relazione fra (x) e (v) mediante due simultanee le quali includino una nuova quantità da eliminarsi onde poter usare delle tavole che traducono a numeri le funzioni trascendenti involte da simili equazioni, ciò che speditamente si ottiene col seguente processo. Nell'equazione

$$F(x) = f(v) + c$$

pongasi: $\mathrm{F}(x) = z$ e si avrà: $f(v) = z - c$ ritenendo ora designata per Ψ la funzione inversa di f siccome per Φ già ritenemmo indicata l'inversa della F si otterranno: $x = \Phi(z)$, $v = \Psi(z - c)$ equazioni simultanee ove (z) è quantità da eliminarsi e le quali asseriscono: che se nella proposta equazione: $E(x) = v$ si esprime la quantità tutta nota (v) mediante la trascendente $\psi(z - c)$ la (x) soddisfacente quella equazione sarebbe la trascendente $\Phi(z)$, ovvero indicando con (ω) la quantità $(z - c)$: se (v) nella proposta si rappresenta con $\Psi(\omega)$ la (x) verrà espressa da $\Phi(\omega + c)$ quantità che può avere diversi valori a seconda dei diversi valori della (c); ma tali generali considerazioni prendono nuova luce dall'esame di alcuni casi particolari ad analizzare i quali mi affretto.

Fra le equazioni meritano speciale menzione quelle che presentano la forma trinomia: $x^m + a.x = b$ cui si ponno ridurre come è noto le generali stesse del 2°, 3°, 4°, 5° grado. Derivando quell'equazione generica rispetto a (b) e designando con $(x)'$ la derivata della (x) riguardo lo stesso parametro (b) si ricava:

$$\{ m.x^{m-1} + a \} x' = 1$$

L'equazione trasformata che ha per radici gli (m) valori del polinomio $(mx^{m-1} + a)$ corrispondenti agli (m) valori dell' incognita (x) sarà la risultante dall' eliminazione delle (x) fra le due: $x^m + a.x = b$, $mx^{m-1} + a = y$ se si assume la (y) per simbolo della nuova incognita. Cavando il valore della (x) dalla seconda equazione si ha:

$$x = \sqrt[m-1]{\frac{y - a}{m}}$$

valore che sostituito nella prima la riduce alla:

$$\frac{y + (m-1)a}{m} \sqrt[m-1]{\frac{y - a}{m}} = b$$

la quale non involge altrimenti la (x) che nella (y) ed è subito ridotta a forma razionale intera rispetto la nuova incognita (y) coll'eseguire la potenza $(m - 1)$ esima di ambo i membri e moltiplicandoli in seguito per la quantità (m^m) mentre si ricaverà:

$$\{ y + (m-1)a \}^{m-1} \{ y - a \} = m^m . b^{m-1}$$

cioè:

$$\{ y^{m-1} + (m-1)^2 a y^{m-2} + \frac{(m-1)^3 (m-2)}{2} a^2 . y^{m-3} + \dots$$

$$+ \frac{(m-1)^r (m-2)(\dots)(m-r+1)}{2.3.4\dots r} a^{r-1} . y^{m-r} + \dots + \frac{(m-1)^{m-2}(m-2)}{2} a^{m-3} . y^2$$

$$+ (m-1)^{m-1} . a^{m-2} . y + (m-1)^{m-1} a^{m-1} \} \{ y - a \} = m^m . b^{m-1}$$

e sviluppando il prodotto indicato nel primo membro e trasferendo quindi nel secondo i termini che non contongono la (y):

$$\{y^m + m(m-2)a.\,y^{m-1} + \frac{m\,(m-1)^2\,(m-3)}{2}a^2.\,y^{m-2} + \ldots..$$

$$+\frac{m(m-1)(\ldots.)(m-r+1)}{2.3.4\ldots r}(m-1)^{r-1}(m-r-1)a^r y^{m-r} + \ldots..$$

$$+\frac{m(m-1)^{m-3}(m-2)}{3}a^{m-3}.\,y^3 + \frac{m(m-1)^{m-2}}{2}a^{m-2}.y^2\} = m^m.b^{m-1} + (m-1)^{m-1}a^m$$

e raccogliendo il fattore y^2

$$y^2\,\{y^{m-2} + m(m-2)a\,y^{m-3} + \frac{m(m-1)^2(m-3)}{2}a^2.\,y^{m-4} + \ldots..$$

$$+\frac{m(m-1)(\ldots.)(m-r+1)}{2.3.4\ldots.\,r}(m-1)^{r-1}(m-r-1)a^r y^{m-r-2} + \ldots.$$

$$+\frac{m(m-1)^{m-3}(m-2)}{3}a^{m-3}.y + \frac{m(m-1)^{m-2}}{2}a^{m-2}\} = m^m.\,b^{m-1} + (m-1)^{m-1}a^m.$$

Sostituito alla (y) nel fattore y^2 visibile nel primo membro di quest'ultima il rispettivo equivalente $\frac{1}{x'}$ si rovescino i membri della risultante e se ne estragga la radice seconda

$$(\alpha)\qquad \frac{x'}{\sqrt{\{\,y^{m-2} + m\,(m-2)a\,y^{m-3} + \ldots. + \mathrm{M} + \ldots. + \mathrm{N}\}.}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\{\,m^m\,b^{m-1} + (m-1)^{m-1}\,a^m}}$$

ove

$$\mathrm{M} = \frac{m(m-1)\,(\ldots..)\,(m-r+1)}{2.3\ldots.\,r}(m-1)^{r-1}\,(m-r-1)a^r y^{m-r-2}$$

$$\mathrm{N} = \frac{m(m-1)^{m-3}\,(m-2)}{3}a^{m-3}\,y + \frac{m(m-1)^{m-2}}{2}a^{m-2}.$$

Il divisore nel primo membro non contenendo la (b) che implicitamente nella (y) si ridurrà a funzione della sola variabile (x) col sostituire nel medesimo alla (y) ovunque il suo valore $(mx^{m-1} + a)$ con che ambo i membri della precedente ne appariranno funzioni derivate esatte rispetto la variabile principale (b) ed integrando otterremo la cercata relazione fra quantità generalmente trascendenti equivalente alla proposta: $x^m + a.\,x = b$.

Ponendo nella precedente (α) $m = 3$ abbiamo:

$$\frac{x'}{\sqrt{\{y + 3a\}}} = \frac{1}{\sqrt{\{27 b^2 + 4 a^3\}}} \qquad (1)$$

e sostituendo alla (y) il rispettivo equivalente $(3 x^2 + a)$ che si ricava dalla

$$y = m x^{m-1} + a$$

si ottiene:

$$\frac{x'}{\sqrt{\{3 x^2 + 4a\}}} = \frac{1}{\sqrt{\{27 b^2 + 4 a^3\}}}. \qquad (2)$$

Una primitiva particolare di quest'ultima è necessariamente la $x^3 + a x = b$ da cui la medesima direttamente deriva, come già si osservava nelle generalità premesse; cioè l'equazione $x^3 + a. x = b$ esprime l'identica relazione che sotto altra forma è rappresentata dalla equazione primitiva generale che si ha integrando ambo i membri della (2) rispetto la (b) determinando opportunamente la costante arbitraria introdotta dagli integrali indefiniti.

L'accennata integrazione può essere eseguita sia per trascendenti logaritmici che per funzioni circolari e gioverà attenersi di preferenza all'una o l'altra rappresentazione delle primitive in discorso a seconda del valore e del segno del parametro (a) onde evitare l'immaginarietà apparente.

Incomincio ad integrare i membri di quella equazione alle derivate ponibile sotto la forma più commoda all'uopo:

$$\frac{x'}{\sqrt{\left\{x^2 + \frac{4a}{27}\right\}}} = \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left\{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right\}}}$$

mediante logaritmi ed ottengo col designare (k) la costante arbitraria:

$$\log \left\{x + \sqrt{\left(x^2 + \frac{4a}{3}\right)}\right\} = \frac{1}{3} \log \left\{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}\right\} + k$$

ad avere quei particolari valori di (k) che riducono la primitiva completa attuale alla particolare equivalente alla proposta: $x^3 + a. x = b$ si usi del metodo accennato più sopra che da:

$$k = \log \sqrt{\frac{4a}{3}} - \frac{1}{3} \log \sqrt{\frac{a^3}{27}}$$

cioè, designata per (α) una fra le radici terze dell'unità:

$$k = \log \sqrt{\frac{4a}{3}} - \log \sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \times \alpha = \log (2 \alpha)$$

Dunque la: $x^3 + a\,x = b$ non è che la:

$$\log\left\{x + \sqrt{x^2 + \frac{4a}{3}}\right\} = \tfrac{1}{3}\log\left\{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right\} + \log(2\,\alpha)$$

ossia:

$$\log\left\{x + \sqrt{x^2 + \frac{4a}{3}}\right\} = \log 2\,\alpha\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

d'onde:

$$x + \sqrt{x^2 + \frac{4a}{3}} = 2\,\alpha\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

e trasportando la (x) visibile fuori da radicale nel secondo membro per eseguire in seguito il quadrato d'ambo i membri della risultante si ottiene di tratto:

$$x^2 + \frac{4a}{3} = x^2 - 4\,\alpha\,x\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + 4\,\alpha^2\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^2}$$

dalla quale si ricava immediatamente il valore dell'incognita (x) sotto la forma ordinaria che compendiosamente esprime tutte le tre radici dell'equazione algebrica proposta a risolvere $x^3 + a\,x = b$ avuto riguardo al triplice valore di (α).

Integrando ora per funzioni circolari l'equazione:

$$\frac{x'}{\sqrt{\left\{x^2 + \frac{4a}{3}\right\}}} = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left\{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right\}}}$$

si ha, designata per (k) la costante:

$$\text{Ang. sen}\left(\frac{x}{\sqrt{-\frac{4a}{3}}}\right) = \tfrac{1}{3}\,\text{Ang. sen}\left(\frac{b}{2\sqrt{-\frac{a^3}{27}}}\right) + k$$

Onde rinvenire quei particolari valori della arbitraria (k) che riducono la primitiva completa esposta a quelle equazioni primitive particolari equivalenti alla stessa eguaglianza $x^3 + a\,x = b$ si faccia, come si è veduto addietro, nella completa in esame $(x = o$ e $b = o)$ simultaneamente, con che si riduce alla:

$$\text{Ang. sen}\,(o). - \tfrac{1}{3}\,\text{Ang. sen}\,(o) = k,\ \text{d'onde: } k = \tfrac{2}{3}\,\text{Ang. sen}\,(o);$$

ma indefinito è il numero degli angoli il cui seno è eguale a zero, è precisamente sono quelli dati dalla forma generica $(r.\,\pi)$ ove (r) è numero qualsiasi intero positivo o negativo e (π) esprime l'angolo di (180) gradi sessagesimali ossia la semipe-

riferia graduata del circolo che ha per raggio l'unità; dunque: $k = \frac{2.r.\pi}{3}$ dove (r), ripeto, esprime un numero intero qualsiasi positivo o negativo od anche zero. L'eguaglianza quindi:

$$\text{Ang. sen}\left(\frac{x}{\sqrt{-\frac{4a}{3}}}\right) = \tfrac{1}{3}\text{Ang. sen}\left(\frac{b}{2\sqrt{-\frac{a^3}{27}}}\right) + \frac{2.\,r.\,\pi}{3}$$

per (r) zero ovvero numero intero positivo o negativo non esprime che quella stessa relazione fra le $(x,\ a,\ b)$ data nella $x^3 + a.\,x = b$; ma da quella si ha tosto:

$$x = \sqrt{\left(-\frac{4a}{3}\right)}\ \text{sen}\left\{\frac{\text{Ang. sen}\left(\frac{b\sqrt{27}}{2\sqrt{-a^3}}\right) + 2.r.\pi}{3}\right\} \qquad (\beta)$$

che da appunto le tre radici della proposta mentre se ben si attende il secondo membro di tale eguaglianza è una funzione periodica di tre valori distinti. Anche qui sebbene meno visibilmente le funzioni trascendenti che entrano nel valore di (x) si elidono fra loro per lasciare la (x) rappresentata dall'ordinaria forma Cardanica come si vedeva nella formola cavata dalla primitiva completa espressa per logaritmi, formola che si poteva dedurre dalla precedente valendosi della nota relazione che lega le trascendenti logaritmiche alle circolari. In quella relazione propriamente riposa la ragione per cui si presenta il così detto caso irreducibile che sparisce usando le funzioni circolari; infatti la precedente eguaglianza ai trascendenti circolari involge immaginarietà apparente tutte le volte che il parametro (a) è positivo nella: $x^3 + a\,x = b$ o che essendo negativo $\frac{b^2}{4}$ supera $\frac{a^3}{27}$ come è spedito il convincersene dalla semplice ispezione della (β) mentre nel primo caso risultano immaginarie le quantità

$$\sqrt{-\frac{4a}{3}},\quad \text{Ang. sen}\left(\frac{b\sqrt{2.7}}{2\sqrt{-a^3}}\right)$$

e nel secondo assurda la Ang. sen $\left(\frac{b\sqrt{27}}{2\sqrt{-a^3}}\right)$ che esprimerebbe l'angolo che ha per seno una quantità maggiore dell'unità.

Nella primitiva completa espressa per logaritmi, e però anche nella algebrica che ne dipende, accade precisamente il rovescio mentre la medesima presenta l'immaginarietà apparente nel caso che il parametro (a) essendo negativo $\frac{a^3}{27}$ superi in valore assoluto $\frac{b^2}{4}$. Le forme di risoluzione dell'equazione $x^3 + a.\,x = b$ per trascen-

denti logaritmici e per funzioni circolari si debbono ritenere complementarie valendosi dell'una quando l' altra si rende illusoria e viceversa. Onde usare delle tavole conviene presentare l' equazione ai trascendenti circolari altrimenti mediante intramezzo di una quantità da eliminarsi fra due equazioni simultanee col seguente processo. Si ponga

$$\text{Ang. sen}\left(\frac{b\sqrt{27}}{2\sqrt{-a^3}}\right) = z$$

e si avrà:

$$\text{Ang. sen}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{-a}}\right) = \frac{z + 2\,r.\pi}{3}$$

le quali due equazioni equivalgono

$$b = 2\sqrt{-\frac{a^3}{27}} \times \text{sen}\,z, \quad x = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \times \text{sen}\left(\frac{z + 2\,r.\pi}{3}\right)$$

dove supponendo $2\sqrt{-\frac{a}{3}} = \rho$ ossia: $a = -\frac{3\rho^2}{4}$ si ottengono:

$$b = -\frac{1}{4}\rho^3\,\text{sen}\,(z), \quad x = \rho\,\text{sen}\left(\frac{z + 2\,r.\pi}{3}\right)$$

le quali asseriscono che l'equazione di terzo grado

$$x^3 - \frac{3}{4}\rho^2\,x + \frac{1}{4}\rho^3\,\text{sen}\,(z) = 0$$

ha per radici i tre valori della funzione periodica: $\rho\,\text{sen}\left(\frac{z + 2\,r.\pi}{3}\right)$ o per esprimermi altrimenti: se nell'equazione $x^3 + a\,x = b$ si rappresenterà (b) colla trascendente circolare $2\,\text{sen}\,(z)\sqrt{-\frac{a^3}{27}}$ la (x) soddisfacente quella equazione sarà la funzione circolare: $\rho\,\text{sen}\left(\frac{z + 2\,r\,\pi}{3}\right)$ ove (ρ) non è che la quantità $2\sqrt{-\frac{a}{3}}$ e da qui si rileva che deve essere negativo il coefficiente (a) onde risulti reale il raggio (ρ) e torni quindi opportuno l'uso di trascendenti circolari.

Per le equazioni trinomie affette da grado superiore al terzo, giovando la trasformazione delle variabili, premetto le seguenti generali considerazioni che ne esimeranno dal ripetere le stesse formole in ogni caso particolare e ne segneranno un processo uniforme e spedito ad ottenere le trasformazioni occorrenti o più opportune all'uopo. A ciò si richiamino le eguaglianze fondamentali più volte citate:

$$x^m + a\,x = b, \quad y = m.\,x^{m-1} + a,$$

$$\frac{x'}{\sqrt{y^{m-2} + \ldots. + \text{M} + \ldots.}} = \frac{1}{\sqrt{m^m\,b^{m-1} + (m-1)^{m-1}\,a^m}}$$

ove **M** ritiene il significato altrove attribuitogli

dalla prima delle quali si ha: $mb = x\,(mx^{m-1} + ma)$ e per la seconda:

$$mb = x\,[y + (m-1)\,a]$$

eseguisco la potenza $(m-3)$ di entrambi i membri della attuale con che si ha:

$$m^{m-3}.\,b^{m-3} = x^{m-3}.\,[y + (m-1)\,a]^{m-3}$$

che moltiplicata membro per membro con $[m^2\,(m-1)^2\,x^{m-1}]$ da:

$$(m-1)^2\,m^{m-2}.\,b^{m-3}.\,mx^{m-1} = m^2(m-1)^2\,x^{2m-4}.\,[y + (m-1)\,a]^{m-3} \qquad (\gamma)$$

ora si osservi che stante la seconda delle tre premesse equazioni (mx^{m-1}) è eguale ad $(y-a)$ e che dalla di lei derivata rispetto a (b) si ha:

$$\frac{y'}{x'} = m\,(m-1)\,x^{m-2},$$

cioè:

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 = m^2\,(m-1)^2\,x^{2m-4}$$

e che però la (γ) equivale alla

$$(m-1)^2\,m^{m-2}.\,b^{m-3}\,(y-a) = \left(\frac{y'}{x'}\right)^2 [y + (m-1)\,a]^{m-3}$$

dai membri della quale estraendo la radice quadrata e dividendoli quindi per

$$\sqrt{m^{m-2}\,(y-a)}$$

ne deriva:

$$(m-1)\,b^{\frac{m-3}{2}} = \frac{y'}{x'} \times \frac{\sqrt{[y + (m-1)\,a]^{m-3}}}{\sqrt{m^{m-2}\,(y-a)}}.$$

Moltiplico i membri della terza premessa rispettivamente per i membri di quest'ultima ed ho definitivamente:

$$(1)\quad \frac{y' \times \sqrt{[y + (m-1)\,a]^{-m3}}}{\sqrt{\left\{\left(y^{m-2} + m(m-2)ay^{m-3} + \ldots + \mathrm{L} + \ldots + \frac{m(m-1)^{m-2}}{2}\,a^{m-2}\right)(y-a)\,m^{m-2}\right\}}}$$

$$= \frac{(m-1)\,b^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{\{m^m.\,b^{m-1} + (m-1)^{m-1}\,a^m\}}}.$$

ove $$\mathrm{L} = \frac{m(\ldots.)\,(m-r+1)}{2.\,3.\,\ldots\,r}\,m^{r-1}\,(m-r-1)\,a^r\,y^{m-r-2}$$

nella quale equazione le variabili sono (b) ed (y) ed ambo i membri derivate esatte rispetto a (b) sicchè le variabili vi si trovano visibilmente separate.

Lo scopo di simile trasformazione di variabili è evidentemente quello di ridurre il polinomio che entra sotto radicale nel primo membro della (α) al minor grado possibile rispetto la variabile onde averne l'integrale esprimibile per più famigliari trascendenti colla condizione che la nuova variabile assunta all'uopo non trovisi legata colla antica equazione algebrica di grado eguale o superiore a quello della proposta $x^m + a.\, x = b$, chè altrimenti vana tornerebbe ordinariamente tal ricerca come quella che per risolvere l'equazione di grado (m) ci condurrebbe alla necessità di risolverne altra di eguale o superiore grado per avere l'effettivo valore dell'incognita (x).

Ma onde rilevare a qual grado ascenda il polinomio sotto radicale quadrato nel primo membro della trasformata scritta poco indietro rispetto la nuova variabile (y) bisogna considerare separatamente i due casi che (m) cioè rappresenti un numero pari ovvero uno dispari, vale a dire: che (m) sia rappresentabile dal simbolo $(2\,n)$ ovvero dal $(2n + 1)$ ove (n) designi una qualsiasi fra le cifre.

Nel primo caso l'equazione alle derivate precedente col fare $m = 2.\, n$ diviene:

$$(A)\ \frac{y'\,[y + (2\,n - 1)\,a]^{n-1}}{\sqrt{\{\, y^{2n-2} + P)\ (y^2 + Q)\ (2\,n)^{2n-2}\,\}}} = \frac{(2\,n - 1)\ b^{n-2}\ \sqrt{b}}{\sqrt{\{\,(2n)^{2n}\ b^{2n-1} + (2n - 1)^{2n-1} a^{2n}\,\}}}$$

dove il polinomio sotto il radicale nel primo membro, eseguendo la moltiplicazione indicata, riducesi al grado $(2\,n)$ rispetto la (y), cioè allo stesso grado della proposta: $x^{2n} + a\,x = b$.

Nel secondo caso l'accennata equazione alle derivate col fare $m = 2\,n + 1$ diviene:

$$(B)\ \frac{y'(y + 2na)^{n-1}}{\sqrt{\{(y^{2n-1} + P')(y - a)(2n+1)^{2n-1}\}}} = \frac{2n\, b^{n-1}}{\sqrt{\{(2n + 1)^{2n+1} \times b^{2n} + (2\,n)^{2n}\ a^{2n+1}\}}}$$

essendo

$$P' = (2n + 1)\ (2\,n - 1)\ ay^{2n-2} + \ldots + \frac{(2n + 1)\ (2n)^{2n-1}}{2}\, a^{2n-1}\ :$$

$$P = 2\,n(2\,n - 2)a\ y^{2n-3} + \ldots. + \frac{2\,n\,(2\,n - 1)}{2}^{2n-2} a^{2n-2}$$

$$Q = (2n - 2)\ a\ y - (2\,n - 1)a^2$$

dove il polinomio sotto radicale nel primo membro, eseguito il prodotto indicato, si presenta di grado $(2\,n)$ rispetto la (y), cioè di grado inferiore d'una unità da quello della proposta: $x^{2n+1} + a\,x = b$.

Una particolarità notabile comune ad entrambi le equazioni alle derivate prodotte

ultimamente si è che i rispettivi secondi membri, indipendenti dalla (y), sono integrabili per funzioni circolari o logaritmiche rispetto la variabile principale (b), come di leggeri si apprende dalla ispezione dei medesimi membri.

Integro rispetto a (b) ambo i membri della (1) indicando con $\Phi\,(y)$ la funzione di (y) integrale del primo membro e con $\psi\,(b)$ la integrale del secondo e per (k) la costante arbitraria voluta dall'integrazione, e sarà: $\Phi\,(y) = \psi\,(b) + k$ la primitiva completa della accennata equazione di cui $x^m + a\,x = b$ ne è primitiva particolare. A rinvenire quei particolari valori di (k) che rendono la completa equivalente alla particolare riprodotta ultimamente si osservi che sostituendo nella primitiva

$$\Phi\,(y) = \psi\,(b) + k$$

equivalente alla proposta a luogo della (b) e della (y) rispettivamente i loro valori $x^m + a.x$, $mx^{m-1} + a$ la si trasformerà in una identità rispetto la (x) e che però si conserverà vera anche allora che alla lettera (x) venga sostituito lo zero; ma essendo $b = a\,x + x^m$ ed $y = a + mx^{m-1}$ il supporre $x = 0$ è lo stesso che porre $b = 0$ ed $y = a$ simultaneamente, per lo che i ricercati valori particolari di (k) ne saranno porti dalla $\Phi\,(y) = \psi\,(b) + k$ col sostituire nella stessa alla (y) la (a) ed alla (b) lo zero, cioè sarà: $k = \Phi\,(a) - \psi\,(o)$ e la $\Phi\,(y) - \Phi\,(a) = \psi\,(b) - \psi\,(o)$ che si ottiene col porre nella premessa primitiva completa per (k) quel suo particolare valore trovato ultimamente equivarrà, sebbene sotto diversa forma, alla proposta:

$$x^m + a\,x = b.$$

Ponendo nelle generiche (A), (B) a luogo della lettera (n) la cifra (2) si otterrebbero le due seguenti equazioni

$$\frac{y'\,(y+3\,a)}{\sqrt{\left\{\left(y^2+8\,ay+18\,a^2\right)\left(y^2+2\,ay-3a^2\right)\right\}}} = \tfrac{1}{2} \times \frac{\tfrac{3}{2}\sqrt{b}}{\sqrt{\left\{b^3 + \frac{3^3}{4^4}a^4\right\}}}$$

$$\frac{y'\,(y+4\,a)}{\sqrt{\left\{\left(y^3+15\,ay^2+80\,a^2y+160\,a^3\right)\left(y-a\right)\right\}}} = \tfrac{2}{5} \times \frac{2\,b}{\sqrt{\left\{b^4 + \frac{4^4}{5^5}a^5\right\}}}.$$

Dalla prima delle quali integrando si ricavano le trascendenti che risolvono la equazione di quarto grado $x^4 + a\,x = b$ e dalla seconda si ottengono analogamente le trascendenti che risolvono l'equazione generale del quinto grado già ridotta col noto processo, alla forma trinomia: $x^5 + a\,x = b$; ma dalla ispezione delle sopra-segnate equazioni alle derivate di leggieri si rileva, che i rispettivi primi membri sono integrabili per trascendenti ellittiche non contenendo sotto radicale che polinomii intieri di quarto grado rispetto la variabile (y) ed i loro secondi si integrano per funzioni circolari, così che quelle equazioni non rappresentano propriamente che

due diverse relazioni fra trascendenti ellittiche e circolari, donde deriva che le equazioni generali di quarto e quinto grado si ponno risolvere per trascendenti ellittiche, come d'altronde già si conosceva dietro i lavori di *Kronecker*, *Hermite*, *Brioschi*. Se nelle eguaglianze (A) e (B) si sostituisce alla (n) il numero (3) si otterrebbero due equazioni alle derivate che integrate darebbero le trascendenti che risolvono le equazioni di sesto e settimo grado della forma trinomia più volte citate e queste dipenderebbero dalla integrazione di una funzione della (x) della forma:

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{x^6 + a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + d\,x^2 + e\,x + f}}$$

ove $\mathrm{P}(x)$ rappresenta una funzione razionale della (x) ed (a, b, c, d, e, f) quantità costanti rispetto la stessa variabile (x), altrettanto ripetesi per le equazioni dei gradi superiori che tengono la forma della generica: $x^m + a\,x = b$.

Una trasformazione di variabili analoga a quella usata, per le equazioni alle derivate prese in esame ultimamente come quelle dalla cui integrazione dipende la risoluzione per trascendenti delle equazioni della forma trinomia: $x^m + a\,x = b$, si potrebbe introdurre opportunamente eziandio in quelle alle derivate, citate in principio della attuale nota, e dalla cui integrazione si ripete la risoluzione delle equazioni algebraiche generali mediante funzioni trascendenti che hanno per derivata rispetto la variabile (x) una funzione della forma $\dfrac{\mathrm{F}(x)}{\sqrt{\varphi\,x}}$ ove $\mathrm{F}(x)$, $\varphi(x)$ rappresentano funzioni razionali della stessa lettera assunta per simboleggiare la variabile.

Da Tirano di Valtellina il giorno 8 Marzo 1863.

ALCUNE PROPRIETA' DI UNA CURVA TRASCENDENTE

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI.

MAGGIORE D'ARTIGLIERIA.



1. Nel « Manuel des candidats à l'école polytechnique par Eugene Catalan » si trova enunciato, pag. 331, il seguente:

Problema. Une infinité des circonférences sont tangentes à une même droite en un même point. On prend sur chacune d'elles, a partir de ce point, un arc de longueur constante. Quel est le lieu des extremités des ces arcs?

Soluzione.

Si rappresenti con A il punto di tangenza di tutte le circonferenze, e sia questo l'origine delle coordinate. Immaginando la circonferenza descritta con un raggio scelto per unità, si rappresenti con Am_1 il suo quadrante, che intenderemo portato su tutte le circonferenze tra loro tangenti a partire dal punto A. Per questo punto intenderemo condotti gli assi Ax, Ay, e sul primo che si trovino i centri delle successive circonferenze di raggi

$$r_1, \ r_2, \ r_3, \ \ldots \ r_n$$

e di centri

$$c_1, \ c_2, \ c_3, \ \ldots \ c_n$$

Si consideri la circonferenza di raggi r_n e su di essa a partire da A s'intenda portata la lunghezza del quadrante $\frac{\pi}{2}$: designando con m_n l'estremità dell'arco si pongano x, y le sue coordinate rettilinee.

Si dica u l'arco di raggio uno corrispondente all'arco Am_n avremo:

$$Am_n = r_n u,$$

e per condizione

$$r_n u = \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Il triangolo rettangolo $c_n \ p_n \ m_n$ ci dà:

$$y = r_n \text{ sen } u, \qquad x = r_n (1 - \cos u) \qquad (2)$$

dalle quali:

$$\frac{y}{x} = \text{tang} \frac{u}{2},$$

e quindi:

$$\frac{\text{sen}\,\frac{u}{2}}{x} = \frac{\cos\frac{u}{2}}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

onde facilmente deduciamo:

$$\text{sen}\,u = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}, \qquad \cos u = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$$

e per la (1)

$$r_n = \frac{\pi}{2\text{Arc.sen}\left(= \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}\right)},$$

che sostituito nella prima delle (2) ci dà:

$$\frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} = \text{sen}\,\frac{\pi\,x}{x^2 + y^2}. \qquad (3).$$

Da questa deduciamo ancora:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos\frac{\pi\,x}{x^2 + y^2}$$

e quindi

$$\frac{2\,x\,y}{x^2 - y^2} = \text{tang}\,\frac{\pi\,x}{x^2 + y^2}$$

ovvero

$$\frac{\pi\,x}{x^2 + y^2} = \text{Arc. tang}\left(= \frac{2\,x\,y}{x^2 - y^2}\right) \qquad (4).$$

2. L'equazioni trascendenti ed implicite (3) e (4) rappresentano la legge colla quale si succedono i punti componenti la linea voluta dal problema. Però onde studiarne più facilmente l'andamento suo faremo uso di coordinate polari rappresentando d'ora in poi per r il raggio vettore, e φ l'angolo ch'esso forma coll'asse delle ordinate, onde

$$x = r\,\text{sen}\,\varphi \quad , \quad y = r\cos\varphi.$$

Sostituiti questi valori nella (3) o (4) dopo semplici riduzioni si ottiene

$$r = \frac{\pi}{2}\,\frac{\text{sen}\,\varphi}{\varphi} \qquad (5)$$

la quale ci dà un significato geometrico del rapporto del seno all'arco.

3. Alcuni valori principali che acquista il raggio vettore.

Siccome la (5) conserva l'istesso valore e segno tanto per l'arco positivo quanto negativo, così il nostro esame si limiterà soltanto ad alcuni valori positivi di φ. Sia

$$\varphi = 0: \quad \text{si troverà } r = \frac{\pi}{2}$$

mentre è noto che per valori nulli dell'arco è:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} = 1.$$

Per $\varphi = \frac{\pi}{4}$, si ha $r = \sqrt{2}$,

come doveva essere, mentre in questo caso r è la ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di cateti eguali all'unità.

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$: risulta $r = 1$

Per $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$: si ha $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

il quale valore si potrebbe facilmente costruire.

Se si fa: $\varphi = 2 . \frac{\pi}{2}$: si ottiene $r = 0$.

Di qui risulta che il raggio vettore tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = 2 . \frac{\pi}{2}$ è andato continuamente diminuendo partendo dal massimo valore $\frac{\pi}{2}$.

Si supponga ora : $\varphi = 2 . \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$: si troverà $r = -\frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fin qui i punti della curva si erano trovati là dove l' arco positivo tagliava il raggio vettore, ora risultando l'arco di segno contrario al raggio vettore, dunque quest'ultimo deve prolungarsi oppostamente , così che la curva si trova nei due primi quadranti di centro A.

Sia ancora $\varphi = 2 . \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$: avremo $r = -\frac{1}{3}$.

Per $\varphi = 3 . \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$: risulta $r = -\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Per $\varphi = 4 . \frac{\pi}{2}$, si ottiene nuovamente $r = 0$.

Dai valori di r acquistati tra i limiti $\varphi = 2 . \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 3 . \frac{\pi}{2}$

si rileva che lorquando l'arco trovasi nel terzo quadrante il valor numerico del raggio vettore ammette un massimo.

Se ora si continua l'esame dei valori di r si vedrà che la curva si dovrà trovare nel primo e secondo quadrante perchè per

$$\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; \ = \ 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; \ = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

si ottengono pel raggio vettore

$$r = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \ = \frac{1}{5}; \ = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \ = \ 0$$

Dunque lorchè l'arco φ termina nuovamente nel primo quadrante il raggio vettore acquista un valore massimo.

Anzi che portare più a lungo questa determinazione di punti della curva rimarcheremo:

a) che la curva è simmetrica rispetto l'asse Ay, e che dopo il ramo principale, così diremo la parte compresa tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = 2 . \frac{\pi}{2}$, si compone di un numero indefinito di ovali le quali sono tutte tra loro tangenti al polo A.

b) che ammette pel raggio vettore un numero indefinito di massimi valori il primo dei quali corrisponde a $\varphi = 0$, e gli altri si trovano tra i limiti

$$2 . \frac{\pi}{2} \text{ e } 3 . \frac{\pi}{2}; \ 4 . \frac{\pi}{2}, \text{ e } 5 . \frac{\pi}{2}; \ 6 . \frac{\pi}{2}, \text{ e } 7 . \frac{\pi}{2}; \ . \ . \ . \ .$$

ed in generale tra

$$2n . \frac{\pi}{2}, \text{ e } (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$

4. Data una idea dell'andamento della linea si voglia ora assegnare quali siano valori dell'arco φ che rendono massimo il raggio vettore.

L'equazione

$$r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\text{sen}\ \varphi}{\varphi}$$

ci dà la condizione

$$\varphi \cos \varphi - \text{sen}\ \varphi = 0$$

ovvero

$$\text{tang}\ \varphi = \varphi$$

che si riduce a trovare un arco circolare che eguagli la sua tangente.

Questa equazione è stata trattata già da Eulero nel secondo tomo dell'Introduzione all'analisi infinitesimale; da Cauchy nel tomo 1.° degli esercizj di matematica pag. 298 e dal sig. Terquem nei suoi annali, fascicolo 1.° dell'anno 1856, e dessa equazione trova una rappresentazione geometrica nella nostra curva.

*

È facile dimostrare che tale equazione ammette tre radici nulle. Si pongano le serie del seno e coseno nella penultima equazione, o quella della tangente nell' ultima, e nell'uno e nell'altro caso avremo:

$$\varphi^3\left(\frac{1}{3}+\frac{2\,\varphi^2}{3.\,5}+\frac{17\,\varphi^4}{3.5.7.3}+\ldots.\right)=0.$$

dalla quale

$$\varphi^3=0;\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3\,.\,5}\varphi^2+\frac{17}{3.5.7.3}\varphi^4+\ldots=0$$

La seconda equazione formandosi di una successione indefinita di termini non può servire per assegnare gli altri valori della variabile capaci di rendere massima la proposta; quindi rimanderemo per la completa sua risoluzione ad Eulero e da esso prenderemo i valori differenti dallo zero che approssimativamente verificano

$$\operatorname{tang}\,\varphi=\varphi,$$

cioè designando φ_1, φ_2, φ_3, . . . le radici avremo

$$\varphi_1=257^\circ,\ 17',\ 12''$$
$$\varphi_2=442\,,\ 37,\ 28$$
$$\varphi_3=624\,,\ 45,\ 38$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i quali valori valgono a conferma di quanto deducemmo lorchè assegnammo alcuni punti della curva.

È facile riconoscere che

$$D^2.\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi}<0$$

onde $\qquad 0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\ \ldots.$

rendono massima la funzione.

5.° La quadratura della superficie contenuta dalla curva presenta qualche interesse, mentre per essa abbiamo una rappresentazione geometrica di un integrale definito fra i limiti 0 ed ∞ abbastanza noto per i lavori degli analisti. Tale è la funzione

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}ry}{y}=\frac{\pi}{2}.$$

Generalmente per la quadratura abbiamo

$$A=\tfrac{1}{2}\int r^2\,d\varphi+C,$$

e nel caso nostro sarà:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\int_0^\infty \frac{d\,\varphi\, \mathrm{sen}^2\,\varphi}{\varphi^2}.$$

Considerando l'integrale indefinito, ed integrando per parti avremo:

$$\int \frac{d\,\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\varphi^2} = -\frac{\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\varphi} + \int \frac{d\varphi\,\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{\varphi}.$$

Il termine $\frac{\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\varphi}$ è nullo tanto al limite zero quanto infinito: dunque

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\varphi^2} = \int_0^\infty \frac{d\varphi\,\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

6° Onde riconoscere sempre più l'andamento della curva si dica μ l'angolo formato dal raggio vettore colla tangente in un punto qualunque, e perchè

$$\mathrm{tang}\,\mu = \frac{r\,d\,\varphi}{d\,r}$$

nel caso attuale sarà:

$$\mathrm{tang}\,\mu = \frac{\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\varphi\cos\,\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi} = \frac{\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\varphi - \mathrm{tang}\,\varphi}.$$

Di qui risulta che in tutti i punti nei quali il raggio vettore è massimo, la tangente è normale ad esso, mentre per tali punti sappiamo essere

$$\mathrm{tang}\,\varphi - \varphi = 0.$$

Essendo per la sotto tangente e sotto normale

$$s_t = \frac{r^2\,d\varphi}{dr}, \qquad s_n = \frac{d\,r}{d\,\varphi}$$

avremo:

$$s_t = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\varphi\cos\,\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi}$$

$$s_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varphi\cos\,\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi}{\varphi^2}$$

onde riconosciamo che per tutti i punti di massimo la sottotangente è infinita e la sottonormale è zero.

Osserveremo ancora che la curva per tutti i possibili valori di φ rivolge la concavità al polo.

Perchè ciò abbia luogo è noto che generalmente deve verificarsi la condizione:

$$r^2 + 2\left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2\,r}{d\,\varphi^2} > 0.$$

Ora essendo:

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi}{\varphi^2}\right)$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2 \operatorname{sen}\varphi - 2\,\varphi \cos\varphi - \varphi^2 \operatorname{sen}\varphi}{\varphi^3}\right)$$

troveremo che dovrà essere positiva la funzione:

$$2\,\varphi^2 - 2\,\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$$

la quale si riduce a:

$$\varphi\,(2\,\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi) > 0$$

che è sempre verificata essendo l'arco maggiore del seno.

Poichè la curva è sempre concava rispetto il polo ne siegue che non ammette punto di flesso contrario.

7º Termineremo col dimostrare il seguente:

Teorema. Se nei punti nei quali la curva incontra l'asse delle ascisse si conducono le tangenti, queste vanno tutte a riunirsi in due punti posti sull'asse delle ordinate, l'uno dalla parte positiva, e l'altro dalla parte negativa.

Gli archi φ ai quali corrispondono punti posti sull'asse delle ascisse sono dati generalmente dalla formola $\varphi = (2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2}$ ove k può avere qualunque valore intero non escluso lo zero.

Posto questo valore di φ nell'equazione alla curva otterremo $r = \frac{\pm 1}{2\,k + 1}$.

L'istesso valore di φ si sostituisca nella formola (§. 6)

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\varphi \operatorname{sen}\varphi}{\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi},$$

ed avremo:

$$\operatorname{tang}\mu = \pm\,(2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2}$$

Ora essendo

$$r \operatorname{tang}\mu = \pm\,\frac{\pi}{2}$$

quantità costante e indipendente da k: dunque tutte le tangenti s'incontrano in due punti posti sull'asse delle ordinate ad egual distanza dall'origine delle coordinate.



Sur les volumes des surfaces podaires

PAR. T. A. HIRST.



1. Il y a vingt-quatre ans le Professeur Steiner, dans un des remarquables mémoires sur la géométrie pure qu'il présenta à l'Académie de Berlin, établit des rapports trèsgénéraux et fort intéressants entre les aires des courbes podaires dérivées de la même primitive en changeant le point (*origine* de la podaire) d'où l'on abaisse les perpendiculaires sur les plans tangents de la primitive.

Il n'est pas à ma connaissance que personne ait essayé j'usqu'ici d'étendre ses résultats au cas des surfaces podaires; c'est l'objet que je me suis proposé dans ce mémoire.

2. Avant d'entrer en matière il ne sera pas, je crois, sans utilité, pour faciliter la comparaison, de rappeler quelques uns des résultats obtenus par Steiner. (*)

« La courbe primitive étant fermée, quelle que soit d'ailleurs sa nature, le lieu des origines des podaires d'aire constante est une circonférence; et les diverses circonférences qui correspondent à différentes aires sont concentriques; le centre commun étant l'origine de la podaire d'aire minimum. »

Steiner donna à ce centre le nom de *Krummungs-Schwerpunct* par suite d'une curieuse propriété mécanique qu'il possède. Dans le fait si, dans chacun des points de la courbe primitive, on conçoit qu' une quantité de matière se trouve concentrée inversement proportionnelle au rayon de la courbure, le *Krummungs-Schwerpunct*, c'est-à-dire le centre de gravité de la courbe ainsi chargé sera précisément le centre commun des circonférences dont nous nous occupons.

En 1854, seize ans après l' apparition du mémoire de Steiner, le Prof. Raabe de Zurich (**) étendit le théorème de Steiner aux courbes non-fermées. La définition générale de l'aire d'une podaire étant l'aire de l'espace décrit par la perpendiculaire tandisque le point de contact décrit l'arc primitif, Raabe trouva que les origines de toutes les podaires de même aire sont sur une conique. Les diverses coniques qui correspondent à différentes aires sont semblables , semblablement placées et concentriques , le centre commun de toutes étant encore l' origine de la podaire d'aire minimum, et bien qu'il ne coïncide plus avec le *Krummungs-Schwerpunct* de

(*) Journal de Crelle, vol. 21, p. 57.
(**) Journal de Crelle, vol. 50, p. 193.

l'arc primitif, il s'y relie intimement, comme l'a fait voir plus récemment le Docteur Wetzig de Leipsick (*).

3. Par rapport aux surfaces il faut entendre par volume de la podaire celui du cône dont le sommet est l'origine et donc la base est cette partie de la surface podaire qui correspond à la partie donnée de la primitive. Cela posé, la suite fera voir que *quelle que soit la nature de la surface primitive, les origines des podaires de volume égal sont situées sur une surface du troisième ordre*, et plus loin on verra que *quand la surface primitive est fermée, mais d'ailleurs tout à fait arbitraire, la surface, lieu des origines des podaires d'aire constante, est de second ordre et l'ensemble de tels lieux se compose de surfaces semblables, semblablement placées et concentriques dont le centre commun est l'origine de la podaire de volume minimum.*

4. Comme il est bon d'employer la même méthode pour les deux problèmes analogues dans le plan et dans l'espace, il ne sera pas inutile de revenir un moment au problème de Steiner.

Représentons par (C) la courbe primitive, par (P) la podaire dont l'origine A a les coordonnées x, y, et par (P_0) la podaire dont l'origine O coïncide avec celle des axes des coordonnées. On peut considérer la courbe comme divisant le plan en deux parties que l'on distinguera en partie *externe* et partie *interne*; cela posé, soient α et β les deux angles positifs et moindres que π que fait avec les axes des coordonnées la normale tirée d'un point M de la courbe primitive (C) vers la partie externe. De plus, représentons par p et p_0 les perpendiculaires abaissés respectivement du point (x, y) et de l'origine sur la tangente en M de manière que leurs pieds m et m_0 soient les points sur les podaires (P) et (P_0) qui correspondent à M sur la primitive. Les angles qqi déterminent la direction de l'une ou de l'autre de ces perpendiculaires seront α et β ou $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$ selon qu'elle est tirée dans le même sens ou en sens contraire par rapport à la normale au point M, de façon que si nous regardons p et p_0 comme positifs ou négatifs, selon qu'il se présentera l'une ou l'autre de ces circonstances, nous aurons en général:

$$p = p_0 - x \cos \alpha - y \cos \beta.$$

Si, de plus, nous indiquons par d θ l'arc de la circonférence de rayon-unité, autour de l'origine, intercepté entre des rayons dont les directions coincident avec celles des normales externes aux extrémités de l'élément d s de l'arc primitif M, et que nous convenions de considérer les éléments parallèles d s et dθ comme de même signe ou de signe contraire, selon que leurs directions coincident l'une avec l'autre, ou sont opposées l'une à l'autre, les éllements corréspondant d P et d P_0 des aires des podai-

(*) Zeitschrift für Mathematik und Physik; vol. 5, 1860; p. 81.

res (P) et (P_0) seront

$$dP = \frac{p^2\, d\theta}{2}, \qquad dP_0 = \tfrac{1}{2} p_0^2\, d\theta,$$

et, par la relation précédente, nous aurons

$$2\, dP = (p_0 - x\cos\alpha - y\cos\beta)^2\, d\theta$$

d'où, par intégration, on déduit l'équation

$$P = P_0 - A_1 x - A_2 y + \tfrac{1}{2}(A_{11} x^2 + 2 A_{12} xy + A_{22} y^2),$$

dans laquelle P et P_0 indiquent les aires des deux podaires, et les coefficients ont les valeurs

$$A_1 = \int p_0\, d\theta.\ \cos\alpha, \quad A_2 = \int p_0\, d\theta.\ \cos\beta$$

$$A_{11} = \int d\theta \cos^2\alpha, \quad A_{12} = \int d\theta \cos\alpha\cos\beta, \quad A_{22} = \int d\theta \cos^2\beta,$$

qui ne dependent que de la position de l'origine de la podaire (P_0) et de la courbure de la courbe primitive. Evidemment, dans chaque cas, l'intégration doit s'étendre à tous les points de l'arc primitif.

5. La formule ci-dessus, au moyen de laquelle l'aire d'une podaire quelconque (P) peut se trouver quand l'aire d'une autre (P_0) est donnée, fait voir tout de suite que la courbe lieu des origines ($x\, y$) de podaires d'aires constantes est une conique, et que de pareils lieux constituent un système de coniques semblables, semblablement placées et concentriques, le centre commun étant le point pour lequel les intégrales A_1, A_2 s'évanouissent. Si nous supposons que l'origine de nos axes des coordonnés coïncide avec ce point, la valeur de P peut s'écrire ainsi:

$$P = P_0 + \tfrac{1}{2}\int (x\cos\alpha + y\cos\beta)^2\, d\theta;$$

d'où nous apprenons que le centre commun de toutes les coniques en question est l'origine de la podaire (P_0) d'aire minimum.

6. Tel est le théorème de Raabe; pour en déduire celui de Steiner on considère d'abord les podaires d'un arc primitif contenant un point d'inflexion et ayant des tangentes parallèles à ses extrémités. Les normales le long d'un arc semblable se composeront de paires de parallèles de même direction, mais en passant d'une extrémité à l'autre de cet arc, le signe de $d\theta$ changera, de manière que les intègrales A_{11}, A_{12}, A_{22} se composeront chacune d'éléments égaux deux à deux et de signes opposés et par conséquent s'évanouiront (*).

Maintenant si la primitive est une courbe fermée, mais d'ailleurs parfaitement arbitraire, on peut toujours la concevoir comme se composant d'arcs B de l'espèce que nous venons d'examiner et d'autres arcs C dont les directions des normales représentent, sans répétition, toutes les directions possibles autour d'un point. Mais on

(*) Le lieu des origines des podaires de même aire coincide, dans ce cas avec la droite $P = P_0 - A_1 x - A_2 y$, comme l'a démontré le premier le Docteur Wetzig.

a déjà vu que pour tout arc B les intégrales A_{11}, A_{12}, A_{22} s'évanouissent et il est aisé de voir qu'étendues aux arcs C, ces intégrales ont les valeurs

$$A_{11} = A_{22} = n\pi, \quad A_{12} = o$$

où n représente le nombre de pareils arcs, en d'autres termes le nombre de convolutions de la courbe primitive. Dans ce cas donc l'équation du n.º 4 devient:

$$P = P_0 + \frac{\pi}{2} n (x^2 + y^2) = P_0 + \frac{\pi}{2} n r^2$$

et pour les valeurs constantes de P représente une circonference autour de l'origine de la podaire d'aire minimum.

7. Afin d'éclaircir par un exemple ce qu'on doit entendre par l'aire d'une podaire, considérons un moment le cas d'une ellipse avec les demi-axes a, b. La podaire focale, comme tout le monde le sait, est une circonférence ayant l'axe majeur pour diamètre; de sorte qu'en mettant pour P, n, r^2 les valeurs πa^2, 1, $a^2 - b^2$ on trouve pour l'aire de la podaire centrale la valeur $P_0 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$ égale à l'aire du demi-cercle qui a pour rayon la droite qui joint les extrémités des axes et l'aire de toute autre podaire est: $P = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + r^2)$.

Pour une circonférence primitive nous aurons $a = b$, et $P = \pi a^2 + \frac{\pi}{2} r^2$ expression qui représente évidemment la somme des aires des deux parties dont la podaire se compose quand son origine est en dehors du cercle. Quand a s'évanouit la podaire, on le sait, est la circonférence ayant r pour diamètre. Notre dernière formule montre, néanmoins, que nous devons concevoir cette circonférence comme étant doublée. Un coup d'oeil jeté sur les expressions relatives à p et d P, du n.º 4, explique ce trait distinctif des aires des podaires. On y verra que le signe de l'accroissement d P ne dépend pas de celui de p qui change selon que l'origine de la podaire se trouve sur l'un ou l'autre côté de la tangente. Quant aux surfaces podaires dont nous allons maintenant nous occuper, c'est un cas différent.

8. Prenons x, y, z, pour coordonnées de l'origine A d'une podaire (P) d' une surface primitive (S) et, comme auparavant, indiquons par (P_0) la podaire de la même surface (S) prise par rapport à l'origine O des axes des coordonnées.

Alors si α, β, γ, sont les angles qui déterminent la direction de la normale *externe* à un point M de (S) et p, p_0 les pérpendiculaires abaissées des origines de (P) et de (P_0) sur le plan tangent en M, nous aurons la relation générale

$$p = p_0 - x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma,$$

pourvu que l'on admette que le signe de p dépend du côté du plan tangent sur lequel est située l'origine de la podaire.

De plus que $d\sigma$ soit l'élément de surface de la sphère de rayon-unité intercepté par des rayons ayant les mêmes directions que les normales externes aux points du contour de l'élément $d\,s$ en M sur la surface primitive. D'après la definition de Gauss $d\sigma$ sera aussi la *courbure totale* de l'élément $d\,s$, et aura la valeur $k\,d\,s$ où k est la *mesure de la courbure* en M, en d'autres termes la réciproque du produit des rayons de courbure principale en M. L'élémen t de volume de la podaire (P) aura évidemment la valeur

$$d\,P = \frac{p^3}{3}\,d\sigma$$

qui changera de signe avec p aussi bien qu'avec $d\sigma$. Au moyen de l'équation précédente nous aurons donc

$$dP = (p_0 - \cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma)^3\,d\,\sigma,$$

expression qui développé et intégrée prend la forme

$$P = P_0 - (A_1, A_2, A_3)\overset{\wedge}{}(x, y, z) + (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12})\overset{\wedge}{}(x, y, z)^2,$$
$$- \tfrac{1}{3}(A_{111}, A_{222}, A_{333}, A_{112}, A_{113}, A_{223}, A_{221}, A_{331}, A_{332}, A_{123})\overset{\wedge}{}(x, y, z)^3,$$

où les dix-neuf coéfficients sont independants de la position de l'origine A de la podaire (P) et représentent des intégrales doubles qui doivent s'étendre á tous les points de la surface primitive (S). De ces coéfficients il suffira d'écrire les valeurs des six suivants, les treize autres pouvant s'en déduire par les permutations de α, β, γ, conformément à celles des indices 1, 2, 3

$$A_1 = \int p_0^2\,d\sigma\cos\alpha,\quad A_{11} = \int p_0\,d\sigma\cos^2\alpha,\quad A_{111} = \int d\sigma\cos^3\alpha$$
$$A_{12} = \int p_0\,d\sigma\cos\alpha\cos\beta,\quad A_{112} = \int d\sigma\cos^2\alpha\cos\beta,\quad A_{123} = \int d\sigma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

La formule ci-dessus pour le volume de la podaire (P) prise par rapport à un point quelconque (x, y, z) montre tout de suite, comme on l'a déjà fait remarquer au n.° 3 que *les origines des podaires d'égal volume sont situées sur une surface de troisième ordre*.

9. L'analogie entre les cas des courbes et des surfaces podaires est parfaite quand ou se souvient que la surface de troisième ordre ci-dessus provient essentiellement des trois dimensions de l'espace, précisèment de la même manière que la conique, dans le cas des courbes podaires, (n.° 5) dérive des deux dimensions d'un plan. Cependant il n'est pas sans intérêt d'observer que tandisque l'hypothèse d'une *courbe* primitive fermée avait pour effet de changer seulement l'*espèce* du lieu en question, l'hypothèse d'une *surface* primitive fermée conduit à une réduction d'*ordre* du lieu dont il s'agit. Le premier effet était produit par l'égalisation des coefficients de x^2 et y^2 et l'évanouissement de celui de xy; le dernier est dû à l'évanouissement de

*

chacun des dix intégrales A_{111}, A_{112} etc..... intégrales qui, ne contenant pas p_0, ont des valeurs qui ne dependent que de la courbure de la surface primitive.

Je n'entre pas dans tous les détails que pourrait comporter la discussion de toutes les singularités possibles de courbure; je me bornerai à faire observer que la propriété ci-dessus mentionnée des dix intégrales se reconnaît aisément quand la surface primitive est non seulement fermée mais partout convexe; car puisque toutes les directions autour d'un point se trouvent alors exactement représentées par ses normales, chacun des intégrales en question représente une somme de paires d'éléments égaux et de signes opposés. Dans le cas plus général où certaines directions sont représentées plus d'une fois par les normales de la primitive, la propriété dont il s'agit peut être vérifiée par un méthode semblable à celle employée au n.º 6.

10. La primitive étant une surface fermée la forme de l'équation du n.º 8 fait tout de suite voir que les diverses surfaces (A) de second ordre qui correspondent aux podaires de volumes différents mais constants, constituent un système de surfaces semblables, semblablement placées et concentriques, leur centre commun étant le point pour lequel chacune des intégrales A_1, A_2, A_3 s'évanouit; En effet si ce point était pris pour origine des coordonnées, l'équation en question prendrait la forme

$$P = P_0 + (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{12})\!\!\!\!\!\!\!\!\overset{\wedge}{}(x, y, z)^2.$$

De cette équation ainsi écrite

$$P = P_0 + \int p_0 \,(x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2\, d\sigma$$

on peut aussi conclure, comme on l'a déjà dit au n.º 3, que le centre commun de toutes les surfaces (A) est l'origine de la podaire de volume minimum.

Quand la surface primitive fermée a elle même un centre, ce centre sera aussi le centre commun des surfaces (A); car en prenant ce point pour origine des coordonnés, chacune des intégrales A_1, A_2, A_3 se composera de paires d'éléments égaux et de signes opposés.

11. Pour éclaircir les principes précédents et, en même temps, pour faciliter les applications subséquentes nous considérerons un moment le plus simples de tous les cas, celui où la primitive est une sphère avec le rayon a. En prenant son centre pour origine des coordonnées seize des intégrales du n.º 8 s'évanouiront et les intégrales restantes A_{11}, A_{22}, A_{33} acquerront la valeur commune $\frac{4}{3}\pi a$; de manière que le volume d'une podaire quelconque (P) devient

$$P = \tfrac{4}{3}\pi a\,(a^2 + x^2 + y^2 + z^2) = \tfrac{4}{3}\pi a\,(a^2 + r^2).$$

Quand l'origine de (P) est en dehors de la sphère, la podaire se compose évidemment de deux feuilles passant par l'origine et touchant à la primitive, et il est facile de prouver directement que le volume de la podaire, comme le donne cette

formule, est la différence des volumes enfermées par ces feuilles. Quand la sphère se reduit à un point les volumes de toutes les podaires s'évanouissent, d'après la formule; de sorte que nous devons considérer la podaire d'un point comme se composant de deux feuilles sphérique coïncidentes.

De la même manière la podaire d'une surface tubulaire se composerait, en général, de feuilles distinctes qui coïncideraient quand la primitive se réduirait à une simple ligne. Bien que la surface podaire existe, par conséquent, aussi quand deux dimensions de la primitive sont supposée s'évanouir, étant encore, par definition l'enveloppe de sphères dont les diamètres sont les rayons vecteurs de la courbe, son volume doit être regardé comme ayant une valeur nulle.

Toutefois le cas est différent lorsqu'une seule des trois dimensions de la primitive est supposée s'évanouir. La podaire d' une pareille surface (S_1) se composerait de *deux* feuilles qui coïncideraient avec la podaire ordinaire (P_1) de (S_1) et de la podaire (P) de la courbe (C) qui forment le contour de la primitive (S_1). Le volume de la podaire composée serait pourtant celui de la podaire (P) du contour (C); ce dernier volume, par conséquent, doit, si on l'évalue convenablement, être déductible de nos formules générales.

Cependant il faut observer que bien que la forme de la podaire d'une courbe (C) soit invariable, on doit estimer différemment son volume selon la nature de la surface à deux dimensions (S_1) qui a la courbe (C) pour contour. Pour plus de clarté il conviendra de considérer la podaire d'une courbe non seulement comme une enveloppe, mais encore comme le lieu d'une circonférence dont la grandeur varie en même temps que son plan pirouette autour d'un point fixe, origine de la podaire. Dans le fait cette circonférence est la *caractéristique* de la podaire; son plan est perpéndiculaire à la tangente au point M de la courbe (C), et ses cordes tirées par l'origine sont les perpendiculaires abaissées sur les divers plans tangents de (S_1) au point M de son contour.

En nous rappellant maintenant la convention du n.° 8 relativement aux signes de ces perpendiculaires et la relation qui existe entre ces signes et ceux des éléments de volumes correspondants, on en conclut facilement que le volume de la podaire (P) sera la différence des volumes des surfaces engendrées par deux arcs déterminés sur la caractéristique par la perpendiculaire p' abaissée sur le plan tangent ordinaire de (S_1) au point M.

Le cas le plus important, et le seul que nous examinerons plus en détail, se présent quand la surface (S_1) coïncide avec la développable dont (C) est l'arête de rebroussement. La perpendiculaire p' coïncide alors avec celle qui est abaissée sur le plan osculateur de la courbe primitive (C), perpendiculaire qui est l'intersection des plans de deux caractéristiques consécutives et le lieu de son extrémité est evi-

demment l'arête de rebroussement de la surface podaire (P) et en même temps la courbe en laquelle se résout, comme on le sait, la surface podaire de la développable (S_1). Le volume de la podaire (P) a maintenant la définition la plus simple et les intégrales doubles du n.° 8, au moyen desquelles ce volume peut s'exprimer, se réduisent facilement à des integrales simples.

12. Pour effectuer cette réduction on exprime d'abord une perpendiculaire p_0 quelconque, au moyen de p' la perpendiculaire sur le plan osculateur (C), et de p la perpendiculaire sur le plan rectifiant qui sera évidemment à angles droits par rapport à p' et parallèle à la normale principale de C. Dans le fait p_0, p' et p étant des cordes tirées par une même point de la circonférence, on trouve de suite

$$p_0 = p' \cos\varphi + p \sin\varphi$$

où φ est l'angle entre p' et p_0.

De plus les angles α, β, γ qui déterminent la direction de p_0 peuvent de même s'exprimer au moyen de ceux qui appartiennent à p' et p les cosinus des quels nous représentons par λ', μ', ν', et λ, μ, ν respectivement. En effet les projections sur p_0, p' et p d'une droite quelconque partant de la même origine O sont évidemment encore des cordes d'une circonférence qui passe par O; de sorte qu'en opérant de cette manière sur l'unité de longueur comptée à partir de l'origine sur chaque axe des coordonnées, on obtient sans peine les relations suivantes

$$\cos\alpha = \lambda' \cos\varphi + \lambda \sin\varphi,$$
$$\cos\beta = \mu' \cos\varphi + \mu \sin\varphi,$$
$$\cos\gamma = \nu' \cos\varphi + \nu \sin\varphi.$$

En dernier lieu représentant par $d\theta$ l'angle entre les plans de deux caractéristiques consécutives, en d'autres termes l'angle de contingence de la courbe primitive, l'élément de surface $d\sigma$ sur la sphère de rayon unité aura la valeur

$$d\sigma = \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Nous n'avons plus qu'à substituer les valeurs ci-dessus dans les diverses intégrales du n.° 8 et à effectuer l'intégration selon φ entre les limites o et π, intégration dans laquelle p, p' λ, λ', etc... restent constantes. Cela se fait aisément; les dix-neuf résultats s'obtiennent par voie de permutations λ, λ'; μ, μ' et ν, ν' conformément à celles des indices correspondantes 1, 2, 3, des six expressions suivants:

$$A_1 = \frac{\pi}{8} \int (3\lambda p^2 + 2\lambda' pp' + \lambda p'^2)\, d\theta,$$

$$A_{11} = \frac{\pi}{8} \int [(3\lambda^2 + \lambda'^2) p + 2\lambda\lambda' p']\, d\theta,$$

$$A_{23} = \frac{\pi}{8} \int [(3\mu\nu + \mu'\nu')\, p + (\mu\nu' + \mu'\nu)\, p'] \, d\,\theta$$

$$A_{111} = \frac{3\pi}{8} \int \lambda(\lambda^2 + \lambda'^2) \, d\,\theta$$

$$A_{112} = \frac{\pi}{8} \int [(3\,\lambda^2 + \lambda'^2)\, \mu + 2\,\lambda\lambda'\,\mu'] \, d\,\theta$$

$$A_{123} = \frac{\pi}{8} \int (3\,\lambda\,\mu\,\nu + \lambda'\,\mu'\,\nu + \lambda\,\mu'\,\nu' + \lambda'\,\mu\,\nu') \, d\,\theta.$$

Au moyen des équations de la courbe les neuf quantités comprises dans ces intégrales peuvent facilement s'exprimer comme fonctions d'une seule variable ; cela fait, l'intégration dans chaque cas doit s'étendre à tous les points de la courbe primitive (C).

13. Je n'entre pas ici dans toutes les questions qui se présentent d'elles mêmes relativement soit à la nature de la surface de troisième ordre lieu des origines des podaires de l'espèce dont nous nous occupons, qui ont un volume constant, soit aux conditions sous lesquelles ce lieu se réduit à une surface de second ordre. Je supprime aussi toute recherche relative à la position de l'origine de la podaire de volume minimum. Pour passer tout de suite au cas d'une courbe *plane* primitive dans lequel chaque podaire peut être regardée comme une surface engendrée par une circonférence qui passe par deux points fixes et dont la grandeur varie en même temps que son plan tourne autour de la droite qui joint ces points. Prenant le plan de la primitive pour plan des coordonnées x, y on a évidemment

$$p' = o, \lambda' = \mu' = \nu = o, \nu' = 1,$$

et conséquemment

$$A_3 = A_{23} = A_{31} = A_{113} = A_{223} = A_{333} = A_{123} = o$$

$$A_1 = \tfrac{8}{3}\pi \int \lambda\, p^2 \, d\,\theta, \;\; A_2 = \tfrac{3}{8}\pi \int \mu\, p^2 \, d\,\theta,$$

$$A_{11} = \tfrac{3}{8}\pi \int \lambda^2\, p \, d\theta, \; A_{12} = \tfrac{3}{8}\pi \int \lambda\,\mu\, p \, d\theta, \; A_{22} = \tfrac{3}{8}\pi \int \mu^2\, p \, d\theta, \; A_{33} = \tfrac{\pi}{8} \int p \, d\,\theta,$$

$$A_{111} = \tfrac{3}{8}\pi \int \lambda^3 \, d\theta, \; A_{222} = \tfrac{3}{8}\pi \int \mu^3 \, d\theta$$

$$A_{112} = \tfrac{3}{8}\pi \int \lambda^2\,\mu \, d\theta, \;\; A_{221} = \tfrac{3}{8}\pi \int \lambda\,\mu^2 \, d\theta$$

$$A_{331} = \tfrac{\pi}{8} \int \lambda \, d\theta, \;\; A_{332} = \tfrac{\pi}{8} \int \mu \, d\theta.$$

Quand la primitive est une courbe fermée les six dernières intégrales s'évanouissent et le lieu des origines de podaires d'égal volume se change de nouveau en une surface de second ordre. L'origine de la plus petite podaire évidemment ne coïncide

pas en général avec le *Krummungs-Schwerpunct* puisque A_1, A_2 n'ont plus les mêmes valeurs que dans le n.° 4; elle coïncide néanmoins avec le centre de la primitive quand cette courbe possède un pareil point. Par exemple, pour une circonférence primitive (a) ou trouvera, en prenant son centre pour origine, qu'à l'exception de trois, les intégrales A s'evanouissent et que ces trois acquièrent les valeurs

$$A_{11} = A_{22} = \frac{3}{8}\pi^2 a, \qquad A_{33} = \frac{1}{4}\pi^2 a$$

La podaire du plus petit volume (P_0) est ici une surface engendrée par la rotation d'une circonférence de rayon $\frac{a}{2}$ autour d'une de ses tangentes dont le volume se trouve directement être égal a $\frac{1}{4}\pi^2 a^3$; de sorte que le volume de toute autre podaire sera, d'après le n.° 8

$$P = \frac{\pi^2}{8} a\,(3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2a^2),$$

et le lieu des origines de podaires de même volume un ellipsoïde de rotation. Reprenons maintenant le cas des surfaces.

14. Nous nous proposons de considérer ensuite les podaires de l'ellipsoïde qui, depuis la publication des recherches de Fresnel sur la lumière, ont offert un intérêt tout particulier. En y appliquant les résultats, les résultats précédents on arrivera à plusieurs résultats nouveaux.

En vue de cette application et pour faire suite au sujet du n.° 10 ajoutons que quand la surface primitive est symétrique par rapport à trois plans rectangulaires les intégrales A_{12}, A_{23}, A_{31} s'évanouissent en prenant ces plans de symétrie pour plans des coordonnées. Par suite de cette propriété qui est évidente à la seule inspection des valeurs du n.° 8, l'expression du volume d'une podaire quelconque prend la forme très simple

$$P = P_0 + A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2.$$

Si, de plus, la surface primitive est partout convexe les coéfficients

$$A_{11} = \int p_0\, d\sigma \cos^2\alpha, \quad A_{22} = \int p_0\, d\sigma \cos^2\beta, \quad A_{33} = \int p_0\, d\sigma \cos^2\gamma,$$

seront manifestement des sommes d'éléments de même signe de sorte que *le lieu des origines de podaire d'égal volume sera un ellipsoide* dont les axes coïncideront avec les axes de symétrie de la surface primitive.

15. Pour l'ellipsoïde primitif

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1,$$

dont les carrés des demi-axes écrits dans l'ordre descendant de grandeur sont, d'après notre supposition

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3,$$

nous avons les formules bien connues:

$$\cos\alpha = \frac{x}{a_1} p_o, \quad \cos\beta = \frac{y}{a_2} p_o, \quad \cos\gamma = \frac{z}{a_3} p_o$$

$$\frac{1}{p_-^2} = \frac{x^2}{a_2^4} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = \frac{1}{a_1 \cos^2\alpha + a_2 \cos^2\beta + a_3 \cos^2\gamma}$$

$$3\,\mathrm{P}_o = \int p_o{}^3\, d\sigma = \frac{1}{a_1\, a_2\, a_3} \int p_0^7\, ds\,.$$

Ces deux expressions équivalentes pour le volume de la podaire centrale, ou podaire minimum, ont leurs avantages. Dans la seconde on suppose que l'intégrale s'étend à les points de l'ellipsoïde primitif ; dans la première , après avoir exprimé α, β, γ, puis p_o, au moyen de deux variables indépendentes convenables, l'intégration s'étendra à tous les points de la sphère de rayon-unité. Les limites, dans le dernier cas, ne comprendront pas les axes et par voie de différentation aura evidemment

$$\frac{d\,\mathrm{P}_o}{d\,a_1} = \int \mathrm{p}_0^2\, \frac{d\,p_o}{d\,a_1} d\,\sigma = \tfrac{1}{2} \int d\sigma\, p_o \cos^2\alpha = \frac{\mathrm{A}_{11}}{2}\,,$$

et des formules semblables pour A_{22} et A_{33} ; de sorte que le volume d'une podaire quelconque se trouvera donné par la formule

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_o + 2\frac{d\,\mathrm{P}_o}{d\,a_1} x^2 + 2\frac{d\mathrm{P}_o}{d\,a_2} y^2 + 2\frac{d\mathrm{P}_o}{d\,a_3} z^2;$$

volume qu'on obtiendra conséquemment par simple différentation de l'expression de P_o (1); on observera au même temps que P_o étant une fonction homogène de a_1, a_2, a_3 de l'ordre $\frac{3}{2}$, satisfait d'une manière identique à la relation

$$3\ \mathrm{P}_o = 2\ a_1 \frac{d\ \mathrm{P}_o}{d\ a_1} + 2\ a_2 \frac{d\ \mathrm{P}_o}{d\ a_2} + 2\ a_3 \frac{d\ \mathrm{P}_o}{d\ a_3}\,,$$

ou retenant les symboles plus commodes A_{11}, A_{22}, A_{33}

$$3\ \mathrm{P}_o = a_1\ \mathrm{A}_{11} + a_2\ \mathrm{A}_{22} + a_3\ \mathrm{A}_{33}$$

16. De cette formule et de la formule générale relative à P, n.° 14 on peut tout de suite tirer une relation très-simple entre les volumes de la podaire centrale et celui de toute autre dont l'origine se trouve sur l'une des diagonales du parallélipipède rectangulaire circonscrit à l'ellipsoïde primitif. Car les coordonnées d'un point quelconque sur une pareille diagonale se trouvent données par les équations

(1) La valeur de P_o exprimée en intégrales elliptiques fut obtenue pour la première fois par Tortolini en 1844. L'expression équivalente à laquelle nous allons arriver possède, du reste, tous les avantages de symétrie que fait nécessairement perdre l'introduction des intégrales elliptiques.

$$\frac{x^2}{a_1} = \frac{y^2}{a_2} = \frac{z^2}{a_3} = \frac{r^2}{a},$$

ou r est le rayon vecteur du point en question et $a = a_1 + a_2 + a_3$ le carré de la demi-diagonale dont il s'agit. En substituant ces valeurs les deux formules relatives à P et à P_0 donnent

$$P = \frac{a + 3\,r^2}{a} P_0$$

Quand $r^2 = a$, l'origine de (P) coïncide avec un des sommets du parallélipipède, et lorsque $3\,r^2 = a$ c'est un point sur l'ellipsoide, de sorte que l'on peut dire: *le volume de la podaire dont l'origine coincïde avec un quelque des sommets du parallélepipède rectangulaire circonscrit à l'ellipsoïde primitif est quatre fois celui de la podaire centrale, et le double de celui de la podaire à l'un quelconque des huit points où l'ellipsoïde se trouve percé par les diagonales du parallélépipède.*

17. Afin d'établir d'autres relations nous représenterons généralement par x_i, y_i, z_i et r_i les coordonnées et le rayon vecteur d'un point quelconque (i) dans l'espace, et nous considérerons d'abord les podaires (P_1), (P_2), (P_3) prises par rapport aux extrémités (1), (2), (3) de trois diamètres conjugués quelconques d'une surface (S^1) du second ordre concentrique à (S) et semblablement placée. Les demi-axes carrès de (S^1) étant a_1^1, a_2^1, a_3^1 on sait que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_1^1,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = a_2^1,$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = a_3^1;$$

de sorte qu'en substituant successivement dans la formule générale de P, n.° 14, les coordonnées des trois points que nous considérons, et en ajoutant ensemble les équations qui en résultent, nous aurons

$$P_1 + P_2 + P_3 = 3\,P_0 + A_{11}\,a_1^1 + A_{22}\,a_2^1 + A_{33}\,a_3^1 = 3\,\overline{P}.$$

La podaire $(\overline{P})$ dont le volume est mis ici égal à la somme *constante* des trois autres volumes est, comme on le voit tout de suite, d'après la même formule générale relative à P, n.° 14, celle dont l'origine se trouve au point

$$\left(\sqrt{\frac{a_1^1}{3}},\ \sqrt{\frac{a_2^1}{3}},\ \sqrt{\frac{a_3^1}{3}}\right)$$

où la surface (S') est percée par la diagonale de son parallélepipède circonscrit. Puis si l'on convient de prendre le volume d'une podaire positivement ou négativement selon que le diamètre, sur lequel se trouve son origine, rencontre la surface (S')

en des points réels ou imaginaires, on pourra dire que *la somme algébrique des volumes de trois podaires de l'ellipsoïde dont les origines sont aux extrémités de trois diamètres conjugués d'une surface* (S^1) *de second ordre concentrique à l'ellipsoïde et semblablement placée est constante et égale à trois fois le volume de la podaire au point où cette surface* (S^1) *est rencontrée par une des diagonales de son parallélepipède rectangulaire circonscrit.*

On peut aussi ajouter que cette somme des volumes des trois podaires correspondantes aux extrémités des diamètres conjugués est non seulement invariable pour une même surface (S^1) mais pour toutes les surfaces de second ordre concentriques et semblablement placées qui sont inscrites dans des parallélepipèdes rectangulaires inscrits eux mêmes dans une des surfaces (A), lieu des origines de podaires de même volume. Car les axes de toutes les surfaces (S^1) pareilles satisfont évidemment à la condition

$$A_{11}\, a_1^{1} + A_{22}\, a_2^{1} + A_{33}\, a_3^{1} = \text{const.}$$

18. Quand la surface (S^1) est non seulement concentrique à l'ellipsoïde primitif et semblablement placée, mais lui est encore semblable, les diagonales de leurs parallélepipèdes rectangulaires circonscrits coïncident en direction; de sorte que par le n.º 16 et mettant $3\,r^2 = a_1^{1} + a_2^{1} + a_3^{1} = a^{1}$, la relation du n.º 17 devient

$$P_1 + P_2 + P_3 = 3\,\bar{P} = 3\,\frac{a + a^1}{a}\,P_0$$

Quand $a^1 = a$, c'est-à-dire quand la surface (S^1) coïncide avec l'ellipsoïde primitif, on apprend que *la somme des volumes de trois podaires dont les origines sont aux extrémités de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde primitif, est constante et égale à six fois le volume de la podaire centrale.*

Les trois podaires dont les origines se trouvent aux sommets de l'ellipsoïde primitif sont comprises dans ce théorème, comme cas particulier.

19. Quand la surface (S^1) est une sphère, les diamètres conjugués sont à angles droits les uns par rapport aux autres, et les diagonales du parallélepipède (cube) circonscrit sont également inclinées vers les axes de l'ellipsoïde, d'où il suit que la *somme des volumes des podaires de l'ellipsoïde dont les origines sont les trois sommets d'un triangle tri-rectangulaire quelconque sur une sphère concentrique, est constante et égale à trois fois le volume de la podaire dont l'origine sur la sphère est également éloignée des axes de l'ellipsoïde.* La valeur de cette somme constante est:

$$3\,P_0 + r^2\,(A_{11} + A_{22} + A_{33})$$

20. En dernier lieu quand la surface (S^1) est une ellipsoïde confocal à la surface primitive ou peut mettre

*

$$a_1^1 - a = a_2^1 - a_2 = a_3^1 - a_3 = k^2$$

et substituer les valeurs de a_1^1, a_2^1, a_3^1 dans la dernière équation du n.° 17. De cette manière on trouve

$$P_1 + P_2 + P_3 = 6\, P_0 + k^2 (A_{11} + A_{22} + A_{33})$$

En comparant cette expression avec celle qui se trouve à la fin du dernier n.° 19 on apprend que *la somme des volumes des trois podaires dont les origines sont aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde confocal à la surface primitive, est égale au double de la somme des volumes de trois podaires prises par rapport aux extrémités des trois diamètres orthogonaux quelconques d'une sphère concentrique, dont le rayon carré est la moitié de la différence des carrés des demi-axes des surfaces confocales.* Ce théorême général comprend comme cas particulier ($k = 0$) celui déjà donné au n.° 18.

21. De la formule fondamentale ainsi écrite:

$$H = \frac{P - P_0}{r^2} = A_{11} \cos^2 \lambda + A_{22} \cos^2 \mu + A_{33} \cos^2 \nu$$

On peut déduire, en outre, d'autres théorèmes et, de plus, une construction pour le volume de la podaire par rapport à un point quelconque. En premier lieu nous apprenons que la grandeur linéaire H est constante pour tous les points d'une même droite qui passe par le centre de l'ellipsoïde; et, en second lieu, que H est la limite vers laquelle $\frac{P}{r^2} = h$ s'approche à mesure que l'origine de la podaire s'écarte du centre. Cette quantité linéaire h étant la hauteur d'un parallélepipède de même volume que la podaire et qui a pour base le carré construit sur le rayon vecteur; nous nous proposons, pour faciliter l'énonciation, de lui donner le nom d'*élévation podaire*, au point que nous considérons. Ainsi H sera l'élévation podaire à l'infini sur la droite (λ, μ, ν); A_{11}, A_{22}, A_{33}, respectivement les élévations podaires à l'infini sur les trois axes et $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ celle sur la droite également inclinée sur le trois axes et $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ celle sur la droite également inclinée sur les trois axes de l'ellipsoïde.

Concevez maintenant une podaire centrale $(\dot{P}_0)$ d'un ellipsoïde $(\dot{S})$ concentrique à l'ellipsoïde primitif, (S), semblablement placée et telle que ses demi-axes carrés soient respectivement proportionnels aux élévations A_{11}, A_{22}, A_{33}. Il est clair, d'après la dernière équation, que les carrés construits sur les rayons vecteurs de $(\dot{P}_0)$ seront proportionnels aux élévations podaires à l'infini sur ces rayons. L'élévation podaire à l'infini étant ainsi déterminée par la podaire auxiliare (A_{11}), on construira d'abord le parallélepipède égal au volume à l'excès $P - P_0$ du volume de la podaire

(P) sur celui de la podaire P_0; puis, pourvu que P_0 soit donné, la construction de P n'offre plus de difficulté.

22. Entre les élévations podaires aux divers points de l'espace on pourrait établir de nombreux rapports; nous ne nous arrêterons qu'à un ou deux. Indiquons par (1), (2), (3) les extrémités de trois diamètres quelconques, à angles droits l'un par rapport à l'autre, de la surface (S^1) considérée plus haut n.° 17. L'addition des trois formules semblables à celles du n.° 21 qui se rapportent à ces extrémités donne:

$$h_1 + h_2 + h_3 = P_0\left(\frac{1}{a_1^1}+\frac{1}{a_2^1}+\frac{1}{a_3^1}\right) + A_{11} + A_{22} + A_{33} = 3\,\bar{h},$$

puisque, d'après un théorème bien connu,

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a_1^1}+\frac{1}{a_2^1}+\frac{1}{a_3^1}.$$

L'élévation podaire h qui est ici mise égale à la moyenne arithmétique des trois autres, correspond au point sur la surface (S^1) qui est également éloigné de ses trois axes, comme on peut aisément s'en convaincre en posant dans la formule du n.° 21

$$\cos^2\lambda = \cos^2\mu = \cos^2\nu = \tfrac{1}{3},$$

et en observant que pour un tel point

$$\frac{3}{r^2} = \frac{1}{a_1^1}+\frac{1}{a_2^1}+\frac{1}{a_3^1}.$$

De là résulte que *la somme algébrique des trois élévations podaires aux extrémités de trois diamètres orthogonaux quelconques d'une surface* (S^1) *de second ordre, concentrique à l'ellipsoïde et semblablement placée est constante et égale à trois fois l'élévation podaire à l'extrémité d'un diamètre de cette surface* (S^1) *également inclinée sur ses axes.*

On peut aussi ajouter que *cette somme n'est pas seulement invariable pour une seule et même surface* (S^1), *mais encore pour toutes les surfaces concentriques et semblablement placées qui passent par un même point également eloigné des axes de l'ellipsoïde primitif.*

Quand la surface (S^1) est une sphère les élévations podaires à ses divers points sont évidemment proportionnelles aux volumes des podaires ayant ces points pour origines; de sorte que l'on obtient de nouveau le théorème du n.° 19.

23. Avant de passer au calcul du volume d'une podaire quelconque de l'ellipsoïde nous pouvons remarquer, en dernier lieu, que pour quatre origines quelconques situées, sur une surface (S^1) concentrique à l'ellipsoïde et semblablement placée, les volumes des podaires correspondantes satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} P_1, & x^2, & y_1^2, & z_1^2 \\ P_2, & x_2^2, & y_2^2, & z_2^2 \\ P_3, & x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 \\ P_4, & x_4^2, & y_4^2, & z_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dont nous ne nous proposons pas, cependant, d'étudier en détail la signification géométrique.

24. Nous allons maintenant faire voir comment le volume P d'une podaire quelconque peut s'exprimer au moyen des différences partielles de l'integrale définie

$$V = \int_0^\infty \frac{d\,v}{\sqrt{(v + a_1)\,(v + a_2)\,(v + a_3)}}.$$

On sait bien que quand les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface donnée sont regardées comme fonctions de deux variables indépendantes φ et v, on a les expressions équivalentes suivants pour trois fois le volume du tétraèdre dont le sommet se trouve à l'origine des coordonnées, et la base est l'élément de surface $d\,s$ enfermé entre les courbes $\varphi =$ const, $v =$ const. et celles qui leur sont respectivement consécutives.

$$p_0\, d\,s = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{d\,x}{d\,\varphi}, & \frac{d\,y}{d\,\varphi}, & \frac{d\,z}{d\,\varphi} \\ \frac{d\,x}{d\,v}, & \frac{d\,y}{d\,v}, & \frac{d\,z}{d\,v} \end{vmatrix} d\,\varphi\, dv.$$

25. Maintenant l'équation de l'ellipsoïde primitif sera évidemment satisfaite identiquement par les valeurs

$$x^2 = a_1 \frac{v}{v + a_3} \cos^2 \varphi, \qquad y^2 = a_2 \frac{v}{v + a_3} \sin^2 \varphi, \qquad z^2 = a_3 \frac{a_3}{v + a_3},$$

qui, lorsqu'elles sont substituées dans le déterminant ci-dessus et dans l'expression pour p_0 donnée au n.° 15, conduisent tout de suite aux expressions

$$p_0\, d\,s = - \frac{a_3 \sqrt{(a_1\, a_2)}}{2} \; \frac{d\,v\; d\varphi}{(v + a_3)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{p_0^2} = \left\{ \frac{v + a_1}{a_1} \cos^2 \varphi + \frac{v + a_2}{a_2} \sin^2 \varphi \right\} \frac{1}{v + a_3}.$$

En substituant ces valeurs dans la seconde expression de P_0 du n.° 15, en étendant l'intégration à tous les points de l'octante ellipsoïdale, et en prenant huit fois le résultat nous trouvons

$$3\,P_0 = -\frac{4}{\sqrt{(a_1\,a_2)}}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(v+a_3)^{\frac{3}{2}}\,d\,v\,d\,\varphi}{\left\{\frac{v+a_1}{a_1}\cos^2\varphi+\frac{v+a_2}{a_2}\sin^2\varphi\right\}^3};$$

par différentation on en déduit

$$A_{33} = 2\,\frac{d P_0}{d\,a_3} = -\frac{4}{\sqrt{a_1\,a_2}}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(v+a_3)^{\frac{1}{2}}\,d\,v\,d\,\varphi}{\left\{\frac{v+a_1}{a_1}\cos^2\varphi+\frac{v+a_2}{a_2}\sin^2\varphi\right\}^3};$$

L'intégration par rapport à φ ne présente pas de difficulté et elle donne, une fois effectuée, le résultat

$$A_{33} = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty\left\{\frac{3\,a_1^2}{(v+a_1)^2}+\frac{2\,a_1\,a_2}{(v+a_1)\,(v+a_2)}+\frac{3\,a_2^2}{(v+a_2)^2}\right\}\frac{(v+a_3)\,dv}{\sqrt{R}},$$

où nous avons mis, pour abréger,

$$R = (v+a_1)\,(v+a_2)\,(v+a_3).$$

26. On peut donner une forme plus commode à l'expression précédente de A_{33} en introduisant les différences partielles des deux intégrales définies symétriques.

$$V = \int_0^\infty\frac{d\,v}{\sqrt{R}},\quad W = \int_0^\infty\frac{v\,d\,v}{\sqrt{R}}$$

Dans le fait si, pour abréger, nous indiquons les résultats des opérations

$$\frac{d}{d\,a_1},\quad\frac{d}{d\,a_2},\ldots\frac{d^2}{d\,a_1^2},\quad\frac{d^2}{d\,a_1 d\,a_2}\ldots$$

exécutées sur une quantité quelconque, en ajoutant au symbole de cette quantité les indices 1, 2, ... 11, 12 ...., respectivement, nous aurons:

$$\tfrac{1}{\pi}\,A_{33} = a_3\,(a_1^2\,V_{11}+2\,a_1\,a_2\,V_{12}+a_2^2\,V_{22})+a_1^2\,W_{11}+2\,a_1\,a_2\,W_{12}+a_2^2\,W_{22},$$

ce qui peut aisément se vérifier.

27. Toutefois on peut réduire cette expression à une autre plur simple, contenant V_1, V_2, V_3 seulement. Pour efféctuer cette réduction, j'observe qu'au moyen de l'identité

$$\frac{d\,R}{d\,v} = R_1 + R_2 + R_3$$

on a $W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{1}{2}\int_0^\infty (R_1+R_2+R_3)\,\frac{v\,d\,v}{\sqrt{R^3}} = \int_0^\infty v\,d\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$

d'où, par une intégration partielle, on déduit

$$W_1 + W_2 + W_3 = -\,V,$$

puisque $\frac{v}{\sqrt{R}}$ s'evanuit évidemment aux deux limites. De cette expression on obtient, encore par différentation, les relations

$W_{11}+W_{12}+W_{13}=-V_1,\ W_{12}+W_{22}+W_{23}=-V_2,\ W_{13}+W_{23}+W_{33}=-V_3,$

En traitant de même l'intégrale V on trouve

$$V_1+V_2+V_3=-\frac{1}{\sqrt{(a_1 a_2 a_3)}}$$

$$=-2a_1(V_{11}+V_{12}+V_{13})=-2a_2(V_{12}+V_{22}\ V_{23})=-2a_3(V_{13}+V_{23}+V_{33})$$

De plus puisque

$$V_1=-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{v+a_1}\frac{d\,v}{\sqrt{R}}\text{, etc.}$$

$$V_{12}=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{(v+a_1)\ (v+a_2)}\frac{d\,v}{\sqrt{R}}\text{, etc.}$$

on à en résolvant les coefficients de $\frac{d\,v}{\sqrt{R}}$ en V_{12}, V_{23}, V_{33} en fractions partielles,

$$2\,(a_1-a_1)\,V_{12}=V_1-V_2\,,$$
$$2\,(a_2-a_3)\,V_{23}=V_2-V_3\,,$$
$$2\,(a_3-a_1)\,V_{31}=V_3-V_1\,;$$

et de la même manière on trouve

$$2\,(a_1-a_2)\,W_{12}=a_2\,V_2-a_1\,V_1\,,$$
$$2\,(a_2-a_3)\,W_{23}=a_3\,V_3-a_2\,V_2\,,$$
$$2\,(a_3-a_1)\,W_{31}=a_1\,V_1-a_3\,V_3.$$

28. Maintenant les quatre derniers groupes d'équations suffisent évidemment pour l'expression de A_{33}, n.° 26, au moyen de V_1, V_2, V_3; et de là, par simples permutations des indices, on peut obtenir les valeurs de A_{11}, A_{22}. Après des simplifications convenables les résultats peuvent s'écrire ainsi:

$$A_{11}=-\tfrac{\pi}{2}\left[(a_2+a_3)\,a_1\,V_1+(a_3+2\,a_1)\,a_2\,V_2+(2\,a_1+a_2)\,a_3\,V_3\right],$$
$$A_{22}=-\tfrac{\pi}{2}\left[(2\,a_2+a_3)\,a_1\,V_1+(a_3+a_1)\,a_2\,V_2+(a_1+2\,a_2)\,a_3\,V_3\right],$$
$$A_{33}=-\tfrac{\pi}{2}\left[(a_2+2\,a_3)\,a_1\,V_1+(2\,a_3+a_1)\,a_2\,V_2+(a_1+a_2)\,a_3\,V_3\right].$$

De ces valeurs des élévations podaires à l'infini sur chacun des axes (n.° 21) on obtient, par addition, la valeur suivante de l'élévation podaire à l'infini sur une droite également inclinée sur ces axes:

$$(A_{11}+A_{22}+A_{33})=-2\pi\left[(a_2+a_3)\,a_1V_1+(a_3+a_1)\,a_2V_2+(a_1+a_2)a_3V_3\right].$$

Puis, de la relation à la fin du n.° 15, nous déduisons sans peine l'expression suivante du volume de la podaire centrale de l'ellipsoïde:

$$P_0 = -\frac{\pi}{2}[m_1 a_1 V_1 + m_2 a_2 V_2 + m_3 a_3 V_3],$$

où l'on a mis, pour abréger, $a = a_1 + a_2 + a_3$ et

$$3\,m_1 = a\,(a_2 + a_3) + a_2^2 + a_3^2\,,$$

$$3\,m_2 = a\,(a_3 + a_1) + a_3^2 + a_1^2\,,$$

$$3\,m_3 = a\,(a_1 + a_2) + a_1^2 + a_2^2.$$

En dernier lieu pour le volume d'une podaire quelconque (P) dont l'origine A est au point (x, y, z), je trouve la valeur

$$P = -\frac{\pi}{2}[M_1 a_1 V_1 + M_2 a_2 V_2 + M_3 a_3 V_3],$$

en mettant encore, pour abréger, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et

$$3\,M_1 = (a_2 + a_3)\,(3r_2 + a) + 3\,(a_2 y^2 + a_3 z^2) + a_2^2 + a_3^2\,,$$

$$3\,M_2 = (a_3 + a_1)\,(3r^2 + a) + 3\,(a_3 z^2 + a_1 x^2) + a_3^2 + a_1^2\,,$$

$$3\,M_3 = (a_1 + a_2)\,(3r^2 + a) + 3\,(a_1 x^2 + a_2 y^2) + a_1^2 + a_2^2.$$

Le volume de l'ellipsoïde primitif exprimé par V_1, V_2, V_3 est

$$S = -\frac{4}{3}\pi\,[a_2 a_3 a_1 V_1 + a_3 a_1 a_2 V_2 + a_1 a_2 a_3 V_3],$$

comme cela résulte évidemment de l'une des relations du n.° 27.

L'intégrale V elle-même ainsi exprimée a la valeur

$$V = -2\,[a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3],$$

parceque V est une fonction homogène de a_1, a_2, a_3 du degré $-\frac{1}{2}$.

Nous supprimons plusieurs expressions intéressantes de V et de S au moyen des volumes de certaines podaires, pour passer immédiatement à l'introduction des intégrales elliptiques dans les résultats précédents.

29. L'intégrale V, dont les différences partielles ont servi à exprimer les volumes de toutes les podaires, est tout de suite convertie en une intégrale elliptique de la première espèce par la substitution

$$\sin^2\varphi = \frac{a_1 - a_2}{v + a_1}\ ;$$

en même temps les limites de φ, auxquelles correspondent les limites o et ∞ de v, seront évidemment o et θ, pourvuque

$$\theta = \text{arc.cos.}\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \text{arc. sin.}\sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_1}}$$

Cela posé, on trouve facilement, comme résultat de cette substitution, l'expression

$$V=\frac{2}{\sqrt{(a_1-a_3)}}\int_0^\theta\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}=2\frac{F(\theta,k)}{\sqrt{(a_1-a_3)}}$$

où
$$k^2=\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}$$

est évidemment positif et moindre que l'unité.

Représentant aussi, avec Legendre, par E l'integrale elliptique de la seconde espèce, c'est-à-dire

$$E(\theta,k)=\int_0^\theta d\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)},$$

la différentiation de la valeur précédente de V donne:

$$V_1=\frac{1}{a_2-a_3}\frac{E}{\sqrt{(a_1-a_3)}}-\frac{1}{a_1-a_2}\frac{F}{\sqrt{(a_1-a_3)}},$$

$$V_2=\frac{a_3}{a_2-a_3}\frac{1}{\sqrt{(a_1a_2a_3)}}-\frac{a_1-a_3}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}\frac{E}{\sqrt{(a_1-a_3)}}+\frac{1}{a_1-a_2}\frac{F}{\sqrt{(a_1-a_3)}},$$

$$V_3=-\frac{a_3}{a_2-a_3}\frac{1}{\sqrt{(a_1a_2a_3)}}+\frac{1}{a_2-a_3}\frac{E}{\sqrt{(a_1-a_3)}}$$

valeurs qui substituées dans les formules du n.° 28 donnent tout de suite celles de A_{11}, A_{22}, A_{33}, P_0, P exprimées en intégrales elliptiques. Par exemple nous trouvons pour le volume de la podaire centrale (P_0), d'où l'on peut déduire par différentation partielle celui de toute autre podaire (P), l'expression

$$P_0=\frac{\pi}{6}\left\{(2a-a_1)\frac{a_1}{\sqrt{a_2a_3}}+(a\,a_3+a_3^2-a_1a_2)\frac{F}{\sqrt{(a_1-a_3)}}\right.$$
$$\left.+2(a_1-a_3)\,a\,\frac{E}{\sqrt{(a_1-a_3)}}\right\},$$

où nous avons mis pour abréger, comme ci-dessus, $a=a_1+a_2+a_3$.

Cette expression s'accorde précisément avec celle trouvée, pour la première fois, en 1844, par M. le Professeur Tortolini. (*)

30. Si nous faisons diminuer a_3 indéfiniment l'amplitude θ se rapproche de la limite $\frac{\pi}{2}$ et le module k acquiert la valeur

$$k_1=\sqrt{\frac{a_1-a_2}{a_1}};$$

Les intégrales elliptiques E et F se trouvent ainsi transformées en intégrales complètes c'est-à-dire $E(\frac{\pi}{2},k_1)$, $F(\frac{\pi}{2},k_1)$ ou plus simplement E_1 et F_1.

(*) Journal de Crelle. t. 31, p. 28.

Représentons maintenant par [U] la limite d'une grandeur quelconque U quand a_3 diminue, on déduit des expressions du n.° 29 que

$$[V_1] = \frac{1}{a_1 - a_2}\frac{E_1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{a_1 - a_2}\frac{F_1}{\sqrt{a_1}},$$

$$[V_2] = -\frac{a_1}{a_2}\frac{1}{a_1 - a_2}\frac{E_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{a_1 - a_2}\cdot\frac{F_1}{\sqrt{a_1}},$$

$$[V_3] = \infty\,,\ [V_3\sqrt{a_3}] = -\frac{1}{\sqrt{(a_1 a_2)}},\ [a_3 V_3] = 0,$$

$$P_0 = \frac{\pi}{6}\sqrt{a_1}\,[2(a_1 + a_2)E_1 - a_2 F_1].$$

Cette dernière est l'expression du volume de la *surface podaire d'une ellipse* par rapport à son centre. Par substitution au n.° 28 on trouvera que le volume d'une autre podaire quelconque de cette courbe se trouve donné par la formule

$$[P] = [P_0] + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{(a_1)}}{a_1 - a_2}\Big([(2a_1 - a_2)E_1 - a_2 F_1]\,x^2$$
$$+ [(a_1 - 2a_2)E_1 + a_2 F_1]\,y^2 + (a_1 - a_2)E_1 z^2\Big),$$

à laquelle nous aurions été conduits tout de suite si nous avions cherché directement les valeurs de A_{11}, A_{22}, A_{33} telles qu'elles ont été indiquées au n.° 13. Dans le fait quand $a_1 = a_2$ la formule qui précède peut aisément se réduire en celle que l'on a déjà trouvée au n.° 13 pour le volume de la surface podaire d'une circonférence.

31. Nous donnons, en dernier lieu, les modifications des formules précédentes qui correspondent aux cas particuliers des ellipsoides de rotation.

Pour le sphéroide allongé $a_2 = a_3$ nous avons

$$V = \frac{2}{\sqrt{(a_1 - a_3)}}\log.\left[\sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}\right],$$

$$P_0 = \frac{\pi}{6}\left\{(2a_1 + 3a_3)\sqrt{(a_1)} + \frac{3\,a_3^2}{\sqrt{(a_1 - a_3)}}\log.\left[\sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}\right]\right\},$$

$$P = P_0 + 2\frac{d\,P_0}{d\,a_1}x^2 + \frac{d\,P_0}{d\,a_3}(y^2 + z^2).$$

Pour $x^2 = a_1 - a_3$, $y = z = 0$, le volume de la podaire par rapport à un foyer devient

$$P = P_0 + 2\frac{d P_0}{d a_1}(a_1 - a_3) = \tfrac{4}{3}\pi a_1^{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire égal au volume de la sphère sur l'axe majeur de l'ellipse génératrice, comme cela doit être.

Pour le sphéroide aplati $a_1 = a_2$ nous avons

$$V = \frac{2}{\sqrt{(a_1 - a_3)}}\,\text{arc. cos.}\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

$$P_0 = \frac{\pi}{6}\left[(3a_1 + 2a_3)\sqrt{a_3} + \frac{3a_1^2}{\sqrt{(a_1 - a_3)}}\,\text{arc. cos.}\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\right.$$

$$P = P_0 + \frac{d P_0}{d a_1}(x^2 + y^2) + 2\frac{d P_0}{d a_3}z^2;$$

dernière formule qui, pour $a_3 = 0$, se réduit aussi à la dernière formule du n.° 13.

Londres. Septembre 1862.

Note additionelle.

Lorsque j'avais envoyé à la rédaction de ce Journal le travail que on vient de lire, M. *Borchardt* a eu l'obligeance d'appeller mon attention sur deux mémoires antérieurs de l'existence desquels je n'avais pas eu connaissance, et qui traitent aussi les volumes des surfaces podaires.

Le premier de ces mémoires a paru dans les *Archives de Mathématiques et de Physique*, de M. *Grunert*, t. 32, 1860, sous le titre de « Kubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides. » L'auteur, M. *Magener* de Posen, y exprime le volume d'une surface podaire quelconque d'un ellipsoïde primitif, au moyen d'intégrales elliptiques de la première et de la seconde espèce. Il ne donne pas, il est vrai, d'une manière explicite, la relation fondamentale du n.° 15, au moyen de laquelle le volume P d'une podaire quelconque se déduit immédiatement du volume P_0 de la podaire centrale (déjà calculé par *Tortolini*) et des dérivées partielles de P_0 par rapport aux axes. Toutefois, il arrive à une expression symétrique forte intéressante de P en fonction des dérivées partielles de l'intégrale double

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi}{\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a_1} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\psi}{a_2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{a_3}\right\}^2},$$

à laquelle *Jacobi* (Journal de Crelle, t. X) a reduit la quadrature de la surface de l'ellipsoïde à axes réciproques de l'ellipsoïde primitif. - Grâce à cette expression de P. *M. Magener* a également été conduit à la découverte de la série des ellipsoïdes, lieux des origines des podaires de même volume.

Le second de ces mémoires, qui a un caractère plus général, ne paraît pas avoir été porté à la connaissance du pubblic. Il a été publié à *Berlin* en 1859 , sous forme de Thèse inaugurale et porte pour titre: « *De superficierum pedalium theorematibus quibusdam.* » L'auteur, M. *Fischer* de Berlin , y traite d'abord de quelques unes des propriétés générales des surfaces podaires. Il examine ensuite les volumes des surfaces podaires et établit d'une manière parfaitement générale les deux théorèmes fondamentaux énoncés dans le n.° 3.

Londres, 27. avril 1863.



SULLA RIFRAZIONE DI UNA SUPPOSTA ATMOSFERA LUNARE.

NOTA

DEL PROF. F. O. MOSSOTTI.



Questione. Si domanda se è possibile che un raggio di luce che parte da una stella e traversa l'atmosfera lunare sia rifratta in modo che l'immagine della stella, che esso dipinge, si progetti sopra il disco della luna.

Risposta. Le equazioni del movimento di una molecola luminosa che penetra un mezzo composto di coppe sferiche concentriche di poter rifrangente variabile, espresso da $k\,\Delta$, quando si prenda per origine delle coordinate il centro della sfera, sono

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = k \frac{d\,\Delta}{d r}\frac{x}{r}; \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = k \frac{d\,\Delta}{d r}\frac{y}{r}; \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} = k \frac{d\,\Delta}{d r}\frac{z}{r}$$

le quali forniscono direttamente i quattro integrali

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

$$x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = c'$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c''$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = k\,\Delta + v^2;$$

v essendo la velocità della luce nel voto.

Le prime tre moltiplicate rispettivamente per x, $-y$, e z e sommate danno

$$cx - c'y + c''z = o$$

Quest'equazione ci mostra che la trajettoria descritta dal raggio di luce è un piano che passa per l'origine delle coordinate o pel centro della sfera.

Poichè la curva descritta dalla molecola luminosa giace in un piano, prendiamo questo piano per quello delle $x\,y$; in tal caso z e $\frac{dz}{dt}$ saranno sempre nulle, e si avranno semplicemente le due equazioni

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c; \qquad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 + k\,\Delta.$$

Permutando le differenziali, così che siano prese relativamente ad s ed eliminando $\frac{ds}{dr}$ fra le due equazioni si avrà

$$(1) \qquad x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{v^2 + k\Delta}}$$

Questa equazione è quella che va a fornirci la risposta al quesito.

Chiamiamo $180° - \theta$ l'angolo che la tangente della trajettoria fa coll'asse delle x, così che sia

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = -\cos\theta \qquad\qquad (3) \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\theta$$

e riferiamo la curva alle coordinate polari, ponendo

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad y = r\sin\varphi$$

con queste denominazioni la precedente equazione darà

$$r\sin(\varphi + \theta) = \frac{c}{\sqrt{v^2 + k\Delta}}$$

che servirà a determinare la costante arbitraria c. In fatti è facile di verificare che l'angolo $\varphi + \theta$ è quello che fà la tangente alla trajettoria col raggio r; supponiamo che al limite dell'atmosfera dove $k\Delta = o$ ed $r = 1 + \tau$ sia ζ il valore di questo angolo, si avrà

$$(1 + \tau)\sin\zeta = \frac{c}{v}, \qquad c = v(1 + \tau)\sin\zeta$$

e quindi

$$r\sin(\varphi + \theta) = \frac{(1 + \tau)\sin\zeta}{\sqrt{1 + \frac{k}{v^2}\Delta}}$$

Dalle equazioni (2) e (3) si ricava

$$\frac{dx}{ds} = \left(\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{dr}{ds}; \qquad \frac{dy}{ds} = \left(\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{dr}{ds}$$

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = r^2\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{ds} \qquad\qquad \frac{ds^2}{dr^2} = 1 + r^2\frac{d\varphi^2}{dr^2}$$

sostituendo questi valori, e quello di c, nell'equazione (1) si avrà finalmente l'equazione della trajettoria del raggio di luce riferito alle coordinate polari, che sarà

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{k}{v^2}\Delta\right)r^2}{(1 + \tau)^2\sin^2\zeta} - 1}}$$

Per semplificare un poco quest'equazione, prendiamo per unità il raggio della sfera solida, o della luna, e supponiamo che k rappresenti il poter rifrangente alla sua superficie cosichè quando $r = 1$ si abbi pure $\Delta = 1$; considerando Δ come una funzione di r, e posto per brevità, $\frac{k}{v^2} = i$, facciamo

$$\frac{1 + i\Delta}{1 + i} = \frac{\varphi(r)}{r^2}$$

Con queste posizioni l'equazione precedente prenderà la forma

$$d\varphi = \frac{d \log r}{\sqrt{\varphi(r) - \frac{(1+\tau)^2}{1+i}\sin^2\zeta}}$$

Consideriamo un raggio di luce che parte da un punto della superficie lunare, e sorte dall'atmosfera. Sia **M** il minimo valore che può avere la funzione $\varphi(r)$ in tutta l'estensione dell'atmosfera; affinchè il radicale della precedente equazione si mantenga sempre reale, ed il raggio di luce possa di fatto uscire, dovrà essere

$$\frac{(1+\tau)^2}{1+i}\sin^2\zeta < \mathbf{M}$$

Dunque il più gran valore di $\sin^2\zeta_0$, sotto il quale un raggio di luce, che parte dalla superficie della luna, puo sortire dall'atmosfera, sarà dato dall'equazione

$$\sin^2\zeta_0 = \frac{i+\tau}{(1+\tau)^2}\mathbf{M}.$$

Suppongasi ora che un raggio di luce entri nell' atmosfera lunare per atraversarla e sortire dalla parte opposta: Questo raggio nel suo corso si avvicinerà al centro della luna sino ad un certo punto per poi allontanarsi, di modo che r avrà un minimo, e sarà per questo punto $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, dunque per questo valore l'equazione (3) darà

$$\varphi(r) = \frac{(1+\tau)^2}{1+i}\sin^2\zeta$$

o sia

$$\sin^2\zeta = \frac{1+i}{(1+\tau)^2}\varphi(r)$$

Ma il secondo membro ha per valore minimo $\sin^2\zeta_0$ dunque dovrà sempre essere

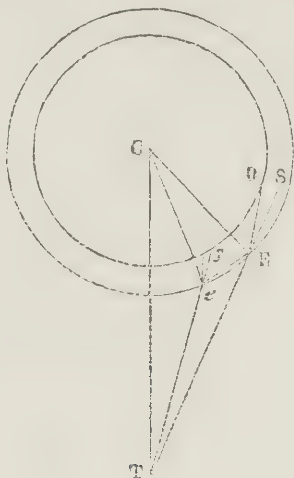
$$\sin^2\zeta > \sin^2\zeta_0$$

e come i due raggi di luce non possono uscire dall'atmosfera della stessa parte delle

ascisse positive se sin ζ e sin ζ_0 non hanno lo stesso segno, perciò la precedente equazione darà anche

$$\xi > \zeta_0$$

Dunque un raggio che traversa l' atmosfera non può mai al sortire fare col raggio vettore un angolo più piccolo del più grand' angolo che un raggio che parte dalla superficie lunare farà col rispetto raggio vettore nel punto d'emergenza.



Ciò posto sia T il luogo dell'osservatore sulla terra, C il centro della luna, TS il raggio che parte dal punto O e costituisce l'immagine del punto più esteriore del lembo della luna e sorte sotto il più grand'angolo CES il cui seno ha per espressione. $\frac{\sqrt{1+i}}{1+\tau}\sqrt{M}$. Se un altro raggio di luce Ts avesse potuto traversare l'atmosfera e dipingere l'immagine della stella sul disco della luna, dovrebbe essere l'angolo CT$s <$ CTS, o sia il punto e dovrebbe cadere interiormente nel triangolo CTE. Ora nel triangolo CET si ha l'angolo esterno CES $=$ ECT $+$ CTE e nel triangolo C e T si ha Ces $=$ eCT $+$ CTe, ma è ECT $>$ eCT, e CTE $>$ CTe, dunque dovrebbe essere CES $>$ Ces, cioè l'angolo che il raggio di luce OET, che parte da un punto della superficie della luna, fa col raggio CE al punto d' emergenza, dovrebbe essere maggiore dell'angolo che il raggio di luce seT che viene dalla stella ed ha traversato l'atmosfera fa col rispettivo raggio Ce, la qual cosa, come abbiamo veduto sopra non è possibile.

N. Questa breve Nota fù scritta dal Prof. Mossotti in Roma nel 1836, e la lasciò in mie mani. Ho creduto ora di pubblicarla, pensando di far cosa grata ai lettori, quando ad essi si rammenti l'insigne Scienziato recentemente perduto.

B. T.

NOTE relative à la fonction x^x;

PAR LE PÈRE J. L. A. LE COINTE.



Lemme. - a et N étant deux nombres positifs, le premier au moins égal à 2, et le second quelconque, et log désignant un logarithme pris dans le système dont la base est a, on a la relation

$$\log N < \sqrt{N}.$$

Démonstration. La lettre l placée devant un nombre désignant le logarithme népérien de ce nombre, on a évidemment

$$\sqrt{N} > l(\sqrt{N}) = \frac{lN}{2},$$

d'où

$$\frac{lN}{\sqrt{N}} < 2,$$

et par conséquent

$$\frac{lN}{\sqrt{N}} < l\,a,$$

ou bien

$$\frac{lN}{l\,a} < \sqrt{N}.$$

Or, on sait que l'on a

$$\frac{lN}{l\,a} = \log N,$$

donc

$$\log N < \sqrt{N}.$$

Scolie. Dans le théorème précédent, on peut supposer $a = 10$, car

$$l\,10 = 2,302.....$$

Théorème. La fonction x^x tend vers l'unité comme limite lorsque la variable x reçoit des valeurs positives décroissantes et tendant vers zéro comme limite.

Démonstration. Désignons par y la fonction $\frac{1}{x^x}$, et posons $x = \frac{1}{z}\cdot$ On a

$$y = z^{\frac{1}{z}},$$

d'où, en prenant les logarithmes vulgaires des deux membres de cette égalité,

$$\log y < \frac{\log z}{z},$$

et par suite de ce qui précède, il vient

$$\log y < \frac{\sqrt{z}}{z} = \frac{1}{\sqrt{z}} .$$

Cette inégalité montre que z recevant des valeurs positives de plus en plus grandes, et croissant au-delà de toute limite, log. y tend vers zéro comme limite, et que par conséquent y tend vers l'unité comme limite.

Donc *et*....

Cette démonstration tout-à-fait élémentaire est beaucoup plus simple que celle donné par le célèbre Pfaff, et qui se trouve insérée dans le Journal de Crelle (T. XII, p. 134), ainsi que dans les nouvelles annales de mathematiques (1.re série, T. VI, p. 393).

Observation. Dans le lemme donné précédemment, nous avons posé la relation

$$\sqrt{N} > l(\sqrt{N})$$

qui nous a paru évidente. On peut, du reste, établir, à cet égard, le théorème élémentaire que voici:

Les deux progressions

$$\begin{array}{cccc} 1 & a & a^2 & a^3\ldots.. \\ 0 & 1 & 2 & 3\ldots.. \end{array}$$

étant celles qui définissent un système de logarithmes et la base a étant supposée au moins égale à 2, si l'on désigne par N un nombre positif quelconque, on a, dans ce système de logarithmes, l'inégalité

$$N > \log N.$$

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer cette inégalité pour le cas de $N > 1$. N étant un nombre entier positif, posons

$$a^n \leqq N < a^{n+1}.$$

On a $$\log N < n + 1,$$

et $$N \geqq 2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + \ldots..$$

Donc etc...



Question sur un jeu de cartes

PAR LE PÈRE J. L. A. LE COINTE.



Soient m et n deux nombres entiers quelconques, et supposons que l'on ait m^n cartes sur chacune desquelles se trouve écrit un nombre, les m^n nombres ainsi écrits étant tous différents les uns des autres.

Une persone pense l'un de ces nombres et, sans le faire connaître, elle demande qu'on dispose les m^n cartes les unes au-dessous des autres (les nombres tournés en dessous), de manière que celle qui, dans cette collection, occupe le rang k à partir de la première en-dessus, contienne le nombre pensé A.

Pour cela, désignons par q, r, q' et r' les quatre nombres entiers qui satisfont aux relations

$$k = m^{n-1}.\, q + r, \qquad 1 \leq q + 1 \leq m, \qquad o < r \leq m^{n-1},$$

$$r = m\, q' + r', \qquad 1 \leq q' + 1 \leq m^{n-2}, \; o < r' \leq m,$$

et opérons comme il suit:

1.° Partageons la collection des m^n cartes en m paquets (chaque carte étant tournée de manière que son nombre soit en-dessus), chacun d'eux en contenant m^{n-1}, et demandons quel est le paquet P_1 qui renferme A. Retournons tous les paquets et plaçons-les les uns, au-dessous des autres, de telle sorte que P_1 soit au rang r' à partir du premier en-dessus: soit C_1 la collection ainsi obtenue des m^n cartes.

2.° Avec la collection C_1 refaisons de nouveau m paquets, de manière qu'ils contiennent respectivement toutes les cartes qui dans cette collection, occupent les rangs

$$\dot{m} + 1, \quad \dot{m} + 2, \quad \dot{m} + 3, \; . \; . \; . \; . \; , \; \dot{m} + (m - 1), \; \dot{m}, \; (*)$$

à partir de la première en-dessus, l'une quelconque d'entre elles n'étant jamais placée au-dessous d'une autre qui occupe un rang moindre. Demandons quel est le paquet P_2 contenant A. Retournons tous les paquets et plaçons-les, les uns au-dessous des autres, de manière que P_2 soit au rang $q' + 1$ à partir du premier en-dessus: soit C_2 la collection ainsi obtenue des m^n cartes.

3.° Avec la collection C_2 refaisons encore m paquets comme nous avons déjà

(*) Nous faisons usage ici de la notation de *Leibnitz* pour indiquer un multiple quelconque d'un nombre, et qui consiste à placer un *point* au-dessus de ce nombre. De plus, nous considérons *zéro* comme multiple de tout nombre.

fait avec la collection C_1; demandons quel est celui d'entre eux P_3 qui contient A, et après les avoir tous retournés, plaçons-les, les uns au-dessous des autres, de manière que P_3 soit le premier en dessus: soit C_3 la collection ainsi obtenue des m^n cartes.

4.° Formons successivement $n - 4$ autres collections

$$C_4\,,\ C_5\,,\ \ldots\ldots,\ C_{n-1}\,,$$

des m^n cartes, de telle sorte que l'une quelconque d'entre elles C_t soit déduit de C_{t-1} absolument comme on a déduit C_3 de C_2.

5.° Enfin, avec la collection C_{n-1} reconstituons de nouveau m paquets comme précédemment: demandons quel est celui d'entre eux P qui contient A, et après les avoir tous retournés, plaçons-les, les uns au-dessous des autres, de manière que P soit au rang $q + 1$ à partir du premier en-dessus: la collection C, ainsi obtenue, des m^n cartes est telle que la carte qui y occupe le rang k à partir de la première en-dessus, contient le nombre A.

Démonstration. α étant un nombre entier quelconque, convenons de désigner par la notation $N_{(\alpha)}$ une quantité indéterminée assujettie à être l'un des termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \alpha,$$

et respectivement par

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4\,,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1}\,,\ x,\ y,\ z,\ u,$$

les rangs de la carte contenant le nombre A, dans

$$C_1\,,\ C_2\,,\ C_3\,,\ C_4\,,\ \ldots\,,\ C_{n-1}\,,\ C,\ P_2\,,\ P_3\,,\ P.$$

On a évidemment

$$x_1 = m^{n-1}(r' - 1) + N_{(m^{n-1})},$$

ou bien, en observant que tout nombre $N_{(m^{n-1})}$ peut s'écrire sous la forme

$$m\,N_{(m^{n-2}-1)} + N_{(m)},$$

$$x_1 = m^{n-1}(r' - 1) + m\,N_{(m^{n-2}-1)} + N_{(m)},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$y = m^{n-2}(r' - 1) + N_{(m^{n-2})},$$

et par conséquent

$$x_2 = m^{n-1}q' + m^{n-2}(r' - 1) + N_{(m^{n-2})},$$

ou bien

$$x_2 = m^{n-1}q' + m^{n-2}(r' - 1) + m\,N_{(m^{n-3}-1)} + N_{(m)},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$z = x_3 = m^{n-2}\, q' + m^{n-3}\,(r' - 1) + N_{(m^{n-3})}.$$

Maintenant, si l'on observe que chacun des termes de la suite

$$x_3\,,\ x_4\,,\ x_5\,,\ \ldots\,,\ x_{n-1}\,,$$

à partir du second, doit se déduire du précédent absolument comme x_3 se déduit de x_2, on obtient immédiatement

$$x_4 = m^{n-3}\, q' + m^{n-4}\,(r' - 1) + N_{(m^{n-4})}\,,$$

$$x_5 = m^{n-4}\, q' + m^{n-5}\,(r' - 1) + N_{(m^{n-5})}\,,$$

. . . .

. . . .

et enfin

$$x_{n-1} = m^2\, q' + m\,(r' - 1) + N_{(m)}.$$

Or, cette valeur de x_{n-1} montre de suite qu'on a

$$u = m\, q' + r' = r,$$

et que par conséquent

$$x = m^{n-1}\, q + r = k.$$

Donc etc....,

N. B. L'énoncé de la question qui vient d'être traitée m'avait été communiqué pour le cas de $m = n = 3$, par mon ancien professeur et ami, M. Gascheau, de la Faculté des sciences de Toulouse; de sorte que je n'ai fait que généraliser la question et en donner la démonstration.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, pubblicato per cura dei professori G. Battaglini, V. Janni, e N. Trudi. Napoli - Pei tipi di Benedetto Pellerano editore - Libreria scientifica industriale - strada Chiaia 60.

Siamo lieti di annunciare la pubblicazione in Napoli di un nuovo periodico mensile, il cui scopo principale si è quello di presentare alla gioventù delle Università di Italia quei nuovi metodi tanto algebrici quanto geometrici che giornalmente sempre più prendono dominio nelle dimostrazioni delle matematiche verità. Era questo un desiderio per coloro che sanno apprezzare di quanto i recenti metodi prevalgono agli antichi si pel rigore che per la facilità, e che al tempo stesso aspirano ad un ordinato avanzamento della scienza in questa penisola; la quale al dire del sig. Terquem – Nouvelles annales de mathématiques, vol. 12. pag. 106 – c'est toujours montrée, dans la région intellectuelle, au premier rang. – Gl'illustri e chiar: redattori Battaglini, Janni, e Trudi, e Collaboratori: Avena Carlo – Brioschi Francesco (Milano) – Casorati Felice (Pavia) – Cremona Luigi (Bologna) – Dorna Alessandro (Torino) – Fergola Emanuele – De-Gasperis Annibale – Del-Grosso Remigio – Padula Fortunato – Rubini Raffaele – Sabato Andrea – Sannia Achille – già abbastanza noti per i loro dotti lavori scientifici, sono pel pubblico una sicura garanzia onde adequatamente raggiungere il fine proposto.

Intanto affinchè ognuno possa riconoscere il molto d' utile che possa derivarne alla scienza da questo periodico, diamo qui l'indice delle materie contenute nei primi sei fascicoli già regolarmente pubblicati:

I° Teoria elementare delle forme geometriche, per G. Battaglini – Teoria geometrica delle curve del second'ordine: per V. Janni – Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogenee: per N. Trudi – Intorno ad una trasformazione delle forme quadratiche; per F. Brioschi – Dimostrazione di un Teorema proposto dal Capitano Faure; per Enrico d'Ovidio – Nota intorno ad una proprietà del cerchio dei nove punti; per N. Trudi.

II° Teoria delle funzioni ellittiche; per R. Rubini – Teoria elementare delle forme geometriche, per G. Battaglini (*continuazione*) – Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogenee, per N. Trudi (*continuazione*) – Una dimostrazione del Teorema di Sturm, per N. Trudi – Quistioni.

III° Sopra una proprietà delle forme ternarie. Nota del prof. F. Brioschi – Soluzione di un problema relativo alle superficie di second'ordine, per Eugenio Beltrami

Nota sulla catenaria di eguale resistenza, del libero insegnante nell'università di Torino, ingegnere prof. Alessandro Dorna – Teoria geometrica delle curve del 2.° ordine, per V. Janni (*continuazione*) – Sui teoremi del Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche, per N. Trudi – Quistioni – Necrologia. Ottaviano Fabrizio Mossotti – Bibliografia. Sulla introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane: per Luigi Cremona, professore dell'università di Bologna.

IV. Teoria elementare delle forme geometriche, per G. Battaglini (*continuazione*) – Sulle coniche di nove punti, nota di Eugenio Beltrami – Teoria delle funzioni ellittiche, per R. Rubini (*contin.*) – Sulle equazioni algebriche, nota di E. Beltrami – Sui teoremi di Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche, per N. Trudi (*contin.*) – Soluzione di alcune quistioni proposte nel fascicolo di febrajo 1863 del giornale di Terquem inviateci da alcuni giovani studenti – Corrispondenze.

V.° Sulle equazioni differenziali che si presentano nei problemi di meccanica: nota di Remigio del Grosso. – Due teoremi di determinanti, di Enrico d'Ovidio – Teoria delle funzioni ellittiche, per R. Rubini (*contin.*) – Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogenee, per N. Trudi (*cont.*) – Soluzioni di alcune quistioni proposte nel fascicolo di febrajo 1863 del giornale di Terquem, inviateci da alcuni giovani studenti (*cont.*).

VI. Teoria elementare delle forme geometriche, per G. Battaglini – Nota sulle serie di curve d'indice qualunque, per G. Battaglini – Teorica dei contravarianti, degli invarianti, e dei covarianti, per V. Janni – Nota sopra un problema di Geometria, per E. d'Ovidio – Nota sulle curve del 3.° grado, per N. Salvatore Dino – Soluzione delle quistioni proposte dal prof. Trudi: per F. Gambardella.



DEI MOMENTI D'INERZIA E DI ELASTICITA' DELLE SEZIONI

DEL DOTT. DOMENICO CIPOLLETTI.

Quel che mi propongo in questa memoria, è l'applicare le formole generali dei momenti d'elasticità e d'inerzia delle sezioni dei solidi, ai casi più ovyii che si possono presentare nell' odierne costruzioni. Niun lavoro completo su questo argomento credo sia stato pubblicato; nelle opere le più stimate che trattano di meccanica pratica, e della resistenza dei materiali non trovansi che poche applicazioni.

La curva che prende un solido, prismatico orizzontale omogeneo; lorchè essendo fisso in una estremità, è gravato nell'altra da una forza qualunque verticale, vien data dall'equazione

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = Q\,(a - x') \qquad \text{(A)}$$

nella quale

$$\varepsilon = E \int_{x_1}^{x_0} dx \int_{f(x_1)}^{f(x_0)} y^2\, dy \qquad \text{(B)}$$

espressione che chiamasi *momento d' elasticità*, detto ora L il *momento d' inerzia* della sezione del solido rispetto l'istesso asse cui vien riferito il momento d' elasticità si ha

$$L = \frac{V}{g} \int_{x_1}^{x_0} dx \int_{f(x_1)}^{f(x_0)} y^2\, dy \qquad \text{(C)}$$

essendo V il peso dell'unità di volume del solido, e g lo spazio percorso da un corpo in un $1''$; supponendo

$$\frac{V}{g}\,(= \text{costante}) = 1$$

dalle due (B) e (C) si ha

$$\varepsilon = EL$$

ossia il momento di elasticità uguaglia quello d'inerzia moltiplicato per il *coefficiente* E di *elasticità*, ciò posto avverto;

I.° Che quando un solido qualunque orizontale essendo fisso in un' estremità, è gravato nell'altra da un peso verticale; si considera che in ogni sua falda sottile av-

venga una rotazione intorno ad una retta perpendicolare al piano della flessione, e che passa per il centro di gravità della falda; e che chiamasi *asse d'equilibrio.*

II° Che perciò nelle formole (B) e (C) i momenti di elasticità, e d'inerzia devonsi calcolare rispetto questa retta che considero come asse delle ascisse, ed il centro della falda come l'origine.

III° Che per la (D) determinato il momento d'inerzia di una sezione; intenderò determinato ancora quello di elasticità.

La ricerca dei momenti di elasticità e d'inerzia riflettendosi tutta, su quella, di quei d'inerzia; presento alcune norme, che la rendano nei diversi casi che si considerano più facile e spedita.

I.° Se la sezione è divisa in due parti simmetriche dall'asse d'equilibrio: allora

$$L = \int_{-x_1}^{x_0} d\,x \int_{-f(x_0)}^{f(x_0)} y^2\,d\,y = 2 \int_{-x_1}^{x_0} d\,x \int_{0}^{f(x_0)} y^2\,d\,y$$

II° Se la sezione è divisa ancora in due parti simmetriche dall' asse delle ordinate; sarà

$$L = \int_{-x_0}^{x_0} d\,x \int_{-f(x_0)}^{f(x_0)} y^2\,d\,y = 4 \int_{0}^{x_0} d\,x \int_{0}^{f(x_0)} y^2\,dy$$

III° Per rendere in alcuni casi più facile la integrazione si può invertire l' ordine di essa e cominciare dalla x.

IV° Se il contorno della figura è formato da una linea discontinua, o se essa contiene dei vuoti: la si deve immaginare divisa in parti; si calcolano i momenti d'inerzia di ciascuna di esse, che si devono sommare o sottrarre, secondo che la figura risulta dalla somma, o dalla sottrazione di esse; questa norma è utilissima per la ricerca dei momenti d'inerzia delle figure ad O, a T a doppio T e delle sezioni delle *longarine.*

V° Se l'asse d'equilibrio non divide in due parti simmetriche la sezione; si possono ancora calcolare separatamente i momenti d'inerzia della parte superiore ed inferiore; e quindi sommarli, per avere il momento d'inerzia totale.

VI° essendo ω l'area della sezione; L' il suo momento d'inerzia rispetto un'asse parallelo a quello che passa per il suo centro di gravità ; e z la distanza dei due assi, si ha

$$L' = L + \omega z^2, \qquad L = L' - \omega z^2$$

e perciò, se torna vantaggioso, per avere il momento d'inerzia d'una sezione rispetto l'asse d'equilibrio che passa per il suo centro; basterà trovare il momento d'inerzia della stessa rispetto un asse parallelo al primo; e quindi per aver quello sottrarre da questo il prodotto dell'area della figura per il quadrato della distanza dei due assi.

1. *Per una sezione rettangolare.* Siano, b, ed a la base e l'altezza: dalla formola generale (C) si dedurrà

$$\mathrm{L} = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}a} \mathrm{d}\,x \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} y^2\,\mathrm{d}y = 2 \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \mathrm{d}\,x \int_{0}^{\frac{1}{1}a} y^2\mathrm{d}y = 2.\,\frac{1}{2^3}\cdot\frac{a^3}{3}\left(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}b\right)$$

quindi

$$\mathrm{L} = \frac{a^3\,b}{12} \qquad (1)$$

per ottenere il momento d'inerzia L' rispetto la base: si ha

$$\mathrm{L}' = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \mathrm{d}\,x \int_{0}^{a} y^2\,\mathrm{d}\,y = \frac{a^3\,b}{3}.$$

2. *Per una sezione quadrata.* Essendo a il lato del quadrato dalla (1)

$$\mathrm{L} = \frac{a^4}{12} \qquad (2)$$

3. *Per una sezione parallelogramma.* Sia b la base, a il lato del parallelogrammo, ψ l'angolo che formano, considerando l'asse delle x come quello dell'ordinate l'equazione del lato della sezione è

$$x = \frac{\cos.\,\psi}{\mathrm{sen.}\,\psi}\,y + \tfrac{1}{2}\,b$$

ed integrando primieramente rispetto x si ha dalla (C)

$$\mathrm{L} = 2 \int_{-\frac{a}{2}\,\mathrm{sen.}\,\psi}^{\frac{a}{2}\,\mathrm{sen.}\,\psi} y^2\,\mathrm{d}\,y \left(\frac{\cos.\,\psi}{\mathrm{sen.}\,\psi}\,y + \tfrac{1}{2}\,b\right)$$

$$= 2\left[\frac{\cos.\,\psi}{\mathrm{sen.}\,\psi}\cdot\frac{y^4}{4} + \frac{b}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}\,\mathrm{sen.}\,\psi}^{\frac{a}{2}\,\mathrm{sen.}\,\psi} = b\,a^3\,\mathrm{sen}^3.\,\psi\left(\frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{3\,.\,2^3}\right)$$

ossia

$$\mathrm{L} = \frac{b\,a^3.\,\mathrm{sen}^3.\,\psi}{12} \qquad (3)$$

4. *Per una sezione romboidale*: essendo a il lato, dalla (3)

$$\mathrm{L} = \frac{a^4.\,\mathrm{sen}^3.\,\psi}{12} \qquad (4)$$

5. *Per una sezione a triangolo isoscele con la base verticale.* Sia a la base, e b l'altezza orizzontale, ed il vertice della sezione l'origine delle coordinate: l'equazione del lato sarà

*

$$y = \frac{a}{2\,b}\,x$$

e perciò

$$L = 2\int_0^b d\,x \int_0^{\frac{a}{2b}x} y^2 dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{2^3\,b^3}\int_0^b x^3\,dx$$

ossia

$$L = \frac{a^3\,b}{48} \qquad (5)$$

6. *Per una sezione a triangolo equilatero con la base verticale;* in tal caso tra la base a e l'altezza b si ha la relazione

$$\sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}a^2} = a$$

ossia

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\,a$$

fatta questa sostituzione nella (5) si ottiene

$$L = \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \qquad (6)$$

7. *Per una sezione a triangolo isoscele con la base orizzontale.* Si chiami b la base, ed a l'altezza, rappresenti

$$y = -\,m\,x + n \qquad (a)$$

l'equazione del lato del triangolo; essendo sempre l'origine delle coordinate nel centro della sezione: si trova

$$n = \frac{2}{3}a;\ m = \frac{2}{3}a : \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}b = \frac{2a}{b}$$

e perciò la (a) diviene

$$y = -\,\frac{2a}{b}x + \frac{2}{3}a$$

dalla quale

$$x = \frac{b}{2a}\left(\frac{2a}{3} - y\right)$$

ed integrando primieramente rispetto alla x

$$L = 2\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} y^2 dy \int_0^{\frac{b}{2a}\left(\frac{2a}{3}-y\right)} d\,x = \frac{b}{a}\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} y^2\,dy\left(\frac{2\,a}{3} - y\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{2a}{3}\cdot\frac{8\,b^3}{3^4} - \frac{16}{4}\cdot\frac{a^4}{3^4} + \frac{2a}{3}\cdot\frac{a^3}{3^4} + \frac{a^4}{4.\,3^4}\right]$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{2a}{3}\cdot\frac{9a^3}{3^4} - \frac{15.a^4}{4.3^4}\right]$$

ossia
$$L = \frac{b\,a^3}{36} \qquad (7)$$

8. *Per una sezione a triangolo equilatero colla base orizzontale*: tra l'altezza a, e la base b si avrà la relazione

$$b = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$

ossia
$$b = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

fatta questa sostituzione nella (7) si ottiene

$$L \doteq \frac{a^4}{18.\sqrt{3}} \qquad (8)$$

9. *Per una sezione a triangolo rettangolo.* Sia b la base, ed a l'altezza; l'equazione dell'ipotenusa, essendo l'estremità di b l'origine sarà $y = \frac{a}{b}x$ e detto L' il momento d'inerzia della sezione rispetto la base

$$L' = \int_0^b dx \int_0^{\frac{a}{b}x} y^2\,dy = \frac{a^3}{3b^3}\int_0^b x^3\,dx = \frac{a^3 b}{12} \qquad (a)$$

e dalla relazione
$$L = L' - \omega z^2$$

si dedurrà
$$L = \frac{a^3 b}{12} - \frac{a\,b}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2$$

ossia
$$L = \frac{a^3 b}{36} \qquad (9)$$

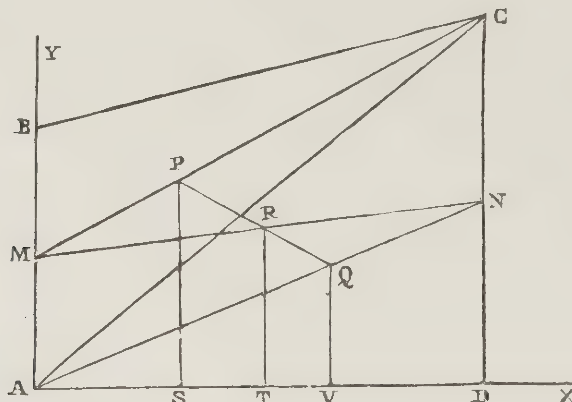
10. *Per una sezione di un triangolo acutangolo qualunque colla base orizzontale.* Si conduca l'altezza a, che divida la base in due parti b, e b'; e si avranno due triangoli di altezza comune a, e di base l'uno b, e l'altro b': essendo i centri di gravità sull'istessa orizzontale; dalla (9), si ottiene

$$L = \frac{(b + b')\,a^3}{36}$$

11. *Per la sezione di un triangolo ottusangolo qualunque colla base orizzontale.* Sia questa b; si conduca l'altezza a; si dica b' la base del triangolo rettangolo che si ottiene prolungando b fino all'incontro di a: immediatamente dalla (9)

$$L = \frac{(b - b') a^3}{36} \qquad (11)$$

12. *Per una sezione trapezoidale rettangola a basi parallele verticali.* Siano (fig: I^a.) q, p, h, le basi maggiore e minore, e l'altezza: rappresenti



$$y = m\,x + n \qquad (a)$$

l'equazione del lato BC: essendo $n = p$, da questa $m = \frac{q - p}{4}$ e perciò diviene la (a)

$$y = \frac{q - p}{h} x + p \qquad (a^1)$$

si conduca la CM alla metà di p; sostituito nella (a) $\frac{1}{2} p$ in luogo di p, si ha

$$y = \frac{2q - p}{2\,h} x + p \qquad (a^2)$$

che rappresenta la sua equazione.

Si conduca la MN alla metà di q e p, essendo $y = m x + n$ la sua equazione:

si ha
$$n = \frac{p}{2};\; m = \frac{q - p}{2h}$$

onde essa diviene
$$y = \frac{q - p}{2\,h} x + \tfrac{1}{2} p \qquad (a^3)$$

condotta ora la AN, e fissati su di essa e sulla MC due punti Q e P il primo distante $\frac{1}{3}$ AN da N; il secondo $\frac{1}{3}$ MC da M; dovendo il centro di gravità della sezione trovarsi, e sulla PQ, e sulla MN; si troverà esso nel loro punto d'incontro R; per determinare l'ordinata di questo punto che è evidentemente la z delle formole; condotte le verticali PS, RT, QV, si trova $QV = \frac{q}{3}$ (a^4) e fatto nella (a^2)

$$X\;(= AS) = \tfrac{1}{3}\,h \qquad (a^5)$$

risulta
$$y\ (= \mathrm{PS}) = \frac{p+q}{3} \qquad (a^6)$$

rappresenti ora $y = -m\,x + n$ l'equazione della PQ; essendo $\mathrm{AV} = \frac{2}{3}h$ (a^7) e passando essa per i due punti P e Q per le (a^4), (a^5), (a^6), (a^7) si avranno le due equazioni

$$\frac{p+q}{3} = -m\tfrac{1}{3}h + n$$
$$\tfrac{1}{3}q = -m\tfrac{2}{3}h + n$$

dalle quali

$$m = \frac{\dfrac{p+q}{3} - \dfrac{q}{3}}{\frac{2}{3}h - \frac{1}{3}h} = \frac{p}{h}$$

$$n = \frac{p+q}{3} + \frac{p}{h}\tfrac{1}{3}h = \frac{2\,p+q}{3}$$

e perciò l'equazione della (PQ) risulta

$$y = -\frac{p}{h}x + \frac{q+2\,p}{3} \qquad (a^8)$$

Supponendo coesistenti le (a^3), (a^8), si deduce finalmente

$$z\ (= \mathrm{RT}) = \frac{(q-p)\,(p+2\,q)}{6\,(p+q)} + \tfrac{1}{2}p \quad (a^9)$$

detto L' il momento d'inerzia della sezione rispetto la h; per la (a^1)

$$\mathrm{L}' = \int_0^h \mathrm{d}x \int_0^{\frac{q-p}{h}+p} y^2\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{3}\int_0^h \mathrm{d}x\left(\frac{q-p}{h}x + p\right)^3$$

$$= \frac{h}{12\,(q-p)}\left[\left(\frac{q-p}{h}x + p\right)^4\right]_0^h \quad \text{ossia} \quad \mathrm{L}' = \frac{h}{12}\left(\frac{q^4-p^4}{q-p}\right) (a^9)$$

epperò dalla relazione $\qquad \mathrm{L} = \mathrm{L}' - \omega\,z^2$

$$\mathrm{L} = \frac{h}{12}\left(\frac{q^4-p^4}{q-p}\right) - \frac{h}{2}(p+q)\,z^2 = \frac{h}{12}(q^2+p^2)\,(p+q) - \frac{h}{2}(p+q)\,z^2$$

ossia
$$\mathrm{L} = \frac{h}{12}(p^2+q^2-6\,z^2)\,(p+q) \qquad (12)$$

13. *Per una sezione trapezoidale a basi parallele verticali,* rappresentino h, q, p, l'altezza, e le due basi inferiore e superiore più piccola; e z la distanza del centro

di gravità, della sezione dalla base p; è manifesto che detto L' il momento d'inerzia di essa rispetto la base superiore; sarà questo uguale a quello del rettangolo $(q,\ h)$ diminuito del doppio di quello del triangolo $\left[\frac{1}{2}(q-p)h\right]$ e perciò dai (num. 1, 9): sarà

$$L' = \frac{q\,h^3}{3} - \frac{(q-p)\,h^3}{12} \quad \text{ossia} \quad L' = \left(\frac{3q+p}{12}\right)h^3 \qquad (a)$$

ed essendo

$$z = \frac{h}{3}\left(\frac{p+2q}{p+q}\right) \quad (a^{\text{I}}) \qquad \omega = \frac{h}{2}(p+q) \qquad (a^2)$$

dalle (a), (a^{I}), (a^2),

$$L = \frac{h}{12}\left[(p+3q)\,h^2 - 6\,(p+q)\,z^2\right] \qquad (13)$$

14. *Per una sezione trapezoidale a basi parallele verticali*: essendo $2q$, $2p$, le due basi maggiore e minore, il momento d'inerzia della sezione rispetto l'altezza h che passa per il suo centro di gravità; sarà il doppio di quello dato dalla formola (a^9) del (num.° 12) e quindi

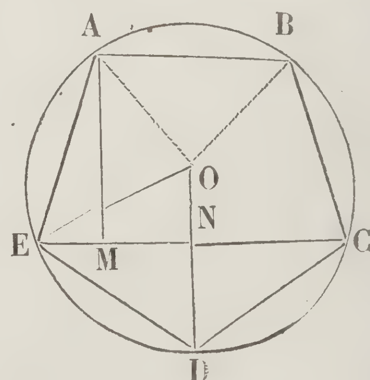
$$L = \frac{h}{6}\left(\frac{q^4-p^4}{q-p}\right)$$

15. *Per una sezione trapezoidale rettangola a basi parallele orizzontali*, essendo q, p, le basi inferiore, e superiore più piccola; e l'altezza della sezione h; la formola del momento d'inerzia L sarà la medesima

$$L = \frac{h}{12}\left[(p+3q)\,h^2 - 6\,(p+q)\,z^2\right] \qquad (15)$$

del (num.° 13) come è manifesto.

16. *Per una sezione pentagona*. Si chiami L' (fig. II^a) il suo momento d'inerzia rispetto la retta EC; questo sarà la somma dei due del triangolo EDC, e del trapezio EABC; si faccia



$$AM = h,\ EM = K,\ DN = h'$$
$$ON = z,\ EN = k',\ OE = r$$
$$AB = BC = \dots = EA = a$$

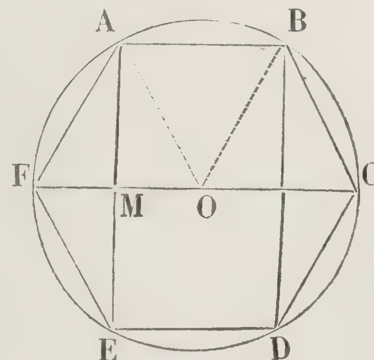
risulterà dai (num. 1, 9,)

$$L' = 2\left(\frac{K\,h^3}{12} + \frac{K'\,h'^3}{12}\right) + \frac{a\,h^3}{3}$$

ovvero

$$L' = \frac{h^3}{3}\left(a + \frac{k}{2}\right) + \frac{K'\,h'^3}{6} \quad (a)$$

ora essendo $$AOB = 72^\circ$$
$$OAB = 54^\circ,\ OAM = 36^\circ,\ EAM = 18^\circ$$
$$AEM = 72^\circ,\ OEM = 18^\circ,\ DEN = 36^\circ$$
$$h = a.\ \text{sen: } 72^\circ \qquad k = a.\ \text{cos: } 72^\circ \qquad h' = a.\ \text{sen: } 36^\circ \qquad k' = a.\ \text{cos: } 36^\circ$$
$$\text{sen. } 72^\circ = 0{,}9510 \quad \text{cos: } 72^\circ = 0{,}3090 \quad \text{sen: } 36^\circ = 0{,}5878 \quad \text{cos: } 36^\circ = 0{,}8090$$
sarà
$$h^3 = 0{,}8591 . a^3 \quad k = 0{,}3090 . a \quad h'^3 = 0{,}2030 . a^3 \quad k' = 0{,}8090 . a$$
e perciò sostituendo questi valori nella (a) sarà
$$L' = \frac{0{,}8591\ a^4}{3}\left(1 + \frac{0{,}3090}{2}\right) + \frac{0{,}2030 \times 0{,}8090\ a^4}{6}$$
$$= 0{,}3306 .\ a^4 + \frac{0{,}16422\ a^4}{6} \qquad L' = 0{,}3579 .\ a^4\ (a^1)$$
esistendo la relazione tra il lato del pentagono, ed il raggio del circolo circoscritto
$$a = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \quad \text{si ha} \quad r = 0{,}8507 . a \quad (a^2)$$
e siccome l'area di un poligono regolare, uguaglia il suo perimetro, nella metà del raggio del circolo inscritto; detto questo raggio r': si avrà
$$\omega = 5\ a . \frac{r'}{2} \quad \text{ed essendo} \quad r' = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \quad \text{risulta} \quad \omega = \frac{5}{4} a \sqrt{4 r^2 - a^2}$$
e per la (a^2) $$\omega = \tfrac{5}{4} a^2 \sqrt{2{,}8947 - 1} = 1{,}7205 . a^2 \qquad (a^3)$$
e per la (a^2) sarà
$$z\,(= r.\ \text{sen: } 18^\circ) = 0{,}8507 .\ \text{cos: } 72^\circ . a = 0{,}8507 \times 0{,}3090 .\ a$$
donde $$z^2 = 0{,}0690 .\ a^2 \qquad (a^4)$$
e perciò dalle (a^1), (a^3), (a^4)
$$L = 0{,}3579 .\ a^4 - 1{,}7205 \times 0{,}0690 .\ a^4 = 0{,}3579 .\ a^4 - 0{,}1187 .\ a^4$$
ossia $$L = 0{,}2392 .\ a^4 . \qquad (16)$$



17. *Per una sezione esagona.* (fig. IIIª) il momento d'inerzia L rispetto la FC ; sarà la somma del doppio di quello del triangolo BCD, e di quello del rettangolo ABDE; fatto quindi

$AM = h, EM = k, AB = BC = \ldots = FA = a,$

dai (num. 1, 5)

$$L = \frac{k h^3}{3} + \frac{2 a h^3}{3} = \tfrac{1}{3} h^3 (k + 2 a) \qquad (a)$$

essendo BOA = AFO = 60° risulta FAM = MAO = 30°

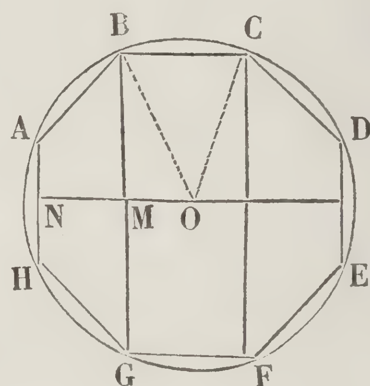
e perciò $h = a. \cos: 30°$ $k = a. \text{sen}: 30°$

e siccome cos: 30° = 0,86603 sen: 30° = 0,50000

sarà $h^3 = 0{,}6495.\, a^3$ $k = 0{,}5000.\, a$ (a^{I})

e quindi per l' (a') la (a) $L = \frac{0{,}6495}{3}(0{,}5000 + 2)\, a^4$

ossia $L = 0{,}5412.\, a^4$ (17)



18. *Per una sezione ottagona.* (fig. IV^a) il momento d'inerzia della sezione, sarà il quadruplo di quello del trapezio ABMN più quello del rettangolo BCFG : e perciò dai (num. 1, 12)

$$L = 4. \frac{h}{12}\left(\frac{q^4 - p^4}{q - p}\right) + \frac{8\, q^3\, a}{12} \qquad (a)$$

essendo

BOC = 45°; CBO = 67°, 30';

MBO = 22°, 30'; ABM = 45,

si avrà

$$q = CO\,(= r).\cos: 22°,\ 30' = 0{,}92388.\, r \qquad (a^{\text{I}})$$

$$h = (q - p).\ \text{tang: ABM} = q - p$$

$$p = \tfrac{1}{2}\, a$$

ed essendo $r = \frac{a}{2.\ \text{sen}: \frac{1}{2}\, 45°}$ ossia $r = 1{,}3066.\, a$ (a^2)

risulterà per le (a^{I}), (a^2)

$$q = 0{,}92388 \times 1{,}3066.\, a = 1{,}2071.\, a$$

$$q^3 = 1{,}7587.\, a^3 \quad q^4 = 2{,}1228.\, a^4 \quad p = 0{,}5.\, a \quad p^4 = 0{,}0625.\, a^4$$

e sostituendo questi valori nella (a)

$$L = 1{,}8591.\, a^4$$

19. *Per una sezione circolare.* Si dica r il raggio: sarà

$$L = 2 \int_{-r}^{r} d x \int_{0}^{\sqrt{r^2 - x^2}} y^2\, d y$$

$$= 4 \int_0^r \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} y^2\,\mathrm{d}y = \tfrac{4}{3} \int_0^r \mathrm{d}x\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

ora $\int \mathrm{d}x\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = r^2 \int \mathrm{d}\,x \sqrt{r^2 - x^2} - \int x^2\,\mathrm{d}x \sqrt{r^2 - x^2}$

$$= r^2 \int \mathrm{d}x \sqrt{r^2 - x^2} - \left[-\frac{x}{4}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{r^2}{4} \int \mathrm{d}\,x \sqrt{r^2 - x^2} \right]$$

$$= \tfrac{3}{4} r^2 \int \mathrm{d}x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{x}{4}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

e perciò

$$\mathrm{L} = \tfrac{4}{3}\left[\tfrac{3}{4} r^2 \int_0^r \mathrm{d}x \sqrt{r^2 - x^2} + \left(\frac{x}{4}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right)_0^r \right]$$

ora $\left(\frac{x}{4}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right)_0^r = 0$

$$\int_0^r \mathrm{d}\,x \sqrt{r^2 - x^2} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\,\text{arc: sen}\left(= \frac{x}{r} \right) \right]_0^r = \frac{\pi\,r^2}{4}$$

quindi $\mathrm{L} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\,r^2}{4} \cdot \frac{\pi\,r^2}{4}$ ossia $\mathrm{L} = \frac{\pi\,r^4}{4}$ (19)

questa integrazione sarebbesi ancora potuto ottenere facilmente, facendo nella formola

$$\mathrm{L} = \tfrac{2}{3} \int_{-r}^{r} \mathrm{d}\,x\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad x = r.\cos{:}\,\alpha,\ y = r.\,\text{sen:}\,\alpha$$

difatti per

$x = r,\ \cos{:}\,\alpha = 1,\ \alpha = 0 \qquad x = -r,\ \cos{:}\,\alpha = -1,\ \alpha = \pi$

epperò

$$\mathrm{L} = -\tfrac{2}{3} r^4 \int_\pi^0 \text{sen}^4{:}\,\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha = \tfrac{2}{3} r^4 \int_0^\pi \text{sen}^4{:}\,\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \qquad (\alpha)$$

ed essendo in genere

$$\int \mathrm{d}x\,\text{sen}^m{:}\,x = -\frac{\text{sen:}^{m-1}\,x.\cos{:}\,x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \mathrm{d}x\,\text{sen:}^{m-2}\,x$$

sarà $\int_0^\pi \mathrm{d}\,x\,\text{sen:}^m\,x = \frac{m-1}{m} \int_0^\pi \text{sen:}^{m-1}\,x\,\mathrm{d}x$

e quindi $\int_0^\pi \text{sen}^4{:}\,\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha = \tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}\pi$ e dalla (α) $\mathrm{L} = \tfrac{2}{3} r^4.\,\tfrac{3}{4}\,.\,\tfrac{1}{2}\pi$

ossia $\mathrm{L} = \frac{\pi\,r^4}{4}$ come erasi ottenuto.

*

20. *Per una sezione ellitica coll'asse maggiore orizzontale.* Siano a, e b, i semiassi maggiore e minore; sarà

$$L = 2 \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \, dy = \tfrac{4}{3} \frac{b^3}{a^3} \int_{0}^{a} dx \, (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

e dal (num.° 19)

$$\int_{0}^{a} dx \, (a^2 - x^2) = \tfrac{3}{4} a^2 . \frac{\pi a^2}{4} \quad \text{donde} \quad L = \tfrac{4}{3} . \frac{b^3}{a^3} . \tfrac{3}{4} a^2 . \frac{\pi a^2}{4}$$

ossia

$$L = \frac{\pi a b^3}{4} \qquad (20)$$

21. *Per una sezione ellittica coll'asse minore orizzontale,* sarà facilmente

$$L = 2 \int_{-b}^{b} dy \int_{0}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} x^2 \, dx = \tfrac{4}{3} \int_{0}^{b} (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \, dy$$

e dal (num.° 19)

$$\int_{0}^{b} (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{4} b^2 . \frac{\pi b^2}{4}$$

donde

$$L = \tfrac{4}{3} . \frac{a^3}{b^3} . \tfrac{3}{4} b^2 . \frac{\pi b^2}{4} \quad \text{ossia} \quad L = \frac{\pi b a^3}{4} \qquad (21)$$

22. *Per una sezione semicircolare con il diametro verticale,* sarà dal (n.° 19)

$$L = 2 \int_{0}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2 \, dy = \tfrac{2}{3} . \tfrac{3}{4} r^2 . \frac{\pi r^2}{4} \quad \text{ossia} \quad L = \frac{\pi r^4}{8} \quad (22)$$

23. *Per una sezione semicircolare con il diametro orizzontale;* dicasi L' il momento d' inerzia della sezione rispetto il diametro ; z la distanza del suo centro di gravità, da esso sarà

$$L' = \int_{-r}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2 \, dy = \tfrac{2}{3} \int_{0}^{r} dx \, (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$z = \frac{\int_{0}^{r} y \, dy \int_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx}{\int_{0}^{r} dy \int_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx} = \frac{\int_{0}^{r} y \, dy \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{\int_{0}^{r} dy \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left[- \tfrac{1}{3} (r^2 - y^2)^{\frac{3}{1}} \right]_0^{\nu}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4 r}{3 \pi} \qquad \omega = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$L = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{4 r}{3 \pi} \right)^2$$

ossia

$$L = \frac{\pi r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9 \pi^2} \right). \tag{23}$$

24. *Per una sezione semiellittica coll'asse maggiore verticale.* Sarà

$$L = 2 \int_0^b d y \int x^2 d x = \tfrac{2}{3} \int_0^b d y (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

e per il (num.° 19)

$$L = \frac{\pi a^3 b}{8}. \tag{24}$$

25. *Per una sezione semiellittica coll'asse maggiore orizzontale,* detto L' il momento d'inerzia rispetto l'asse $2 a$ orizzontale, z la distanza del suo centro di gravità dal detto asse; sarà

$$L' = \tfrac{2}{3} \frac{b^3}{a^3} \int_0^a d x (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi b^3 a}{8} \tag{a}$$

$$z = \frac{\int_0^b y d y (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{\int_0^b d y (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left[- \tfrac{1}{3} (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^b}{\frac{\pi b^2}{4}} = \frac{4 b}{3 \pi} \tag{a'}$$

$$\omega = \frac{\pi ab}{2} \tag{a''}$$

e dalle (a), (a'), (a''),

$$L = \frac{\pi b^3 a}{8} - \frac{\pi a b}{2} \cdot \frac{16 b^2}{9 \pi^2}$$

ossia

$$L = \frac{\pi b^3 a}{8} \left(1 - \frac{64}{9 \pi^2} \right). \tag{25}$$

26. *Per una sezione semiellittica coll'asse minore verticale,* evidentemente

$$L = \tfrac{2}{3} \frac{b^3}{a^3} \int_0^a d x (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi b^3 a}{8}. \tag{26}$$

27. *Per una sezione semiellittica coll'asse minore orizzontale:* sarà

$$L' = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{b^3} \int_0^b \mathrm{d}\, y\, (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\, a^3\, b}{8} \qquad (a)$$

$$z = \frac{\int_0^a x\, \mathrm{d}\, x \sqrt{a^2 - x^2}}{\int_0^a \mathrm{d}\, x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4\, a}{3\, \pi} \qquad (a')$$

$$\omega = \frac{\pi\, a\, b}{2} \qquad (a'')$$

e per le (a), (a'), (a''),

$$L = \frac{\pi\, a^3\, b^2}{8} - \frac{\pi\, a\, b}{2} \cdot \frac{16\, a^2}{9\, \pi^2}$$

ossia

$$L = \frac{\pi\, a^3\, b}{8}\left(1 - \frac{64}{9\, \pi^2}\right). \qquad (27)$$

28. *Per una sezione parabolica colla doppia ordinata verticale.* Sia a l'ascissa corrispondente alla doppia ordinata che termina la sezione di contorno una parabola di equazione

$$y^2 = p\, x$$

sarà

$$L = 2 \int_0^a \mathrm{d}\, x \int y^2\, \mathrm{d}\, y = \tfrac{2}{3} p^{\frac{3}{2}} \int_0^a x^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}\, x = \frac{4}{15}\, p^{\frac{3}{2}}\, a^{\frac{5}{2}}$$

ossia

$$L = \frac{4}{15}\, a.\, pa.\, \sqrt{pa}. \qquad (28)$$

29. *Per una sezione parabolica colla doppia ordinata orizzontale.* Sia come nel (num.° antecedente:) a l'ascissa corrispondente alla doppia ordinata $2\sqrt{pa}$ orizzontale; e si ponga l'origine alla distanza a dal vertice; l'equazione della curva sarà

$$y^2 = p\, (a - x)$$

dalla quale

$$x = \frac{pa - y^2}{p}$$

e detto L' il momento d'inerzia della sezione rispetto la doppia ordinata $2\sqrt{pa}$ si avrà

$$L' = \int_{-\sqrt{pa}}^{\sqrt{pa}} \mathrm{d} y \int x^2\, \mathrm{d} x = \frac{2}{3\, p^3} \int_0^{\sqrt{pa}} (pa - y^2)^3\, \mathrm{d} y$$

$$= \frac{2}{3\,p^3}\left\{p^3 a^3 \int dy - 3\,p^2 a^2 \int y^2 dy + 3\,pa \int y^4\,d\,y - \int y^6\,d\,y\right\}_0^{\sqrt{pa}}$$

$$= \frac{2}{3\,p^3}\left\{p^3 a^3 \sqrt{pa} - \frac{3p^3a^3}{5}\sqrt{pa} + \tfrac{3}{5} p^3 a^3 \sqrt{pa} - \tfrac{4}{7} p^3 a^3 \sqrt{p\,a}\right\}$$

ossia $$= \frac{32}{105}\sqrt{pa}.\ a^3 \qquad (a)$$

risulta

$$z = \frac{\int_0^a x\,dx\sqrt{a-x}}{\int_0^a d\,x\ \sqrt{a-x}}$$

e facendo $$\sqrt{a-x} = z$$

$$z = \frac{\int_{\sqrt{a}}^0 (a-z^2)\,z^2\,dz}{\int_{\sqrt{a}}^0 z^2\,d\,z} = \frac{\left[\frac{a\,z^2}{3} - \frac{z^5}{5}\right]_{\sqrt{a}}^0}{\left(\frac{z^3}{5}\right)_{\sqrt{a}}^0} = \tfrac{2}{5}\,a \qquad (a')$$

ed essendo $$\omega = \tfrac{4}{3}\,a\sqrt{pa} \qquad (a'')$$

dalle (a), (a'), (a''),

$$L = \frac{32}{105}\sqrt{pa}.\ a^3 - \tfrac{4}{3}\,a\sqrt{pa}.\,\frac{4}{25}a^2$$

ossia $$L = \frac{16}{175}a^3\sqrt{pa} \qquad (29)$$

senza trasportare l' origine nell' estremità di a, per determinare L', s' integrebbe la formola

$$L' = 2\int_0^a (a-x)^2\,dx \int_0^{\sqrt{px}} dy.$$

30. *Per un quadrante circolare.*

$$L' = \frac{\pi\,r^4}{16} \qquad \text{(V. n.° 19)}$$

$$z = \frac{4\,r}{3\,\pi} \qquad \text{(V. n.° 23)}$$

e quindi $$L = \frac{\pi\,r}{16}\left(1 - \frac{64}{9\,\pi^2}\right). \qquad (30)$$

31. *Per un quadrante ellittico con il semiasse minore verticale.*

$$\mathrm{L}' = \frac{\pi\, b^3\, a}{16} (\text{V. n.}^{\circ}\ 26) \qquad z = \frac{4\, b}{3\,\pi}\ (\text{V. n.}^{\circ}\ 25)$$

$$\omega = \frac{\pi\, ab}{4} \text{ donde } \mathrm{L} = \frac{\pi\, b^3\, a}{16}\left(1 - \frac{64}{9\,\pi^2}\right). \tag{31}$$

32. *Per un quadrante ellittico con il semiasse minore orizontalé.*

$$\mathrm{L}' = \frac{\pi\, a^3\, b}{16}\ (\text{V. n.}^{\circ}\ 27) \qquad z = \frac{4\, a}{3\,\pi}\ (\text{V. n.}^{\circ}\ 27)$$

$$\omega = \frac{\pi\, ab}{4} \quad \text{epperò} \quad \mathrm{L} = \frac{\pi\, b^3\, a}{16}\left(1 - \frac{64}{9\,\pi^2}\right). \tag{32}$$

33. *Per un segmento di circolo colla doppia ordinata verticale, di freccia minor del raggio*: dicasi r il raggio del circolo; f e $2\,y_0$ la freccia, e la corda che termina il segmento; si faccia $x_0 = r - f$: sarà

$$\mathrm{L} = 2\int_{x_0}^{r} \mathrm{d}x \int y^2\, \mathrm{d}y = \tfrac{2}{3}\int_{x_0}^{r} \mathrm{d}\, x\, (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \tfrac{2}{3}\left\{\frac{3\, r^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\text{ arc: sen}\left(= \frac{x}{r}\right)\right] + \frac{x}{4}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}_{x_0}^{r}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{3\, r^3}{2}\left[\frac{\pi\, r}{2} - r.\text{ arc: sen}\left(= \frac{x_0}{r}\right)\right] - x_0\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\frac{5}{2}r^2 - x_0^2\right)\right\}$$

ovvero essendo $x_0 = \sqrt{r^2 - y_0^2}$: $x_0 = y - f$:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{6}\left\{\frac{3r^3}{2}\left[\frac{\pi\, r}{2} - r\text{ arc: sen}\left(= \frac{\sqrt{r^2 - y_0^2}}{r}\right)\right] - y_0\sqrt{r^2 - y_0^2}\left(\tfrac{3}{2}r^2 + y_0^2\right)\right\}$$

$$\mathrm{L} = \frac{1}{6}\left\{\frac{3\, r^3}{3}\left[\frac{\pi\, r}{2} - r\text{ arc: sen}\left(= \frac{r - f}{r}\right)\right] - (r - f)\sqrt{2\, r f - f^2}\left(\frac{3r^2}{2} + 2\, f r - f^2\right)\right\}.$$

34. *Per un segmento di circolo di freccia maggiore del raggio, e colla doppia ordinata verticale*: si supponga $f > r$: e sia $x_0 = f - r$: sarà

$$\mathrm{L} = 2\int_{-x_0}^{y} \mathrm{d}\, x \int y^2\, \mathrm{d}y = \tfrac{2}{3}\int_{-x_0}^{y} \mathrm{d}\, x\, (y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{3\, r^3}{2}\left[\frac{\pi r}{2} + y.\text{ arc: sen}\left(= \frac{x_0}{r}\right)\right] + x_0\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\tfrac{5}{2}r^2 - x_0^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{3\, r^3}{2}\left[\frac{\pi r}{2} + y.\text{ arc: sen}\left(= \frac{\sqrt{r^2 - y_0^2}}{r}\right) + y_0\sqrt{r^2 - y_0^2}\left(\tfrac{3}{2}r^2 + y_0^2\right)\right\}.$$

35. *Per un arca di circolo compresa fra il diametro, e la doppia ordinata verticali*: è manifesto, che L sarà uguale alla differenza dei momenti d'inerzia; della semiarea circolare e del segmento di doppia ordinata $2y_0$: e di freccia $r-x_0$: e perciò

$$L=\frac{1}{6}\left\{\frac{3r^3}{2}\cdot r.\ \text{arc: sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)+x_0\sqrt{r^2-x_0^2}\left(\tfrac{5}{2}r^2-x_0^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{3r^3}{2}.r.\ \text{arc: sen}\left(=\frac{\sqrt{r^2-y_0^2}}{r}\right)+y_0\sqrt{r^2+y_0^2}\left(\tfrac{3}{2}r^2+y_0^2\right)\right\}.$$

36. *Per un'area di circolo compresa fra due doppie ordinate verticali che non comprendono il diametro*: siano $2y_0$, $2y_0'$; le doppie ordinate, che determinano due segmenti di freccie f_0; f_0'; il momento L sarà la differenza dei due; di questi due: e perciò.

$$L=\frac{1}{6}\left\{\frac{3r^3}{2}\left[r.\ \text{arc:sen}\left(=\frac{x_0'}{r}\right)-r.\ \text{arc: sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right]\begin{matrix}-x_0\sqrt{r^2-x_0^2}\left(\frac{5}{2}r^2-x_0^2\right)\\+x_0^2\sqrt{r^2-x_0'^2}\left(\frac{5}{2}r^2-x_0^2\right)\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{3r^2}{2}\left[r.\ \text{arc: sen}\left(=\frac{\sqrt{r^2-y_0^2}}{r}\right)-r.\ \text{arc:sen}\left(=\frac{\sqrt{r^2-y_0^2}}{r}\right)\right]\begin{matrix}-y_0\sqrt{r^2-y_0^2}\left(\frac{3}{2}r^2+y_0^2\right)\\+y_0'\sqrt{r^2-y_0'^2}\left(\frac{3}{2}r^2+y_0'^2\right)\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{3\nu^3}{2}\left[r.\ \text{arc: sen}\left(=\frac{r-f_0'}{r}\right)-r.\ \text{arc: sen}\left(=\frac{\nu-f_0}{\nu}\right)\right]\begin{matrix}-(r-f_0)\sqrt{2rf_0-f_0^2}\left(\frac{3}{2}r^2+2f_0r-f_0^2\right)\\+(r-f_0')\sqrt{2rf_0'-f_0'^2}\left(\frac{3}{2}r^2+2f_0'r-f_0'^2\right)\end{matrix}\right\}$$

e detto A_c l'arco compreso fra le due corde $2y_0$; $2y'_0$:

$$L=\frac{1}{6}\left\{\frac{3r^3}{2}\cdot A_c\begin{matrix}-&\text{ect.}&\text{ect.}\\+&\text{ect.}&\text{ect.}\end{matrix}\right\}$$

ovvero

$$L=\frac{1}{b}\left(\frac{3r^3}{2}\cdot A_c+\sum_{x=x_0}^{x=x'_0}x\sqrt{r^2-x^2}\left(\tfrac{5}{2}r^2-x^2\right)\right)$$

$$L=\frac{1}{6}\left(\frac{3r^3}{2}\cdot A_c+\sum_{y=y_0}^{y=y'_0}y\sqrt{r^2-y_0^2}\left(\tfrac{3}{2}r^2+y^2\right)\right)$$

$$L=\frac{1}{6}\left(\frac{3r^3}{2}\cdot A_c+\sum_{f=f_0}^{f=f'_0}(r-f)\sqrt{2\nu f-f^2}\left(\tfrac{3}{2}\nu^2+2\nu f-f^2\right)\right).$$

37. *Per un'area di circolo compresa fra due doppie ordinate verticali che comprendono il diametro*: essendo $2y$: $2y'_0$ le due doppie ordinate verticali dal (n. 34)

$$L = \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} r^3 . r . \text{ arc: sen} \left(= \frac{x_0}{r} \right) + x_0 \sqrt{r^2 - x_0^2} \left(\frac{5}{2} r^2 - x_0^2 \right) \\ \frac{3}{2} r^3 . r . \text{ arc: sen} \left(= \frac{x'_0}{r} \right) + x'_0 \sqrt{r^2 - x'^2_0} \left(\frac{5}{2} r^2 - x'^2_0 \right) \end{array} \right\}$$

$$L = \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} r^3 . r . \text{ arc: sen} \left(= \frac{\sqrt{r^2 - y_0^2}}{r} \right) + y_0 \sqrt{r^2 - y_0^2} \left(\frac{3}{2} r^2 + y_0^2 \right) \\ \frac{3}{2} r^3 . r . \text{ arc: sen} \left(= \frac{\sqrt{r^2 - y'^2_0}}{r} \right) + y'_0 \sqrt{r^2 - y'^2_0} \left(\frac{3}{2} r^2 + y'^2_0 \right) \end{array} \right\}$$

$$L = \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} r^3 . r . \text{ arc: sen} \left(= \frac{y - f_0}{r} \right) + (r - f_0) \sqrt{2 r f_0 - f_0^2} \left(\frac{3}{2} r^2 + 2 r f_0 - f_0^2 \right) \\ \frac{3}{2} r^3 . r \text{ arc: sen} \left(= \frac{r - f_0'}{r} \right) + (r - f_0') \sqrt{2 r f_0' - f'^2_0} \left(\frac{3}{2} r^2 + 2 r f_0' - f'^2_8 \right) \end{array} \right\}$$

e detto A_c: l'arco compreso fra le due doppie ordinate

$$L = \frac{1}{6} \left[\frac{3}{2} r^3 . A_c + \sum_{x = -x'_0}^{x = x_0} x_0 \sqrt{r^2 - x^2} \left(\frac{5}{2} r^2 - x^2 \right) \right]$$

$$L = \frac{1}{6} \left[\frac{3}{2} r^3 . A_c + \sum_{y = -y'_0}^{y = y'_0} y_0 \sqrt{r^2 - y^2} \left(\frac{3}{2} r^2 + y^2 \right) \right]$$

$$L = \frac{1}{6} \left[\frac{3}{2} r^3 . A_c + \sum_{f = -f'_0}^{f = f_0} (y - f) \sqrt{2 r f_0' - f_0^2} \left(\frac{3}{2} r^2 + 2 r f - f^2 \right) \right].$$

38. *Per un segmento ellittico colla doppia ordinata verticale*: sarà

$$L = \int_{x_0}^{a} \mathrm{d}\, x \int y^2 \,\mathrm{d}\, y = \frac{2 b^3}{3 a^3} \int_{x_0}^{a} \mathrm{d}\, x \, (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{b^3}{6 a^3} \left\{ \frac{3 a^3}{2} \left[\frac{\pi a}{2} - a . \text{ arc: sen} \left(= \frac{x_0}{a} \right) \right] - x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} \left(\frac{5}{2} a^2 - x_0^2 \right) \right\}$$

fattovi

$$x_0 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y_0^2}$$

$$L = \frac{1}{6} \left\{ \frac{3 b^3}{2} \left[\frac{\pi a}{2} - a . \text{ arc: sen} \left(= \frac{x_0}{a} \right) \right] - \frac{a}{b} y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} \left(\frac{3}{2} b^2 + y_0^2 \right) \right\}$$

e

$$x_0 = a - f$$

$$L = \frac{b^3}{6 . a^3} \left\{ \frac{3 a^3}{2} \left[\frac{\pi a}{2} - a . \text{ arc: sen} \left(= \frac{a - f}{a} \right) \right] - (a - f) \sqrt{2 a f - f^2} (a^2 + 2 a f - f^2) \right.$$

nelle quali fatto

$$\frac{\pi a}{2} - a . \text{ arc: sen} \left(= \frac{x_0}{a} \right) = A_c, \text{ si ha ect....}$$

A_c è la metà dell'arco d'un segmento di circolo di raggio a; circoscritto al segmento ellittico.

39. *Per un segmento ellittico colla doppia ascissa verticale*: sarà

$$L = \int_0^b dy \int x^2 dx = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{b^3} \int_{y_0}^b dy \, (b^2 - y^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{a^3}{6 b^3} \left\{ \frac{3 b^3}{2} A_c - y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} \left(\tfrac{5}{2} b^2 - y_0^2 \right) \right\}$$

fattovi

$$y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$$

$$L = \frac{1}{6} \left\{ \frac{3 a^3 6}{2} A_c - \frac{b}{a} x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} \left(\tfrac{3}{2} a^2 + x_0^2 \right) \right\}$$

fattovi

$$y_0 = b - f$$

$$L = \frac{a^3}{6 b^3} \left\{ \frac{3 b^3}{2} \cdot A_c - (b - f) \sqrt{2 b f - f^2} \left(\tfrac{3}{2} b^2 + 2 b f - f^2 \right) \right\}$$

essendo

$$A_c = \frac{\pi b}{2} - b . \text{ arc: sen} \left(= \frac{y_0}{b} \right)$$

40. *Per un segmento ellittico di freccia più grande del semiasse maggiore orizontale*: si avrà

$$L = 2 \int_{-x_0}^a d x \int y^2 dy = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \int_{-x_0}^a dx \, (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{b^3}{6 a^3} \left\{ \frac{3 a^3}{2} \cdot A_c + x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} \left(\tfrac{5}{2} a^2 - x_0^2 \right) \right\}$$

e fattovi

$$x_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2}$$

$$L = \frac{1}{6} \left\{ \frac{3 b^3}{2} A_c + \frac{a}{b} y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} \left(\frac{3 b^2}{2} + y_0^2 \right) \right\}$$

essendo

*

$$A_c = \frac{\pi a}{2} + a.\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x_0}{a}\right).$$

41. *Per un segmento ellittico di freccia maggiore del semiasse minore orizzontale*: avremo

$$L = 2 \int_{-y_0}^{b} d\,y \int x^2\, dx = \tfrac{2}{3}\frac{a^3}{b^3} \cdot \int_{-y_0}^{b} dy\,(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{a^3}{6\,b^3}\left\{\frac{3\,b^3}{2} A_c + y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2}\,(\tfrac{5}{2} b^2 - y_0^2)\right\}$$

e fattovi

$$y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$$

$$L = \frac{1}{b}\left\{\frac{3\,a^3}{2} \cdot A_c + \frac{b}{a} x_0 \sqrt{b^2 - x_0^2}\,(\tfrac{3}{2} a^2 + x_0^2)\right\}$$

essendo

$$A_c = \frac{\pi b}{2} + b.\ \text{arc. sen}\left(= \sqrt{a^2 - x_0^2}\right).$$

42. *Per un segmento ellittico compreso fra l'asse minore, e la doppia ordinata verticali*: essendo x_0 l'altezza del segmento fra corda e corda; si ottiene

$$L = 2 \int_0^b d\,x \int y^2\, dy - 2 \int_{x_0}^{a} d\,x \int y^2\, d\,y$$

e dai (num. 25, 38)

$$L = \frac{b^3}{6.\,a^3}\left\{\frac{3\,a^3}{2} \cdot a.\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x_0}{a}\right) + x_0 \sqrt{a^2 - y_0^2}\,(\tfrac{5}{2} a^2 - x_0^2)\right\}$$

$$L = \frac{1}{6}\left\{\frac{3\,b^3}{2} \cdot a.\ \text{arc. sen}\left(= \frac{\sqrt{b^2 - y_0^2}}{b}\right) + \frac{a}{b} y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2}\,(\tfrac{3}{2} b^2 + y_0^2)\right\}.$$

43. *Per un segmento ellittico compreso fra l'asse maggiore, e la doppia ascissa verticale;* detta y_0 l'altezza

$$L = 2 \int_0^b d\,y \int x^2\, d\,x - 2 \int_{y_0}^{b} d\,y \int x^2\, d\,x$$

e dai (num. 26, 39)

$$L = \frac{a^3}{6\,b^3}\left\{\tfrac{3}{2} b^3.\ b\ \text{arc. sen}\left(= \frac{y_0}{b}\right) + y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2}\,(\tfrac{5}{2} b^2 - y_0^2)\right\}$$

$$L = \frac{1}{6}\left\{\frac{3\,a^2\,b}{2} \cdot a.\ \text{arc. sen}\left(= \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{a}\right) + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}\,(\tfrac{3}{2} a^2 + x_0^2)\right\}.$$

44. *Per un'area ellittica compresa fra due doppie ordinate verticali che non comprendono il diametro.* Siano x_0', x_0, le ascisse corrispondenti alle due doppie ordinate $2\,y'_0$, $2\,y_0$; avremo

$$L = 2\int_{x'_0}^{a} dx \int y^2\, dy - 2\int_{x_0}^{a} dx \int y^2\, dy = 2\int_{-x'_0}^{x_0} dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\, dy$$

$$= \frac{b^3}{6.\,a^3}\left\{\frac{3\,a^3}{2}\left[a.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right) - a.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{x'_0}{a}\right)\right] \begin{matrix} +x'_0\sqrt{a^2-x_0^2}\,(\frac{5}{2}a^2-x'^2_0) \\ -\,x_0\sqrt{a^2-x_0^2}\,(\frac{5}{2}a^2-x_0^2)\end{matrix}\right\}$$

ovvero

$$L = \frac{b^3}{6.a^3}\left[\frac{3\,a^3}{2}\sum_{x=x'_0}^{x=x_0} a.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{x}{a}\right) + \sum_{x=x'_0}^{x=x_0} x\sqrt{a^2-x^2}\,(\tfrac{5}{2}\,a^2 - x^2)\right]$$

$$L = \frac{1}{6}\left[\frac{3\,b^2\,a}{2}\sum_{y=y'_0}^{y=y_0} b.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b}\right) + \frac{a}{b}\sum_{y=y'_0}^{y=y_0} y_0\sqrt{b^2-y_0^2}\,(\tfrac{3}{2}\,b^2+y^2)\right].$$

45. *Per un' area d' ellissi compresa fra due doppie ascisse verticali che non comprendono l'asse maggiore,* per il (num.° ant.^e)

$$L = \frac{a^3}{6.b^3}\left[\frac{3\,b^3}{2}\sum_{y=y'_0}^{y=y_0} b.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{y}{b}\right) + \sum_{y'_0=y'_0}^{y=y_0} y\sqrt{b^2-y^2}\,(\tfrac{5}{2}\,b^2 - y^2)\right]$$

$$L = \frac{1}{6}\left[\frac{3\,a^2\,b}{2}\sum_{x=x'_0}^{x=x_0} a.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + \frac{b}{a}\sum_{x=x'_0}^{x=x_0} x\sqrt{a^2-x^2}\,(\tfrac{3}{2}\,a^2 + x^2)\right].$$

46. *Per un'area ellittica compresa tra due ordinate verticali che comprendano l'asse minore:* dal (num.° 42)

$$L = \frac{b^3}{6.\,a^3}\left[\tfrac{3}{2}\,a^3\sum_{x=-x'_0}^{x=x_0} a.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{x}{a}\right) + \sum_{x=-x_0}^{x=x_0} x\sqrt{a^2-x^2}\,(\tfrac{5}{2}\,a^2 - x^2)\right]$$

$$L = \frac{1}{6}\left[\tfrac{3}{2}\,b^2\,a\sum_{y=-y'_0}^{y=y_0} b.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b}\right) + \frac{a}{b}\sum_{y=-y'_0}^{y=y_0} y\sqrt{b^2-y^2}\,(\tfrac{3}{2}\,b^2 + y^2)\right].$$

47. *Per un'area ellittica compresa fra due doppie ascisse verticali che comprendono l'asse maggiore:* dal (num.° ant.^e)

$$L = \frac{a^3}{6.b^3}\left[\tfrac{3}{2}\,b^3\sum_{y=-y_0}^{y=-y_0} b.\,\text{arc. sen}\left(=\frac{y}{b}\right) + \sum_{y=-y_0}^{y=y_0} y\sqrt{b^2-y^2}\,(\tfrac{5}{2}\,b^2 - y^2)\right]$$

$$L = \frac{1}{b}\left[\tfrac{3}{2}a^2 b \sum_{x=-x'_0}^{x=x_0} a.\text{ arc. sen}\left(=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + \frac{b}{a}\sum_{x=-x_0}^{x=x_0} x\sqrt{a^2-x^2}\,(\tfrac{3}{2}a^2+x^2)\right].$$

48. *Per un segmento circolare colla corda* 2 x_0 *orizzontale*: si richiami l'eq:

$$L = L' - \omega z^2 \qquad (a)$$

si ha

$$\omega = 2\int_{y_0}^{r} d\,y\sqrt{r^2-y^2} = r.\,r\text{ arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right) - x_0\sqrt{r^2-x_0^2} \qquad (a')$$

dette z, z', le distanze del centro di gravità dell'area; dalla doppia ascisse $2x_0$, e dal diametro orizzontale: risulta

$$z = \frac{\int_{y_0}^{r} y\,dy\int d\,x}{\int_{y_0}^{r} d\,y\int d\,x}(=z') - y_0 = \tfrac{2}{3}\,\frac{(r^2-y_0^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega} - y_0 \qquad (a'')$$

detto L' il momento d'inerzia dell'area rispetto la corda $2x_0$: si avrà

$$L' = 2\int_0^{x_0} d\,x\int y^2\,dy = \tfrac{2}{3}\int_0^{x_0} dx\,(\sqrt{r^2-x^2}-y_0)^3$$

$$= \tfrac{2}{3}\int_0^{x_0} dx\left[(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - 3\,y_0\,(r^2-x^2) + 3\,y_0^2\sqrt{r^2-x^2} - y_0^3\right]$$

ora

$$\int_0^{x_0} d\,x\sqrt{r^2-x^2} = \frac{x_0}{2}\sqrt{r^2-x_0^2} + \frac{r^2}{2}\text{ arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)$$

$$\int_0^{x_0} d\,x\,(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}r^2\left[\frac{x_0}{2}\sqrt{r^2-x_0^2} + \frac{r^2}{2}\text{ arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right] + \frac{x_0}{4}(r^2-x_0^2)^{\frac{3}{2}}$$

e sostituendo e riducendo

$$L' = \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{3}{2}r^2.\text{ arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\left(y_0^2+\tfrac{1}{4}r^2\right) - \tfrac{1}{4}y_0\sqrt{r^2-y_0^2}\,(y_0^2+\tfrac{13}{2}r^2)\right] \qquad (a''')$$

e per l'eq: (a), (a'), (a''), (a''')

$$L = \tfrac{1}{2}\left\{3\,r^2.\text{ arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\left(\tfrac{5}{4}r^2 - z^2 - x_0^2\right) - \tfrac{1}{4}x_0\sqrt{r^2-x_0^2}\,(\tfrac{15}{2}r^2 - 6\,z^2 - x_0^2)\right\}.$$

49. *Per un segmento di circolo compreso fra il diametro e la doppia ascissa orizzontali.* Si dica questa $2\,x_0$: e l'altezza del segmento y_0; si ha

$$\omega = \frac{\pi r^2}{2} - 2\int_{y_0}^{r} \mathrm{d}y\,\sqrt{r^2 - y^2} = r\left[\frac{\pi r}{2} - r.\ \mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right] + x_0\sqrt{r^2 - x_0^2}$$

$$z = \frac{\int_0^{y_0} y\,\mathrm{d}y \int \mathrm{d}x}{\int_0^{y_0} \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\left(r^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{y_0}}{\frac{1}{2}\,\omega} = \frac{2}{3}\,\frac{r^3 - x_0^3}{\omega}$$

il momento d'inerzia L' rispetto il diametro orizzontale; sarà la somma dei due del rettangolo $2\,x_0$, y_0; e del segmento $2\,y_0$ di corda; e $(r - x_0)$ di freccia: e perciò dai num.[i] (1, 33)

$$L' = \frac{2}{3}\,x_0\,y_0^3 + \frac{1}{6}\left\{\frac{3\,r^3}{2}\left[\frac{\pi r}{2} - r.\ \mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right] - x_0\sqrt{r^2 - x_0^2}\,\left(\frac{5}{2}\,r^2 - x_0^2\right)\right\}$$

ovvero

$$L' = \frac{1}{6}\left[\frac{3\,r^4}{2}\,\mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{y_0}{r}\right) + 3\,x_0\,\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\frac{r^2}{2} - x_0^2\right)\right]$$

e perciò

$$L = \frac{1}{b}\left(\left[\frac{3\,r^4}{2}\cdot\mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{y_0}{r}\right)\right]\left(r^2 - 4z^2\right) + 3\,x_0\,\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\frac{r^2}{2} - 2\,z^2 - x_0^2\right)\right).$$

50. *Per un segmento di circolo di freccia maggiore del raggio colla doppia ascissa orizzontale.* S'ottiene

$$\omega = 2\int_{-y_0}^{r} \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x = r\left[\pi r - r.\ \mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right] + x_0\sqrt{r^2 - x_0^2}$$

ed essendo z la distanza del centro di gravità dell'area dal diametro orizzontale

$$z = \frac{\int_{-y_0}^{r} y\,\mathrm{d}y \int \mathrm{d}x}{\int_{-y_0}^{r} \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x} = \frac{\int_{-y_0}^{r} y\,\mathrm{d}y\,\sqrt{r^2 - y^2}}{\int_{-y_0}^{r} \mathrm{d}y\,\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{2}{3}\,\frac{x_0^3}{\omega}$$

e per i (num.[i] 23, 49) il momento L' rispetto il diametro

$$L' = \frac{\pi r^4}{8} + \frac{1}{6}\left\{\frac{3\,r^3}{2}\left(\frac{\pi r}{2} - r.\ \mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right) + 3\,x_0\,\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\frac{r^2}{2} - x_0^2\right)\right\}\right.$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{3\,r^3}{2}\left[\pi r - r.\mathrm{arc.\ sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right] + 3\,x_0\,\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\frac{r^2}{2} - x_0^2\right)\right\}$$

e per la $L = L' - \omega\,z^2$:

$$L = \frac{1}{6}\left\{\frac{3\,r}{2}\left[\pi\, r - r.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right)\right]\left(r^2 - 4z^2\right) + 3x_0\sqrt{r^2 - x_0^2}\left(\frac{r^2}{2} - 2z^2 - x_0^2\right)\right\}.$$

51. *Per un segmento di circolo compreso fra due doppie ascisse orizzontali, ché non comprendono il diametro.* Siano $2x'_0$, $2\,x_0$, le corde minore e maggiore del segmento; di ordinate y'_0, y''_0: L', L'', L''', i momenti d'inerzia, dell'area data, e dei segmenti di corda $2x_0$, $2x'_0$, rispetto la doppia ascissa $2x_0$; sarà

$$L' = L'' - L''' \qquad (a)$$

esprima μ' il momento d'inerzia del segmento di corda $2\,x'_0$ rispetto una linea che passa per il suo centro di gravità: z' la distanza di questo centro dal diametro: z'' dalla doppia ascissa $2\,x^0$: ω' l'area: sarà

$$L''' = \mu' + \omega' z''^2$$

ovvero
$$L''' = \mu' + \omega'(z' - y_0)^2 \qquad (a')$$

e dalla (a)
$$L' = L'' - \mu' - \omega'(z' - y_0)^2 \qquad (a'')$$

esprima L il momento d'inerzia dell'area rispetto la retta che passa per il suo centro di gravità: z''', la distanza di questo centro dalla corda $2\,x_0$: z, dal diametro: ω l'area: avremo

$$L = L' - \omega z^2; \text{ ossia } L = L' - \omega(z - y_0)^2$$

e per l' (a'')
$$L = L'' - \mu' - \omega(z - y_0)^2 - \omega'(z' - y_0)^2 \qquad (a''')$$

risulta

$$\omega = \left\{\begin{array}{l} r^2.\ \text{arc. sen}\left(=\dfrac{x_0}{r}\right) - x_0\sqrt{r^2 - x_0^2} \\ -r^2.\ \text{arc. sen}\left(=\dfrac{x'_0}{r}\right) + x'_0\sqrt{r^2 - x_0^2} \end{array}\right\}$$

ossia

$$\omega = r^2 \sum_{x=x'_0}^{x=x_0} \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{r}\right) - \sum_{x=x'_0}^{x=x_0} x\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$z = \frac{\int_{y_0}^{y'_0} y\, dy \int dx}{\int_{y_0}^{y'_0} dy \int dx} = \frac{\left[-\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{y_0}^{y_0}}{\frac{1}{2}\omega} = \frac{2}{3}\,\frac{x_0^3 - x'^3_0}{\omega}$$

e riflettendo come μ' può farsi uguale al momento d'inerzia del segmento di corda $2\,x'_0$ rispetto l'istessa corda; diminuito di $\omega'(z' - y'_0)^2$

$$L = \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{3}{2} r^2 .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x_0}{r}\right)(\tfrac{5}{4} r^2 - x_0^2) - \tfrac{1}{4} x_0 \sqrt{r^2 - x_0^2}\,(\tfrac{15}{2} r^2 - x_0^2)\right]$$

$$- \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{3}{2} r^2 .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x'_0}{r}\right)(\tfrac{5}{4} r^2 - x'^2_0) - \tfrac{1}{4} x'_0 \sqrt{r^2 - x'^2_0}\,(\tfrac{15}{2} r^2 - x'^2_0)\right]$$

$$- \omega' (z' - y'_0)^2 - \omega' (z' - y_0)^2 - \omega (z - y_0)^2$$

ovvero

$$L = \tfrac{2}{3}\sum_{x = x'_0}^{x = x_0}\left[\tfrac{3}{2} r^2 .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x}{r}\right)(\tfrac{5}{4} r^2 - x^2) - \tfrac{1}{4} x \sqrt{r^2 - x^2}\,(\tfrac{15}{2} r^2 - x^2)\right]$$

$$- \sum \omega (z - y)^2 .$$

52. *Per un segmento circolare compreso fra due doppie ascisse orizontali che comprendono il diametro.* Siano $2\,x_0$, $2\,x'_0$, le corde, superiore ed inferiore, che terminano l'area: di ordinate y_0, y'_0; si ha

$$\omega = r \sum_{x = -x'_0}^{x = x_0}\left(\frac{\pi r}{2} - r .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x_0}{r}\right)\right) + \sum_{x = -x'_0}^{x = x_0} x_0 \sqrt{y^2 - x^2}$$

e

$$z = \frac{\int_{-y_0}^{y_0} y\, dy \int dx}{\int_{-y_0}^{y_0} d\,y \int d\,x} = \tfrac{2}{3}\,\frac{x'^3_0 - x^3_0}{\omega}$$

il momento d'inerzia L' dell'area rispetto il diametro è la somma dei due: dei due segmenti di corde il diametro comune, e le doppie ascisse $2\,x_0$, $2\,x'_0$; e perciò dal (num.° 49)

$$L' = \tfrac{1}{6}\left(\frac{3 r^3}{2}\sum_{x = -x'_0}^{x = x_0}\left[\frac{\pi r}{2} - r .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x_0}{r}\right)\right] + 3 \sum_{x = -x'_0}^{x = x_0} x_0 \sqrt{r^2 - x^2}\left(\frac{r^2}{2} - x^2\right)\right)$$

e quindi

$$L = \tfrac{1}{6}\left(\frac{3 r^3}{2}\sum_{x = -x'_0}^{x = x_0}\left[\frac{\pi r}{2} - r .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x_0}{r}\right)\right] - 3 \sum_{x = -x_0}^{x = x_0} x \sqrt{r^2 - x^2}\left(\frac{r^2}{2} - x^2\right)\right)$$

$$- \left(r \sum_{x = -x_0}^{x = x_0}\left[\frac{\pi r}{2} - r .\ \text{arc. sen}\left(= \frac{x}{r}\right)\right] + \sum_{x = -x_0}^{x = x_0} x_0 \sqrt{r^2 - x^2}\right) z^2$$

$$L=\tfrac{1}{6}\left\{\sum_{x=-x'_0}^{x=x_0}\frac{3r^3}{2}\left[\frac{\pi r}{2}-r.\text{arc.sen}\left(=\frac{x}{r}\right)\right](r^2-4z^2)+3\sum_{x=-x'_0}^{x=x_0}x\sqrt{r^2-x^2}\left(\frac{r^2}{2}-2z^2-x^2\right)\right\}.$$

53. *Per un segmeuto ellittico colla doppia ascissa orizontale.* Sia questa $2x_0$: di ordinata y: si ha

$$\omega=2\int_{y_0}^{b}dy\int dx=\frac{a}{b}\left[b\left\{\frac{\pi b}{2}-b.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{y_0}{6}\right)\right\}-y_0\sqrt{b^2-y_0^2}\right]\quad(a)$$

e dette z, z', le distanza del centro di gravità dell'area dalla doppia ascissa $2x_0$: e e dall'asse maggiore:

$$z=z'-y_0=\frac{\int_{y_0}^{b}y\,dy\int dx}{\int_{y_0}^{r}dy\int dx}-y_0=\tfrac{2}{3}\frac{(b^2-y_0^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega}-y_0\quad(a')$$

ed essendo L' il momento d'inerzia dell'area rispetto la corda $2x_0$

$$L'=2\int_0^{x_0}dx\int y^2\,dy=\tfrac{2}{3}\frac{b^3}{a^3}\int_0^{x_0}dx\,(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-x_0^2})^3$$

$$=\tfrac{2}{3}\frac{b^3}{a^3}\left[\tfrac{3}{2}a^2.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)(\tfrac{5}{4}a^2-x_0^2)-\tfrac{1}{4}x_0\sqrt{(a^2-x_0^2)}(\tfrac{15}{2}a^2-x_0^2)\right]\quad(a'')$$

dalle (a), (a'), (a''),

$$L=\tfrac{2}{3}\frac{b^3}{a}\left[\tfrac{3}{2}a^2.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\left(\tfrac{5}{4}-\frac{z^2}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)-\frac{x_0}{4}\sqrt{(a^2-x_0^2)}\left(\tfrac{15}{2}-\frac{bz^2}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\right].$$

54. *Per un segmento ellittico colla doppia ordinata orizontale*: dal num. ant°.

$$L=\tfrac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{b}\left[\tfrac{3}{2}b^2.\text{arc.sen}\left(=\frac{y_0}{b}\right)\left(\tfrac{5}{4}-\frac{z^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\frac{y_0}{4}\sqrt{(b^2-y_0^2}\left(\tfrac{15}{2}-\frac{bz^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)\right].$$

55. *Per un segmento ellittico compreso fra l'asse maggiore; e la doppia ascissa orizontale;* si ha

$$\omega=\frac{\pi ab}{2}-ab.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)+\frac{b}{a}x_0\sqrt{(a^2-x_0^2)}\quad(a)$$

$$z=\frac{\int_0^{y_0}y\,dy\int dx}{\int_0^{y_0}dy\int dx}=\frac{\left\{-\tfrac{1}{3}\left(b^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_0^{y_0}}{\dfrac{b\,\omega}{2a}}=\tfrac{2}{3}\frac{b^2}{a^2}\frac{a^3-x_0^3}{\omega}\quad(a')$$

ed analogamente al (num.° 49)

$$L' = \tfrac{2}{3} x_0 y_0^3 + \frac{b^3}{6.a^3}\left(\frac{3a^3}{2}\left[\frac{\pi a}{2} - a.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\right] - x_0 \sqrt{(a^2 - x_0^2)}\left(\tfrac{5}{2} a^2 - x_0^2\right)\right)$$

$$= \frac{b^3}{6a^3}\left(\frac{3a^3}{2}\left[\frac{\pi a}{2} - a.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\right] + 3\, x_0 \sqrt{(a^2 - x_0^2)}\left(\frac{a^2}{2} - x_0^2\right)\right) \quad (a'')$$

e dalle (a), (a'), (a'')

$$L = \frac{b^3}{6.a^3}\left(\frac{3a^3}{2}\left[\frac{\pi a}{2} - a.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\right] + 3\, x_0 \sqrt{(a^2 - x_0^2)}\left(\frac{a^2}{2} - x_0^2\right)\right)$$

$$- \left(b\left[\frac{\pi a}{2} - a.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\right] + \frac{b}{a} x_0 \sqrt{(a^2 - x_0^2)}\right) z^2$$

ossia

$$L = \frac{b^3}{6\,a^3}\left(\frac{3a^3}{2}\left[\frac{\pi a}{2} - a.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\right]\left(1 - \frac{4z^2}{b^2}\right)\right.$$

$$\left. + 3\, x_0 \sqrt{(a^2 - x_0^2)}\left[\frac{2\,a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right) - x_0^2\right]\right).$$

56. *Per un segmento ellittico compreso fra l'asse minore, e la doppia ordinata orizzontale*; dal (num.° ant.e)

$$L = \frac{a^3}{6.\,b^3}\left\{\frac{3b^3}{2}\left[\frac{\pi b}{2} - b.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{y_0}{b}\right)\right]\left(1 - \frac{4r^2}{a^2}\right)\right.$$

$$\left. + 3\, y_0 \sqrt{(b^2 - y_0^2)}\left[\frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - z^2\right) - y_0^2\right]\right\}.$$

57. Per *un segmento ellittico di freccia maggiore del semiasse minore verticale:* analogamente al (num.° 50) si ottiene

$$L' = \frac{b^3}{6.a^3}\left\{\frac{3\,a^3}{2}\left(\pi\, a - a.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\right)\left(1 - \frac{4z^2}{b^2}\right)\right.$$

$$\left. + 3\, x_0 \sqrt{(a^2 - x_0^2)}\left[\frac{2\,a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right) - x_0^2\right]\right\}.$$

58. *Per un segmento ellittico di freccia maggiore del semiasse maggiore verticale*: dal (num.° ant.e)

$$L = \frac{a^3}{6.\,b^3}\left\{\frac{3b^3}{2}\left(\pi b - b.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{y_0}{b}\right)\right)\left(1 - \frac{4\,z^2}{a^2}\right)\right.$$

$$\left. + 3 y_0 \sqrt{(b^2 - y_0^2)}\left[\frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - z^2\right) - y_0^2\right]\right\}.$$

59. *Per un segmento ellittico contenuto fra due doppie ascisse orizzontali che non comprendono l'asse maggiore;* analogamente al (num.° 51)

$$L = \frac{2}{3}\frac{b^3}{a^3}\sum_{x=x'_0}^{x=x_0}\left[\frac{3}{2}a^2.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{x_0}{a}\right)\left(\frac{5}{4}a^2 - x_0^2\right) - \frac{x_0}{4}\sqrt{(a^2 - x_0^2)}\left(\frac{15}{2}a^2 - x_0^2\right)\right]$$

$$- \sum \omega\,(z - y_0^2).$$

60. *Per un segmento ellittico colle ordinate orizzontali che non comprendono l'asse minore:* (dal num.° ant^e^.)

$$L = \frac{2\,a^3}{3\,b^3}\sum_{y=y'_0}^{y=y_0}\left[\frac{3}{2}b^2.\ \text{arc. sen}\left(=\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{5}{4}b^2 - y_0^2\right) - \frac{y_0}{4}\sqrt{(b^2-y_0^2)}\left(\frac{15}{2}b^2 - y_0^2\right)\right]$$

$$- \sum \omega\,(z - y_0^2).$$

61. *Per una sezione a doppio* T *a nervure uguali senza cantonate.* Sia a l'altezza del pezzo: b, la larghezza o la base, a_1 la distanza delle nervure, b' la loro lunghezza. Il momento d'inerzia L sarà la differenza di quello del rettangolo (a, b), e dei due dei rettangoli uguali (a', b'): e perciò dal (num: 1).

$$L = \frac{1}{12}\,(b\,a^3 - 2\,b'a'^3)$$

62. *Per una sezione a* T *a nervure uguali, e a doppie cantonate uguali.* Rappresenti a, l'altezza, b, la base del pezzo: a', la distanza delle nervure: a'', la distanza delle cantonate orizzontali: a''' quelle delle cantonate verticali, b' lo sporto delle nervure sulle cantonate: b' la lunghezza delle cantonate orizzontali: b''' la grossezza, sarà dal (num. 1)

$$L = \frac{1}{12}\left\{ba^3 - 2\,(b'a'^3 + b''a''^3 + b'''a'''^3)\right\}.$$

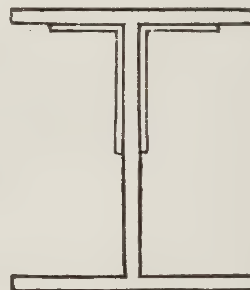
63. *Per una sezione a* T, *con nervure uguali senza cantonate.* Esprimano a', la grossezza delle nervure: b', la grossezza del dritto: z la distanza del centro di gravità della sezione dalla base b, si trova

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{ba^2 - (b - b')(a^2 - a'^2)}{ba' + b'\,(a - a')}$$

$$L' = \frac{1}{3}\,(ba'^3 + b'a^3 - b'a'^3)$$

$$L = \frac{1}{3}\left\{ba'^3 + b'\,(a^3 - a'^3) - 3\,\omega\,z^2\right\}.$$

64. *Per una sezione a* T *con cantonate.* Si indichi con $2b$, la lunghezza della base, o della spalla del pezzo: con $2\,b^4$, la larghezza del dritto: con a', a'', a''', le distanze delle nervure, delle cantonate orizzontali, e verticali, dalla orizzontale che passa per il piede del pezzo, si ha



$$\omega = 2b^4 a' + 2b(a - a') + 2b''(a' - a'') + 2b'''(a' - a''') \qquad (a)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{a^2 b - a'b'(2a - a') - a''b''(2a - a'') - a'''b'''(2a - a''')}{b^4 a' + b(a - a') + b''(a' - a'') + b'''(a' - a''')} \qquad (a')$$

esprima M, R: *momento d'inerzia del rettangolo*: sarà

$$L' = M, R.\ (a - a', 2b) + M, R{:}\ (2b^4, a) - M, R{:}\ (a - a', 2b^4)$$

$$+ 2\ M, R{:}\ (a - a'', b'') - 2\ M, R{:}\ (a - a', b'')$$

$$+ 2\ M, R{:}\ (a - a''', b''') - 2\ M, R{:}\ (a - a'b''')$$

$$= \tfrac{2}{3}\{ b^4 a^3 + b''(a - a'')^3 + b'''(a - a''')^3 - (a - a')^3 (b'' + b''' + b^4)\}$$

ovvero

$$L' = \tfrac{2}{3}\{ b^4 a^3 + \sum b'''(a - a''')^3 - (a - a')^3 \sum b^4 \} \qquad (a'')$$

e dalle (a), (a'), (a'')

$$L = \tfrac{2}{3}\{ b^4 a^3 + \sum b'''(a - a')^3 - (a - a')^3 \sum b^4\}$$

$$- \{ b^4 a' + 2 \sum\nolimits^{''} b'''(a' - a''') \} z^2.$$

65. *Per una sezione a doppio* T *con nervure dissuguali senza cantonate.* Rappresentino: b, b', a', a'', le lunghezze e le grossezze delle cantonate inferiore, e superiore, a''' la loro distanza verticale: e z la distanza del centro di gravità, della sezione della nervura superiore b^1: il momento della parte superiore del pezzo alla lima, orizontale che passa per il suo centro di gravità, risulta, essendo b'' la grossezza del dritto

$$b'' z \frac{z}{2} + (b' - b'')a''\left(z - \frac{a''}{2}\right)$$

e quello della parte inferiore

$$b''\left(a - z\right)\left(\frac{a - z}{2}\right) + \left(b' - b''\right)a'\left(a - z - \frac{a'}{z}\right)$$

uguagliando si deduce

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{b''a^2 + 2a\,a'(b - b'') - a'^2(b - b'') - a''^2(b' - b'')}{b''a + a'(b - b'') + a''(b' - b'')}$$

il momento d'inerzia L rispetto la linea, che passa per il centro di gravità del pezzo risulterà dalla somma dei momenti di inerzia della parte superiore, ed inferiore, espressi da

$$\frac{b'z^3}{3} - \frac{(b' - b'')(z - a'')^3}{3} \qquad \frac{b(a - z)^3}{3} - \frac{(b - b'')(a - a' - z)^3}{3}$$

e perciò fatto $a - a' = a_{\prime\prime}$ si ha

$$L = \frac{1}{3} \{ b'z^3 + b(a-z)^3 + (b''-b')(z-a'')^3 - (b'-b)(z-a_{,,})^3 \}.$$

66. *Per una sezione a doppio* T *con cantonate superiori a nervure uguali*: i momenti delle parti superiori, ed inferiori del pezzo alla linea che passa per il suo centro di gravità: sono espressi da

$$2\,ba'\left(z-\frac{a'}{z}\right) + 2\,b^4\,(z-a')\left(\frac{z-a'}{2}\right)$$

$$+ 2\,b''\,a''\left(z-a'-\frac{a''}{2}\right) + 2\,b'''\left(z-a'\right)\left(\frac{z-a'}{2}\right);$$

$$2\,(b-b^4)\,a'\left(a-z-\frac{a'}{2}\right) + 2\,b^4\,(a-z)\left(\frac{a-z}{2}\right)$$

$$+ 2\,b'''\,(a'+a''+a'''-z)\left(\frac{a'+a''+a'''-z}{2}\right);$$

uguagliando

$$z = \frac{-a'^2\,b + b'''\,(\alpha^2-a'^2) + 2\,a''b''\,(a'+\frac{a''}{2}) + 2\,a\,a'\,(b-b^4)}{2a'\,(b-b^4) + a''\,(b''+b''') + a\,b^4 + a'''\,b'''}$$

essendo $\alpha = a' + a'' + a'''$

il momento di inerzia della parte superiore, è

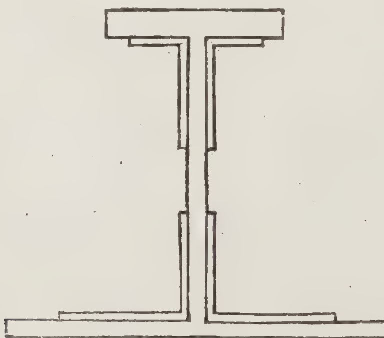
$$\frac{2\,z^3}{3} - \frac{2\,b'\,(z-a')^3}{3} - \frac{2\,b''\,(z-a'-a'')^3}{3}$$

quello della parte inferiore

$$\frac{2\,b\,(a-z)^3}{3} - \frac{2\,(b-b^{iv})\,(a-a'-z)^3}{3} + \frac{2\,b'''\,(\alpha-z)^3}{3}$$

uguagliando si deduce L.

67. *Per una sezione a doppio* T *a nervure dissuguali con cantonate*: dai numeri antecedenti, facilmente si ritrovano le dimensioni delle sue singole parti: si ha



$$z = \frac{1}{2}\,\frac{ba^2 - a'b^4(\frac{a'}{2}+\alpha') - \sum a''b''(\frac{a''}{2}+\alpha'+\alpha''') - b^5a^5(\frac{a}{2}+\alpha'+\alpha''+\alpha^4)}{b'\alpha + b\alpha' + b^7(a'-\alpha) + b^4\alpha'' + b^5(a''-\alpha-a^5)}$$

essendo $$\sum a''b''\left(\frac{a''}{2}+\alpha'+\alpha'''\right) = b''a''\left(\frac{a''}{2}+\alpha'+\alpha'''\right)$$

$$+ b'''a'''\left(\frac{a'''}{2}+\alpha'+\alpha'''\right) + b^4a^4\left(\frac{a^4}{2}+\alpha'+a'''\right) + b^5a^5\left(\frac{a^5}{2}+\alpha'+\alpha'''\right)$$

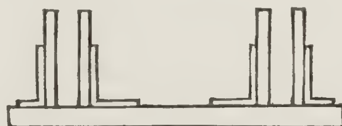
$$\sum b'' = b'' + b''' + b^4 \qquad \sum \alpha'' = \alpha'' + \alpha''' + \alpha^4 + \alpha^5$$

ed esprimendo M, R: *momento di inerzia del rettangolo*: si ha

$$L' = \text{M,R}: (a, 2b) - 2\,\text{M,R}: (a, b^6) + 2\,\text{M,R}: (\alpha', b^6)$$
$$- 2\,\text{M,R}: (a, b'') + 2\,\text{M,R}: (\alpha' + \alpha''', b'')$$
$$- 2\,\text{M,R}: (a - \alpha, b''') + 2\,\text{M,R}\,(\alpha' + \alpha^4, b''')$$
$$- 2\,\text{M,R}: (a^5, b^5)$$
$$= 2\,\text{M,R}: (a, b - b^6 - b'') + 2\,\text{M,R}: (\alpha', b^6)$$
$$- 2\,\text{M,R}: (a - \alpha, b''') - 2\,\text{M,R}: (a - \alpha - \alpha'', b^4)$$
$$+ 2\,\text{M,R}: (\alpha' + \alpha''', b'' + b''' + b^4) - 2\,\text{M,R}\,(a^5, b^5)$$
$$= 2\,\text{M,R}: (a, b') + 2\,\text{M,R}: (\alpha', b^6) - 2\,\text{M,R}: (a - \alpha, b''')$$
$$- 2\,\text{M,R}\,(\alpha, b^4) + 2\,\text{M,R}: (\alpha' + \alpha''', b^8) - 2\,\text{M,R}: (a^5, b^5)$$

essendo $a = a - \alpha - \alpha'$ la distanza verticale delle due nervure: e $b^8 = b'' + b''' + b^4$ la lunghezza orizzontale delle cantonate inferiori: delle formole antecedenti si dedurrà L.

68. *Per una sezione di longarina.* Sia a', lo sponto dei dritti sulle cantonate verticali; a'', b^5, la loro lunghezza e grossezza; a''', b^4 quelle delle orizzontali: b' la distanza fra dritto e dritto; $2b''$ quella compresa fra l'estremità delle cantonate orizzontali; b''' lo sporto della lunghezza b del pezzo sull'estremità della stessa ; a l'altezza: per determinare la z dalla base b si ha



$$2\,ab.\frac{a}{2} - 2\,b'\,(a' + a'' + a''')\,\frac{(a' + a'' + a''')}{2} - 2\,b''\,(a' + a'' + a''')^2$$
$$- b'''\,(a' + a'' + a''')^2 - 2\,b^4\,(a' + a'')^2 - 2\,b^5\,a'^2$$
$$= \{\,2\,ab - 2\,(a' + a'' + a''')\,(b' + b'' + b''') - 4\,b^4\,(a' + a'') - 4\,b^5\,a'\,\}\,z$$

dalle quale $$z = \frac{1}{2}\,\frac{ba^2 - \sum b\,(\sum a) - 2\,b^5\,(\sum a)^2 - 2\,b^5\,a'^2}{ab - \sum b.\,\sum a - 2\,b^5.\,\sum a - 2\,b^5\,a'}$$

facilmente trovasi rispetto la MN

$$L' = \tfrac{2}{3} \{ ba^3 - \sum b (\sum a) - 2\, b^5 (\sum a)^3 - 2\, b^5\, a'^3 \}$$

dalle quali L: per la $L = L' - \omega z^2$.

69. Colla semplice norma esposta al principio di questa memoria; si calcolano facilmente i momenti di inerzia delle sezioni che contengono dei vuoti: le applicazioni, sarebbero indefinite; ne accenno soltanto qualcuna. Le istesse lettere con diversi accenti indicheranno le dimensioni omologhe di figure simili.

70. *Per una sezione rettangolare con una apertura rettangolare*

$$L = \tfrac{1}{12} (b'\, a'^3 - b'' a''^3); \qquad \text{(v. n.° 1)}$$

quadrata

$$L = \tfrac{1}{12} (b'\, a'^3 - a''^4)\,; \qquad \text{(n.i 1, 2)}$$

circolare concentrica

$$L = \tfrac{1}{4} \left(\frac{b\, a^3}{4} - \pi r^4 \right). \qquad \text{(n.i 1, 19)}$$

70. *Per una sezione triangolare isoscele a base orizzontale con un'apertura simile concentrica*

$$L = \tfrac{1}{36} (ba^3 - b'a'^3) \qquad \text{(n.° 7)}$$

se la sezione è equilatera

$$L = \frac{1}{\sqrt{3.18}} (a^4 - a'^4) \qquad \text{(n.° 8)}$$

71. *Per una sezione formata da due circoli concentrici*: sarà dal (n.° 19)

$$L = \frac{\pi}{4} (r'^4 - r''^4).$$

72. — *da due ellissi concentriche coll'asse maggiore orizzontale* dal (n.° 20)

$$L = \frac{\pi}{4} (a'b'^3 - a''b''^3).$$

73. — *da due ellissi concentriche coll'asse minore orizzontale* dal (n.° 21)

$$L = \frac{\pi}{4} (b'a'^3 - b''a''^3).$$

74. *Per la sezione di un canale formato da due rettangoli;* si ha

$$z = \tfrac{1}{2} \frac{b'a'^2 - b''.a''^2}{b'a' - b''a''}\,; \quad L' = \tfrac{1}{3} (b'a'^3 - b''a''^3)$$

$$L = \tfrac{1}{3} \{ b'a' (a'^2 - 3\, z^2) - b''a'' (a''^2 - 3\, z^2) \}$$

se da due quadrati

$$z = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a'^3 - a''^3}{a'^2 - a''^2}\,; \quad L = \tfrac{1}{3} \{ a'^2 (a'^2 - 3\, z^2) - a''^2 (a''^2 - 3\, z^2) \}.$$

75. *Per la sezione di un canale triangolare isoscele colla base orizontale*: dal (n.° 7).

$$z = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{a'^2b' - a''^2b''}{a'b' - a''b''}\,,\quad L' = \tfrac{1}{36}\,\{\,b'a'^3 - b''a''^3\,\}$$

$$L = \tfrac{1}{36}\,\{\,b'a'\,(a'^2 - 18\,z^2) - b''a''\,(a''^2 - 18\,z^2)\,\}.$$

76. *Per un canale semicircolare formato da due semicerchii concentrici col diametro orizontale*: dal (n.° 19)

$$z = \frac{4}{3\,\pi}\left(\frac{r'^3 - r''^3}{r'^2 - r''^2}\right);\ L' = \frac{\pi}{8}(r'^4 - r''^4);\ L = \frac{\pi}{8}(r'^2 - r''^2)(r'^2 + r'' - 4z^2).$$

77. *Per un canale semiellittico formato da due semiellissi concentrica coll'asse maggiore orizontale*: dal (n.° 20)

$$z = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{a'b'^2 - a''b''^2}{a'b' - a''b''}\right)$$

$$L' = \frac{\pi}{8}(a'b'^3 - a''b''^3);\ L = \frac{\pi}{8}\left[(a'b'^3 - a''b''^3) - 8\,(a'b' - a''b'')\,z^2\right].$$

78. I momenti di inerzia delle sezioni esibiti in funzione della loro area (ω) : vengono espressi dalle formole:

$$L = \frac{\omega}{12}\cdot a^2\ \ \omega = ab,\ \text{(per il n.° 1)}:\ \ L = \frac{\omega}{12}a^2,$$

$$\omega = a^2,\ \text{(per il n.° 2)}:\ L = \frac{\omega}{12}a^2,\ \ \omega = ba.\ \text{sen}:\ \psi,\ \text{(n.° 3)}:$$

$$L = \frac{\omega}{12}a^2,\ \ \omega = a^2\ \text{sen.}\ \psi\ \ (4)$$

$$L = \frac{\omega}{24}\cdot a^2,\ \ \omega = \frac{a\,b}{2},\ (5):\ \ L = \frac{\omega}{24}\cdot a^2,\ \ \omega = \frac{\sqrt{3}}{4}\,b\,a\ \ (6).$$

$$L = \frac{\omega}{18}a^2,\ \ \omega = \frac{a\,b}{2},\ (7):\ \ L = \frac{\omega}{18}a^2,\ \ \omega = \frac{a\,b}{\sqrt{3}},\ (8):$$

$$L = \frac{(\omega \pm \omega')}{18}a^2,\ \ \omega = \frac{a\,b}{2},\ \ \omega' = \frac{ab'}{2},\ (10,\ 11):$$

$$L = \frac{\omega}{6}(p^2 + q^2 - 6z^2),\ \omega = \frac{h}{2}(p + q),\ (12):$$

$$L = \frac{\omega}{6}\left[h^2\left(1 + \frac{2\,q}{p + q}\right) - b\,z^2\right],(13):\ \ L = \frac{\omega}{3}(p^2 + q^2),\ \ (14):$$

$$L = \frac{\omega r^2}{4}, \ (19): \quad L = \frac{\omega b^2}{4} \ (20): \quad L = \frac{\omega a^2}{4} \ (21):$$

$$L = \frac{\omega r^2}{4}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right): (23): \quad L = \tfrac{1}{6}\left\{\tfrac{3}{2} r^2 \omega - x_0 y_0^3\right\}, \ (33),$$

essendo
$$\omega = r. A_c - x_0 \sqrt{(r^2 - x_0^2)}$$

ed
$$A_c = \frac{\pi r}{2} - r. \text{ arc. sen } \left(= \frac{x_0}{r}\right)$$

la metà dell'arco del segmento: similmente per gli altri casi:

$$L - \tfrac{1}{8}\left(\frac{3r^2}{2}\omega + \sum_{x=-x'_0}^{x=x'_0} x\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right) \text{ per il (n° 37)}$$

$$L = \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{3}{2}(\tfrac{5}{4} r^2 - x_0^2 - z^2)\,\omega - \tfrac{5}{4} x_0^{\frac{3}{0}} \sqrt{r^2 - x_0^2}\right],$$

per il (n° 48).

P. S. Si avverte per togliere ogni equivoco, che nelle diverse lettere a, b, α invece di porre gli apici superiori in numeri romani IV, V, VI, VII, VIII; si sono scritti i numeri arabi 4 5 6 7 8, per i quali non intendiamo, che rappresentino esponenti, ma sole notazioni.



RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Manuscrit coté $^{951}_{2}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Volume in-4.o de 132 feuillets en papier dont le premier et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 129 autres sont numérotés avec deux numérations consécutives dont la première va de 1 à 71, et la seconde de 1 à 58.

Feuillet 1 *v.* lig. 1 à 69 *v.* lig. 14 de la première numération: Commentaire du *Talkhîs* ou « Exposé des opérations » du calcul », traité d'arithmétique pratique d'Ibn Albannâ, mathématicien et astronome qui florissait au Maroc dans la première moitié du XIII. siècle, par Alkalaçâdi, mathématicien arabe-espagnol, mort en 1486 de J.-C. La copie est datée du 29 ramadhân 1229 de l'hégire, ou 14 septembre 1814 de J.-C.

Feuillet 69 *v.* lig. 15 à 71 *v.* lig. 7 de la première numération: Morceau relatif à quelques questions chronologiques par Aboû Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okaïli Alçoûneci.

Feuillet 1 *r.* lig. 1 à 58 *v.* lig. 24 de la seconde numération: Autre commentaire, sans nom d'auteur, du Talkîs d'Ibn Albannâ.

Comparer sur ce Manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de Février—Mars 1862, pag. 105, lig. 18 à pag. 107, lig. dernière.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 5 à 12 de la traduction ci-après se rapportent à la première des deux numérations du manuscrit).

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre Seigneur Mohammed ! f. 1 *v.*

Le serviteur du Dieu très-haut, celui qui a besoin de son pardon, Alî Ben Mohammed Ibn Mohammed Ben Alî le Koraïchite Alandaloucî Albasthî, connu sous le nom d'Alkalaçâdî, que Dieu très-haut soit miséricordieux envers lui, amen, amen, amen, amen, dit:

Louange à Dieu qui a créé l'homme par sa grâce, et qui l'a fait exister pour ce qu'il a résolu et décrété par la volonté de ses jugements et de sa puissance. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

Pour en venir au fait. Le but que se propose (le présent ouvrage) est l'explication de « *L'exposé des opérations du calcul* » du chaïkh, du très-savant imâm, Ahmed, surnommé le fils de l'architecte (Ibn Albannâ), l'habitant de Maroc, puisse-t-il être agréable à Dieu, et puisse Dieu le rendre content. L'intention de (l'auteur) est que cette introduction forme le commencement du travail qu'il se propose d'entreprendre dans cet ouvrage, et qu'il indique dans le contenu de cette (introduction) ce qu'ont mentionné les anciens relativement à celui qui écrit un ouvrage sur une science, à savoir qu'il faut qu'il y fasse attention aux huit points capitaux suivants: le but, l'utilité, le caractère, la méthode de l'enseignement, l'ordre, le nom de l'auteur, la justesse, et la division.

*

L'auteur, que Dieu soit miséricordieux envers lui, a réuni implicitement ces huit points dans cette introduction, ainsi qu'il l'a exprimé dans certains vers que voici:

Je me suis appliqué à être concis dans mon exposé,
Parce que je connais les différentes parties de la science
et parce que je sais abréger.
Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que
je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,
Et je ne cherche rien au delà de ce qui est suffisant pour moi.
Cependant je crains le blâme des grands hommes,
Et certainement les savants accomplis sont en droit
de suivre une autre voie,
Mais le devoir de la chamelle est d'enseigner les
petits (*).

L'auteur dit: *Le but* (**), c'est à dire l'objet, *dans cet ouvrage*, c'est à dire cet écrit, *est de donner un exposé fait avec choix*, c'est à dire un exposé élégant et concis, *des opérations du calcul, de faire comprendre promptement ses règles*, c'est à dire de rendre les règles de l'ouvrage facilement accessibles, *ainsi que le sens des théories*, au moyen des problèmes placés chacun dans le chapitre de la règle qui le concerne et qui lui convient, *et de présenter dans un ordre sévère les bases et le système de cet art. Il comprend deux parties*, c'est à dire cet ouvrage (comprend deux parties), *dont la première traite des opérations du nombre connu*, en fait d'entiers, de fractions et de racines, *tandis que la seconde traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à la connaissance de la grandeur de l'inconnue qui est cherchée, en partant des quantités connues et données,* c'est à dire au moyen desquelles il est possible de déterminer l'inconnue, ainsi qu'il sera expliqué plus tard, si Dieu le permet, dans la seconde partie de l'ouvrage. (Cette seconde partie traite) de la manière d'opérer avec les proportions et avec les plateaux de balance (***), de l'algèbre, et de ce qui se rattache à cela. Comme si l'on vous

---

(*) Le texte de ces vers que présente ici le manuscrit, me paraît très-corrompu; en outre la première partie du manuscrit (fol. 1 à 71 de la première numération) est d'une fort mauvaise écriture. Les mêmes vers sont reproduits avec certaines variantes, et sous une forme plus correcte, au fol. 1 *r.*° de la seconde numération.

(**) Les mots imprimés en italique forment la traduction des parties du texte de l'ouvrage commenté, intercalées au milieu du commentaire et écrites, dans le manuscrit arabe, à l'encre rouge. J'ai aussi mis en italique quelques passages qui ne sont pas écrits à l'encre rouge dans le manuscrit, mais qui font cependant partie du texte commenté, ainsi que je l'ai reconnu par un examen du second commentaire du *Talkhîs*, contenu dans ce manuscrit, et d'un troisième commentaire contenu dans le manuscrit $951\frac{1}{3}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(***) Ce nom désigne la règle des deux fausses positions.

dit: on additionne le tiers et le quart d'une quantité, et cela fait tant; ou l'on additionne le tiers et le quart et le cinquième d'une quantité, et cela fait tant; combien est cette quantité? L'auteur dit (que cette détermination de l'inconnue par les connues est possible) *lorsqu'il existe entre l'une et les autres une relation qui détermine cette* (dépendance). Cette relation | est le rapport qui existe entre les nombres etc. fin de f. 1 v.

Si l'on vous dit: combien est la somme de huit nombres dont les plus petit est deux, et qui se dépassent mutuellement de quatre? | Alors multipliez l'excès par le nombre des nombres (termes) moins un, ce qui donne vingt huit. Ajoutez-y le deux; ce sera trente, ce qui est le plus grand (des nombres). Ensuite ajoutez au trente le premier nombre, ce qui fait trente deux. Multipliez cela par quatre, la moitié du nombre des nombres. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir cent vingt huit. En voici la figure, et Dieu seul connaît la vérité. f. 8 r.

.·. 2 .·. 6 .·. 10 .·. 14 .·. 18 .·. 22 .·. 26 .·. 30 .·.

L'auteur dit: *Quant à la sommation des nombres suivant l'ordre, elle consiste à multiplier la moitié du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend par le* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend plus l'unité.* Ceci est la troisième espèce de l'addition, et d'après ce que l'auteur dit, l'opération est claire. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre naturel des nombres, alors ajoutez un au dix; ce sera onze. Multipliez cela par la moitié du dix; vous aurez pour résultat cinquante cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit: additionnez depuis un jusqu'à dix-huit, alors ajoutez un au dix-huit; ce sera dix-neuf. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir par neuf. Vous aurez pour résultat cent soixante onze, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *et l'élévation au carré* (*se fait*) *par la multiplication de deux tiers du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend plus un tiers d'une unité, par la somme* (*des nombres simples*). Cela veut dire l'élévation au carré de l'addition des nombres suivant l'ordre, ce qui deviendra plus clair par notre exemple. Si l'on vous dit: additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce (problème) consiste à prendre deux tiers du dix, ce qui fait six et deux tiers, et à ajouter à cela un tiers d'une unité, de sorte que la somme sera sept. Multipliez cela par la somme (des nombres simples) à savoir par cinquante cinq; vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent quatre-vingt cinq.

L'auteur dit (*): *et l'élévation au cube* (*se fait*) *par l'élévation au carré de la* f. 8. r. lig. 19.

(*) Je rappelle que « l'auteur » de l'ouvrage commenté est Ibn Albannâ. La règle pour la sommation des cubes qui suit ici, appartient donc à Ibn Albannâ, contemporain de Léonard de Pise.

somme (*). Cette somme veut dire celle qui résulte de l'addition des nombres (simples) suivant l'ordre. Et le cube signifie, d'après ce qui a été expliqué, le produit de la multiplication d'un nombre par lui-même et puis du résultat par sa racine. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez à partir du cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme (des nombres simples) à savoir cinquante cinq. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois mille vingt cinq,
f. 8 r. lig. 24. ainsi: 3025.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce (de l'addition), et c'est la plus facile de ces espèces. La manière de l'effectuer est claire, d'après ce que l'auteur a expliqué. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, (en prenant) |
f. 8 v. les nombres impairs suivant l'ordre, alors ajoutez l'unité au neuf, ce qui fait dix. Élevez-en la moitié, à savoir cinq, au carré. Il résultera vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à vingt trois, alors additionnez l'unité au vingt trois, ce qui fait vingt quatre. Élevez au carré la moitié de cela, à savoir douze. Vous aurez pour résultat cent quarante quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* C'est à dire l'élévation au carré de tous les nombres impairs. Et « le rectangle » est le produit d'un nombre par un (autre) nombre. L'auteur dit « par après » par précaution, afin qu'on ne s'imagine pas qu'il s'agit du produit des deux nombres qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. L'éclaircissement de cela se trouvera dans notre exemple. Si l'on vous dit: additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors prenez un sixième du neuf, ce qui est un et demi. Formez le rectangle des deux nombres qui suivent le neuf, à savoir du dix et du onze. Leur rectangle est cent dix. Multipliez cela par le un et demi. Il résultera cent soixante cinq, ce qui est la quantité cherchée.

f. 8 r. lig. 13. L'auteur dit: *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double moins un* (**). Cette élévation au cube (doit s'entendre de) l'addition des nombres impairs. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez déjà que la somme (des impairs simples) est vingt cinq, et le double de cela moins un est quarante neuf. Par conséquent multipliez le vingt cinq par le quarante neuf. Vous aurez pour résultat mille deux cent vingt cinq,

(*) C'est à dire $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$.

(**) C'est à dire $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

ainsi: 1225. | Règle fondamentale. Si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité, suivant l'ordre des nombres impairs, jusqu'à un nombre inconnu, et le résultat sera tant; alors multipliez ce résultat par huit, et additionnez au produit une unité. Prenez la racine de la somme, et ajoutez à la racine de nouveau une unité. Prenez la racine de ce résultat et retranchez-en une unité. Ce qui provient est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend (*). Par exemple, si l'on vous dit: on a additionné depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un certain nombre suivant l'ordre des nombres impairs, et le résultat a été mille neuf cent quatre-vingt dix (**). Alors multipliez cette somme par huit, et ajoutez au produit une unité. Vous aurez en somme cent cinquante neuf mille deux cent et un. Prenez-en la racine, qui est trois cent quatre-vingt dix-neuf. Ajoutez à cela une unité, ce sera quatre cents. Prenez-en la racine, qui est vingt, et retranchez-en l'unité. Vous aurez pour reste | dix-neuf, ce qui est le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend. La manière d'exécuter cette opération se présentera encore, si Dieu le permet, dans le problème du château (***), traitée au moyen de l'algèbre. |

f. 8 r. lig. 18. — f. 9 r. — f. 9. r. lig. 2.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.* Ceci est la cinquième espece de l'addition. Et l'opération, d'après ce que l'auteur a dit, est claire. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à dix, alors ajoutez au dix deux, ce qui fait douze. La moitié de cela, à savoir six, multipliée par la moitié du dix, donne trente, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à vingt deux, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, deux, ce qui fait vingt quatre. Multipliez cela (****) par la moitié du vingt deux. Vous aurez pour résultat cent trente deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* C'est à dire l'élévation au carré des nombres pairs. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de deux jusqu'au

---

(*) C'est à dire, si $1^3+3^3+5^3+\ldots+x^3=k$, on aura $\sqrt{\sqrt{k.8+1}+1}-1=x$.

(**) C'est ainsi que porte le ms. Mais cette leçon est fausse ; il faut lire: dix-neuf mille neuf cents, c'est à dire 19900 au lieu de 1990.

(***) Le mot que je traduis ici par « château » signifie aussi « selle ». Or, l'ouvrage d'Ibn Al-bannâ, commenté ici par Alkalaçâdî, était un abrégé d'un ouvrage appelé « La petite selle » (Voir Journal asiatique cahier d'octobre-novembre 1854, pag. 371, lig, 1 à 7). Il est donc possible que Alkalaçâdî fasse ici allusion à un problème contenu dans ce dernier ouvrage, de sorte qu'il faudrait traduire: « dans le pro- » blème proposé dans (l'ouvrage intitulé) *la petite selle* »

(****) C'est ainsi que porte le ms. Il faut lire: multipliez la moitié de cela.

carré de douze. Alors vous savez en vertu de ce qui précède, que la somme (des pairs simples) est quarante deux. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers de douze, ce qui est huit, et ajoutez-y deux tiers, ce qui fait huit et deux tiers. Multipliez cela par le quarante deux. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent soixante quatre.

L'auteur dit : *ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu' auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* Ceci est une seconde manière de l'élévation au carré des nombres pairs. Son éclaircissement, au moyen de notre exemple, consiste en ce que vous multipliez le sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir de douze, par le rectangle compris sous treize et quatorze, à savoir par cent quatre-vingt deux. Ce (produit) sera la quantité cherchée.

f. 9 r. lig. 20. L'auteur dit: *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double* (*). Ceci est l'élévation au cube en additionnant les nombres pairs. La somme est dans notre exemple quarante deux, et son double est quatre-vingt quatre. Si l'on en fait le rectangle, le produit est
f. 9 r. lig. 23. trois mille cinq cent vingt huit, ce qui est la quantité cherchée. |

Remarque additionnelle, relative au cas où l'on vous dit : additionnez à partir d'un nombre qui n'est pas un, ou qui n'est pas deux, d'une manière semblable à ces additions (qui précèdent). L'opération en ce cas consiste à faire d'abord l'addition à partir de l'unité ou à partir du deux, et à retrancher ensuite de la somme ce qui résulte de (l'addition faite jusqu'au nombre) proposé dans le problème (comme commencement de la suite). L'auteur n'a pas signalé ce (cas) dans le présent ouvrage,
f. 9 v. mais il l'a signalé dans les discours (**). Par exemple si | l'on vous dit: additionnez depuis cinq jusqu'à seize suivant l'ordre naturel des nombres, alors additionnez d'abord depuis l'unité jusqu'au seize, d'après ce qui précède. Vous aurez pour résultat cent trente six. Réservez cela. Ensuite retranchez du cinq une unité. Il reste quatre. Additionnez depuis un jusqu'à quatre, vous aurez pour somme dix. Retranchez cela du (nombre) réservé, vous aurez pour reste cent vingt six, et telle est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis six jusqu'à quatorze en prenant les nombres pairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord depuis deux jusqu'à quatorze. Ce sera cinquante six. Réservez cela. Ensuite retranchez du six deux; il vous restera quatre. Additionnez depuis deux jusqu'à quatre, ce sera six. Retranchez cela du (nombre) réservé. Vous aurez pour reste cinquante, ce qui est

---

(*) C'est à dire $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2\left[n(n+1)\right]^2$.

(**) Cela peut signifier que l'auteur, Ibn Albannâ, a exposé ces règles verbalement, ou qu'il les a exposées dans un ouvrage intitulé « les discours, » ou dans un ouvrage divisé en « discours, » c'est à dire en « livres. »

la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis sept jusqu'à onze en prenant les nombres impairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord depuis un jusqu'à onze, ce qui fait trente six. Ensuite retranchez deux de sept. Il reste cinq. Additionnez depuis un jusqu'à cinq, ce sera neuf. Retranchez cela du (nombre) réservé. Il reste vingt sept, ce qui est la quantité cherchée. Et vous règlerez d'une manière analogue l'opération pour l'élévation au carré et pour l'élévation au cube (*). f. 9 r. lig. 14.

TROISIÈME CHAPITRE

DE LA SOUSTRACTION

L'auteur dit : *La soustraction est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci s'applique à l'exécution écrite de la soustraction. Dans certains de ses ouvrages (Ibn Albannâ) a dit que la signification de la soustraction consiste à faire connaître la différence entre deux nombres différents par rapport à la quantité, dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. Il n'a pas rencontré la vraie définition de cette (opération) dans le « Soulèvement du rideau » (**). Le plus convenable est de dire que la soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. L'auteur dit: *Elle (se fait) de deux manières. L'une consiste à retrancher le plus petit du plus grand une seule fois.* C'est celle par laquelle on commencera dans le présent chapitre; comme si l'on vous dit: retranchez treize de trente sept (***). Alors vous direz: le reste est vingt quatre. Lauteur dit: *L'autre espèce consiste à retrancher le plus petit du plus grand plus d'une seule fois.* Ceci est le chapitre de la preuve (****), ainsi qu'il sera exposé plus tard, si Dieu le permet. Comme si l'on vous dit: retranchez du trente cinq (constamment) sept (*****). Ou bien, il en restera un excédant, comme (si vous prenez) quarante et un (******). L'auteur dit :

(*) Ceci comprend la sommation des séries:

$$m^3+(m+1)^3+(m+2)^3+\ldots.+(m+n)^3,$$
$$(2m)^3+(2m+2)^3+(2m+4)^3+\ldots+(2m+2n)^3.$$
$$(2m+1)^3+(2m+3)^3+(2m+5)^3+\ldots+(2m+2n+1)^3.$$

(**) Cet ouvrage d'Ibn Albannâ est mentionné dans le passage d'Ibn Khaldoûn dont le texte et la traduction se trouvent dans le cahier d'octobre-novembre 1854 du Journal asiatique, pag. 370 et suiv.

(***) Le texte du ms. porte par erreur *six* au lieu de *sept.*

(****) C'est l'opération décrite dans le 5.e chapitre de la première Partie de l'Arithmétique d'Alkalaçâdî. Pag. 252 à 255 des Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, Anno XII.

(*****) Le copiste paraît ici avoir oublié quelques mots exprimant à peu près ceci: « et dans cet exemple il ne vous restera aucun excédant ».

(******) En effet, si l'on retranche de 41 autant de fois 7 qu'il est possible, il reste l'excédant 6.

Pour la première espèce, il faut placer le (nombre) dont on retranche dans une ligne, et au-dessous le nombre qu'il s'agit de retrancher, de la même manière comme dans l'addition; puis il faut retrancher chaque place (c'est à dire chaque
f. 10 r. *chiffre) de celui qui lui correspond, | s'il y en a un qui lui correspond* (*).

. . . . Vous aurez pour résultat (**) deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre déficient. Il a comme parties: une moitié, à savoir cent quarante deux; un quart, à savoir soixante et onze; un soixante-et-onzième, à savoir quatre; la moitié
f. 69 v. de la (fraction précédente), à savoir deux; et la moitié de celle-ci, à savoir | un. La somme de ces parties est deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant. Celui-ci a comme parties: une moitié, à savoir cent dix; un quart, à savoir cinquante cinq; un cinquième, à savoir quarante quatre; un dixième, à savoir vingt deux; une moitié de dixième, à savoir onze; puis en fait de fractions non articulées (***): un onzième, à savoir vingt; et la moitié de cela, à savoir dix; et le quart de cela à savoir cinq; et le cinquième (du onzième), à savoir quatre; et le dixième (du onzième), à savoir deux; et la moitié du dixième (du onzième), à savoir un. La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre déficient. Ces deux nombres sont les nombres amiables les plus petits qu'il soit possible de trouver.

Ceci est la fin de ce que je me suis proposé (de dire) sur cette matière.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers. Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur Mohammed, le dernier et le plus parfait des prophètes, le prince des apôtres, et sur sa famille et ses compagnons. Que le salut divin soit répandu sur eux avec profusion jusqu'au jour de la résurrection.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers, de la part de celui qui a écrit (cette copie), et qui a besoin (de la miséricorde) de son Seigneur qui pardonne à son esclave, (à savoir) Al-hâdjdj Imâd Alfihrî, puisse Dieu accorder son pardon à lui, à ses parents, aux docteurs (qui l'ont instruit), et aux docteurs de ses docteurs, jusqu'au jour de la résurrection.

(Terminé) à l'aurore du vingt neuvième jour du mois sacré du ramadhân de
f. 69 v. lig. 14. l'année mil deux cent vingt neuf (****). Fin. |

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

(*) C'est à dire si le chiffre correspondant du nombre dont on retranche, n'est pas zéro.

(**) Alkalaçâdî termine son commentaire en montrant la manière de trouver les deux *nombres amiables* 220 et 284; ces nombres jouissent de la propriété que la somme des diviseurs du premier est égale au second, et réciproquement.

(***) Ce sont les fractions qui ne peuvent pas s'énoncer au moyen des mots: une moitié, un tiers, un quart, etc. jusqu'à un dixième inclusivement, ni par la combinaison de ces mots.

(****) Cette date correspond au 14 septembre 1814 de notre ère. Le manuscrit est donc très-moderne.

Le serviteur qui a la conscience de ne pouvoir satisfaire à la justice de son Seigneur, l'illustre et lettré jurisconsulte Aboû Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okaïlî Alçoûneçî, que Dieu veuille agir avec lui selon sa grâce et sa générosité, dit:

Louange à Dieu pour avoir rendu nombreux ses bienfaits et ses élus. Grâces à Dieu, pour les bienfaits abondants de son indulgence et de ses dons. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed, qui est la meilleure de ses créatures, et le dernier et le plus parfait de ses prophètes, et sur sa famille et ses compagnons, qui ont eu la bonne fortune d'embrasser sa cause et de la suivre.

Pour en venir au fait. Ceci est (un travail) qui fournit des explications faciles, intercalées entre les paroles du (traité intitulé) Al-yaçârah (« L'aisance »). Je l'offre comme un commentaire de ses paroles et de ses sens cachés, et comme un éclaircissement de ses fondements et de ses développements. Afin que ce soit un secours pour celui qui désire le comprendre, et un guide pour celui qui cherche à connaître l'explication de sa science. Et quoique ce traité soit extrêmement concis et abrégé, il n'en embrasse pas moins une branche | de la science qui est d'une grande étendue. f. 70 r.



Manuscrit coté 951_3 du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Volume in-4.° de 174 feuillets en papier dont le premier et le dernier sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les autres feuillets sont numérotés au crayon avec les nombres 1 à 172.

Feuillet 1 v. lig. 1 à 74 r. lig. 20 de la numération écrite au crayon: Commentaire du *Talkîs* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ, sans nom d'auteur.

Feuillet 77 v. lig. 1 à 122 r. lig. 26 de la numération écrite au crayon : Commentaire sur « l'Abrégé de la science du calcul » d'Abdoulkâdir Alçakhâwî le châféïte, par Hoçaïn Ben Mohammed Almahallî le châféïte.

Feuillet 123 v. lig. 1 à 172 r. lig. 15 de la numération écrite au crayon : Traité d'arithmétique pratique intitulé: « Soulèvement du vêtement de la science du calcul » par Alkalaçâdî. La copie de ce traité paraît avoir été achevée le 24 chawwâl 1143 de l'hégire, ou 2 mai 1731 de J.-C.

Comparer sur ce Manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de Février - Mars 1862, pag. 108 lig. 1 à pag. 112 lig. 7.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 14 à 28 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon).

---

f. 1 v. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction divine soit sur notre seigneur et maître Mohammed et sur toute sa famille !

Louange à Dieu , maître de l'Univers , que sa bénédiction et son salut soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et tous ses compagnons.

Pour en venir au fait. L'objet de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, un aperçu succinct de ses règles, et un arrangement d'après un ordre sévère, de ses fondements. Il comprend deux parties. La première partie traite des opérations du nombre connu. La seconde partie traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à ce qui est inconnu et cherché en partant de ce qui est connu et donné, s'il existe entre les deux choses une relation qui rend cela nécessaire.

PREMIÈRE PARTIE, DES OPÉRATIONS DU NOMBRE CONNU.

Cette partie est divisée en trois divisions. La première division traite des opérations du nombre entier. La seconde division traite des opérations des fractions. La troisième division traite des opérations des racines.

Première division. Des opérations du nombre entier.

Cette division se partage, convenablement à son but, en six chapitres , dont le premier traite des divisions du nombre, et de ses ordres.

PREMIER CHAPITRE

Le nombre est ce qui est composé d'unités. Par conséquent l'un n'est pas appelé nombre, parce qu'il n'est pas composé d'unités. On dit aussi: le nombre est une réunion de monades (*).

Tel est tout nombre, comme le cinq, le dix, le cent, le mille.

Le nombre est divisé en pair et impair.

Le pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales. Tels sont tous les nombres dans la première place desquels il se trouve un nombre pair, comme deux, quatre, six, huit, ou dans la première place desquels il n'y a point d'unités. Le nombre impair ne jouit point de ces propriétés.

On dit aussi: le nombre pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales, ou en deux parties inégales, l'une étant plus grande et l'autre plus petite, pourvu qu'il soit plus grand que deux (**).

Si le nombre pair est divisé en deux parties égales, et que l'une d'elles est paire, l'autre partie est (pareillement) paire; et si (l'une des parties) est impaire, l'autre partie est (aussi) impaire. Et s'il est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties est (ou bien) impaire (ou paire). Par exemple le huit se divise en deux nombres pairs, quatre et quatre, qui sont égaux; et se divise (aussi) en cinq et trois qui sont inégaux, et chacune de ces deux (dernières parties) est impaire.

Si le nombre pair est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties se laisse diviser (***) en deux parties inégales. Ainsi le cinq et le trois sont inégaux, et pareillement les parties de chacun de ces deux nombres sont inégales.

Quant au (nombre) impair | c'est celui dont les parties etc. f. 2 *r.*

. . . . vous ajoutez | constamment un demi, et vous multipliez la somme par la quantité réservée. Alors ce qui résulte est la réponse. Par exemple, si l'on dit: additionnez depuis cinq jusqu'à dix-neuf suivant l'ordre des nombres (naturels), alors vous joignez le cinq au dix-neuf, ce qui fait vingt quatre, et vous réservez cela. Ensuite retranchez le premier des nombres, à savoir cinq, du plus grand des nombres, à savoir dix-neuf. Il reste quatorze. Prenez-en la moitié, qui est sept. Ajoutez-y la moitié d'une unité; ce sera sept et demi. Multipliez cela par le nombre réservé, à savoir par vingt quatre. Le résultat sera cent quatre-vingt, ce qui est la réponse. f. 7 *v.*

(*) Le mot employé ici est différent du terme ordinaire pour « unité », employé par exemple lig. 2, 3 et 9 de la présente page. Le dictionnaire le traduit par « unitas, singularitas ».

(**) Le deux se divise seulement en deux parties égales 1 et 1.

(***) Le texte ajoute « seulement, » ce qui est faux. Car, par exemple, $12 = 8 + 4$, et 8 divisibile en 4 et 4 qui sont égaux.

Et si l'on dit (*): additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres élevés au carré, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, et que vous additionnez les résultats; alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres suivant leur ordre, d'après la méthode précédente, et à réserver la (somme). Ensuite vous prenez deux tiers du dernier nombre, ce qui est six et deux tiers, et vous y ajoutez un tiers de l'unité. Il résulte sept, ce que vous multipliez par le (nombre) réservé, à savoir cinquante cinq. Le résultat
f. 7 *v.* lig. 11. sera 385, et telle est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre des cubes, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, que vous multipliez le résultat par son côté, et que vous additionnez les résultats; alors la méthode pour cela consiste à additionner depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres, d'après la méthode qui précède. La somme sera cinquante cinq. Ensuite vous élevez au carré ces cinquante cinq en les multipliant par eux-mêmes. Le ré-
f. 7 *v.* lig. 16. sultat sera 3025, ce qui est la réponse.

La quatrième espèce (de l'addition) (**) est l'addition suivant l'ordre des nombres impairs; cela signifie que vous additionnez les impairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel. La méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre, qui est le plus grand des (nombres), constamment une unité, à prendre la moitié de la somme, et à l'élever au carré en la multipliant par elle-même. Alors ce qui résulte est la réponse.

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres élevés au carré, l'opération consiste à additionner les nombres suivant leur ordre d'après ce qui précède, et à multiplier le résultat par deux tiers du dernier (nombre), augmentés constamment d'un tiers. Le résultat sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres carrés à partir de l'unité, alors multipliez 10 par 3, ce qui est deux tiers du quatre augmentés de $\frac{1}{3}$. Et (pour) les cubes (l'opération consiste) à additionner les (nombres simples) suivant l'ordre de la même manière, et à élever le résultat au carré. Ce sera la réponse.

(**) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant à l'addition suivant l'ordre des impairs, l'opération consiste à ajouter au dernier (nombre) constamment un, et à élever au carré la moitié du résultat. Ce sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres à partir de l'unité, le résultat sera 16. Et (pour trouver la somme des impairs) suivant leur ordre en les élevant au carré, (l'opération consiste) à multiplier les deux nombres qui viennent après le dernier (nombre) dans l'ordre naturel, et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Comme (si l'on additionne) depuis 1 jusqu'à 7 en élevant au carré, le résultat est 84. Et (pour additionner les impairs) en les élevant au cube (la méthode consiste) à additionner suivant l'ordre des impairs, à doubler le résultat, à retrancher du double un, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé (*a*). Et si l'on dit: additionnez quatre cases à partir de 1, suivant l'ordre des impairs, alors élevez au carré le nombre des cases, ce sera la réponse. Vous apprenez par-là que la racine (carrée) du résultat est le nombre des cases.

(*a*) C'est à dire

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3$$
$$=\left[2(1+3+5+7+\dots+\{2n-1\})-1\right].(1+3+5+7+\dots+\{2n-1\}).$$

Par exemple, si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, c'est à dire l'unité, le trois, le cinq, le sept, et le neuf; alors la méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre une unité, à prendre un quart de la somme, et à le multiplier par la somme; ou à prendre le nombre des ordres des impairs que vous avez, et à multiplier ce nombre par lui-même. Donc, si vous voulez, ajoutez au neuf une unité; ce sera dix. Prenez-en la moitié, qui est cinq, et multipliez cela par lui-même. Ce sera vingt cinq, et telle est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré, ce qui signifie que | chacun de ces impairs doit être f. 8 r.
multiplié par lui-même; alors la méthode pour cela consiste à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le plus grand des impairs par après, donc à en multiplier l'un par l'autre. Ensuite multipliez ce qui résulte, par un sixième du plus grand impair. Le résultat sera la réponse.

Par exemple, si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré; alors multipliez les deux nombres qui avoisinent le neuf par après, à savoir le dix et le onze, l'un par l'autre; ce sera cent dix. Ensuite multipliez ce cent dix par un sixième du neuf, à savoir par un et demi. Il résultera cent soixante cinq, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis un jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, f. 8 r. lig. 7.
en les élevant au cube, alors faites la somme suivant l'ordre des impairs, sans les élever au cube, ainsi qu'il précède. Ce sera vingt cinq. Réservez cela. Ensuite doublez-le, ce sera cinquante. Retranchez une unité du cinquante; il reste quarante neuf. Multipliez cela par le (nombre) réservé, qui est vingt cinq. Il résulte 1225, ce qui est la réponse. f. 8 r. lig. 11.

Et si l'on dit: additionnez jusqu'à la dixième case suivant l'ordre des impairs, en sous-entendant que dans la première case soit l'unité, dans la seconde trois, et ainsi de suite suivant l'ordre des nombres impairs jusqu'à la dixième case; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même. Ce qui en résulte sera la réponse. Dans le cas actuel cela est cent.

Vous apprenez par là que, si vous avez un nombre, et que vous désirez savoir combien il contient d'impairs séparément, vous devez en prendre la racine. Ce qui résulte est le nombre des impairs contenus dans le (nombre proposé), si le commencement des (nombres impairs) est un.

Section. Si l'on vous dit : (étant proposé) le nombre cent, (combien) y est-il contenu de nombres impairs se succédant suivant l'ordre en commençant par l'unité; alors la méthode pour cela consiste à prendre la racine du nombre, à savoir de cent, qui est dix; et ce nombre (indique) combien il y a dans cent de nombres impairs suivant l'ordre en commençant par l'unité. Ce sont 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19, et ce sont dix impairs, (dix) étant le nombre de la racine du cent qui est leur somme.

La cinquième espèce (de l'addition) (*) est l'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs, ce qui signifie que vous additionnez les pairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel, à savoir deux, quatre, six, huit, dix, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La méthode pour cela consiste à ajouter au (nombre) pair jusqu'auquel (la suite) s'étend [deux], et à multiplier un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend augmenté de deux. Ce qui résulte est la réponse.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs, alors ajoutez deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à sa-
f. 8 v. voir au dix: Ce sera douze. | Prenez-en la moitié, à savoir six, et multipliez-la par la moitié du dix, à savoir par cinq. Il résultera trente, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des (nombres) pairs, en les élevant au carré, alors la méthode pour cela consiste en deux manières.

La première (manière est) que vous additionnez les (nombres) pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède. Ce sera trente. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui est six et deux tiers. Ajoutez-y constamment deux tiers de l'unité. Ensuite multipliez la somme, à savoir sept et un tiers, par le (nombre) réservé. Le résultat sera deux cent vingt, et telle est la réponse.

Et si l'on vous dit: nous avons le (nombre) cent dix; combien y est-il contenu de nombres pairs; alors la méthode pour cela consiste à ajouter au nombre donné constamment un quart de l'unité, à prendre la racine de la somme, et à en retrancher constamment la moitié d'une unité; le double (**) de ce qui reste sera le nombre des (nombres) pairs. Donc ajoutez au cent dix un quart de l'unité, ce sera cent dix et un quart. Prenez-en la racine, à savoir dix et demi. Retranchez-en un demi.

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Et (pour additionner les nombres) pairs suivant l'ordre naturel (la méthode consiste) à ajouter au dernier (nombre) 2, et à multiplier la moitié du résultat par la moitié du même dernier (nombre). Comme (si l'on veut additionner) depuis 2 jusqu'à 8, ce dont le résultat est 20. Et (pour additionner les nombres pairs, en les élevant au carré (la méthode consiste) à les additionner suivant l'ordre, à ajouter ensuite aux deux tiers du dernier (nombre) constamment deux tiers de l'unité, et à multiplier le résultat par ce qui provenait de l'addition (des nombres pairs simples); ou à former le rectangle des deux nombres qui viennent suivant l'ordre après le dernier (nombre pair) et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Et si l'on dit: (le nombre) cent dix, combien contient-il de nombres pairs, alors ajoutez-y constamment un quart de l'unité, et retranchez de la racine du résultat constamment la moitié d'une unité; le double (a) du reste sera la réponse.

(**) Le mots « le double de » sont de trop; il faut dire: ce qui reste sera le nombre des nombres pairs contenus dans le nombre proposé.

(a) Les mots « double du » sont de trop; il faut dire: le reste sera la réponse. Car, puisque $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$, si l'on pose $n(n+1)=a$, on aura

$$\sqrt{a+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}=\sqrt{n^2+n+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}=\sqrt{(n+\tfrac{1}{2})^2}-\tfrac{1}{2}=(n+\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}=n.$$

Il reste dix. Le double de cela sera vingt, et tel est le nombre des (nombres) pairs contenus dans cent dix (*).

La seconde manière (de sommer les carrés des nombres pairs suivant l'ordre, consiste) à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le dix par après, à savoir du onze et du douze. Donc multipliez-en l'un par l'autre, et réservez le résultat. C'est cent trente deux. Ensuite prenez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir du dix. Vous trouvez que c'est un et deux tiers. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par le cent trente deux. Le résultat sera deux cent vingt, ce qui est la réponse, comme précédemment.

Et si l'on dit: (**) additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs en les élevant au cube, alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède, et à réserver le résultat, à savoir trente. Ensuite doublez-le. Ce sera soixante. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par trente. Le résultat sera mille huit cent, et telle est la réponse. f. 8 v. lig. 16.

Et si l'on dit: additionnez ce qui est contenu dans dix cases suivant l'ordre des nombres pairs, ce qui signifie que dans la première case se trouve deux, dans la seconde quatre, et ainsi de suite, suivant l'ordre des nombres pairs, jusqu'à la dixième case; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases, à savoir dix, par lui-même augmenté d'une unité. Ce sera cent dix; et telle est la réponse. f. 8 v. lig. 19.

Ceci (est l'opération) si le commencement des nombres pairs est le deux. Mais si le commencement est un nombre pair différent du deux; alors faites-en l'addition en supposant (d'abord) que le commencement soit deux, et réservez ce qui en résulte. Ensuite additionnez ce qui est compris entre le deux et le nombre donné comme premier. Retranchez cela du nombre réservé. Ce qui reste est la réponse.

Sachez aussi que, si le commencement est fait à partir d'un nombre différent

(*) On a $110 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$ ce qui sont dix et *non vingt* nombres pairs. Je viens déjà d'indiquer la source de cette erreur du texte arabe.

(**) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

L'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs en les élevant au cube, consiste à additionner les (nombres) pairs suivant l'ordre, à doubler le résultat, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé. Et si l'on dit: additionnez ce qui se trouve dans 10 cases suivant l'ordre des (nombres) pairs à partir de 2, alors l'opération consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même augmenté de l'unité. Le résultat sera la réponse. Ceci a lieu si (la suite) commence par 2. Si non, faites la somme (comme d'habitude) en supposant que le commencement soit 2, et réservez le résultat; retranchez-en la somme de ce qui se trouve entre le deux et le nombre donné comme premier. Le reste sera la réponse. Et si dans ces trois divisions (de l'addition) (*a*) le commencement ne se fait pas par l'unité, alors additionnez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite depuis l'unité jusqu'au (nombre) qui précède le (nombre donné comme) commencement (de la suite), et retranchez le plus petit du plus grand. Dans l'addition des (nombres) pairs le deux tient la place que tient l'unité dans l'addition des autres.

(*a*) Les trois divisions dont il s'agit sont: la sommation des nombres naturels, des nombres impairs et des nombres pairs.

f. 9 r. de l'unité dans une autre de ces | trois divisions (*), vous additionnerez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, vous additionnerez ensuite depuis l'unité jusqu'au nombre qui précède celui qui est le commencement (donné), et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, dans l'addition des nombres pairs, la place que l'unité tient dans l'addition des autres (nombres). Comprenez cela.

TROISIÈME CHAPITRE

DE LA SOUSTRACTION.

La soustraction est l'action de retrancher le plus petit du plus grand de deux nombres, etc.

. . . . Et si l'on dit: on ajoute à une quantité son tiers et un dirhem, de la somme on retranche ensuite son tiers, et il reste un dirhem; combien est la quantité ? (**) Alors la réponse est que la quantité est trois huitièmes d'un dirhem. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers, et dont le
f. 74 r. tiers ait lui-même un tiers. Tel est neuf. Vous y ajouterez donc | son tiers et un dirhem, ce qui fait trois parties et un dirhem, et ce sera douze parties et un dirhem. De cela vous retrancherez son tiers, ce qui est quatre parties et un tiers d'un dirhem. Il reste huit parties et deux tiers d'un dirhem; et cela est égal au dirhem restant que nous avions donné. Vous poserez donc les huit parties, c'est à dire par-

---

(*) Ces trois divisions sont l'addition des nombres pairs, que l'auteur vient de traiter, et l'addition des nombres naturels et des nombres impairs exposées précédemment.

(**) L'équation proposée est:

$$x + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x + \frac{x}{3} + 1}{3} = 1.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser $x = 9y$, ce qui lui donne

$$9y + \frac{9y}{3} + 1 - \frac{9y + \frac{9y}{3} + 1}{3} = 1,$$

$$\text{ou} \quad 9y + 3y + 1 - \frac{9y + 3y + 1}{3} = 1,$$

$$\text{ou} \quad 12y + 1 - \frac{12y + 1}{3} = 1, \quad \text{ou} \quad 12y + 1 - 4y - \frac{1}{3} = 1,$$

$$\text{ou} \quad 8y + \frac{2}{3} = 1, \ \text{ou} \ 8y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; \ \text{mais} \ y = \frac{1}{9}x,$$

$$\text{donc} \ \frac{8x}{9} = \frac{1}{3}, \quad \text{ou} \ 8x = \frac{9}{3} = 3, \quad \text{donc} \ x = \frac{3}{8}.$$

ties d'un dirhem, et vous les réserverez. Ensuite vous retrancherez les deux tiers d'un dirhem du dirhem. Il reste un tiers d'un dirhem. Vous multiplierez cela par le dénominateur, lequel est neuf. Ce sera trois. Vous diviserez cela par la partie, à savoir par huit. Il résultera trois huitièmes d'un dirhem, ce qui est la quantité (cherchée). (*)

Et si l'on dit : on ajoute à une quantité son cinquième et un dirhem, on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart (**), et il reste deux dirhems, combien est la quantité ? (***) Alors la réponse est que la quantité est trois dirhems et un sixième. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers et un quart et un cinquième. Tel est soixante. Vous y ajouterez son cin-

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant aux mots du (texte): « trois huitièmes d'un dirhem etc., » la preuve de cela (consiste en ce) que vous ajoutez au trois son tiers, ce qui fait quatre huitièmes. A ceci vous ajoutez ensuite huit, en remplacement du dirhem: ce sera douze huitièmes. Après cela vous en retranchez son tiers, ce qui est quatre huitièmes. Il reste huit (huitièmes), ce qui est l'équivalent du dirhem, de sorte qu'il n'est rien resté (de trop). Et, si vous voulez, posez le dirhem égal à vingt quatre, en multipliant trois par huit. Trois huitièmes de cela sont neuf. Ajoutez-y son tiers, ce qui est trois. Il résulte douze huitièmes. Ensuite ajoutez à ceci le dirhem, sous la forme de vingt quatre. La somme sera trente six. Retranchez-en son tiers, c'est à dire douze. Il reste vingt quatre, ce qui est l'équivalent du dirhem. Et si on retranche cela, il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné (*a*).

(**) Le texte ms. ajoute ici encore « et deux dirhems; on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart; » mais la suite prouve que c'est une méprise du copiste.

(***) L'équation proposée est:

$$x+\frac{x}{5}+1-\frac{x+\frac{x}{5}+1}{3}-\frac{x+\frac{x}{5}+1}{4}=2.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser $x=60\,y$, ce qui lui donne

$$60y+\frac{60\,y}{5}+1-\frac{60y+\frac{60y}{5}+1}{3}-\frac{60y+\frac{60y}{5}+1}{4}=2,$$

$$\text{ou}\quad 60y+12\,y+1-\frac{60y+12\,y+1}{3}-\frac{60y+12\,y+1}{4}=2,$$

$$\text{ou}\quad 72\,y+1-\left(42y+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=2,$$

$$\text{ou}\quad 30\,y+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=2,\quad\text{ou}\quad 30y=2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

$$\text{mais}\quad y=\frac{1}{60}x,\quad\text{donc}\ \frac{30x}{60}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

$$\text{ou}\quad 30\,x=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)60=95,\quad\text{ou}\quad x=\frac{95}{30}=3\,\frac{1}{6}.$$

(*a*) A la fin d'une des gloses précédentes se trouve mentionné le nom de Hoçaïn Almahallî ; je crois que ce Hoçaïn Almahallî est identique au Hoçaïn Ben Mohammed Almahallî le cháféite, qui est l'auteur du second des trois traités contenus dans le manuscrit d'où est tiré le morceau ici traduit. Voir ci-dessus, pag. 14, lig. 7 et 8.

*

quième et un dirhem. Il viendra soixante douze parties et un dirhem. Vous retrancherez de cela son tiers et son quart, à savoir quarante deux parties et un tiers et un quart d'un dirhem. Il reste trente parties et un quart et un sixième d'un dirhem. Cela est égal à deux dirhems.

Donc vous poserez les trente parties comme la partie réservée. Ensuite vous retrancherez le quart et le sixième des deux dirhems, parce que cela était ajouté aux parties. Il reste un dirhem et un tiers et un quart. Vous multiplierez cela par le dénominateur qui est soixante. Ce sera quatre-vingt quinze. Divisez cela par la partie, à savoir par trente. Il résulte trois dirhems et un sizième d'un dirhem (*), ce qui est la quantité (cherchée).

Ici nous nous arrêtons, et ce (qui précède) peut suffire à celui qui le médite. Dieu, qu'il soit loué et exalté, connaît mieux la vérité. Lui est le lieu où tout revient et où tout retourne. Louange à Dieu, maître de l'Univers. Il nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs. Fin.



(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant aux mots du (texte): « trois dirhems et un sixième etc. » la preuve de cela (consiste en ce) que vous convertissez cela en des sixièmes. Ce seront dix-neuf sixièmes. Ajoutez-y son cinquième, à savoir trois et quatre cinquièmes. Ensuite ajoutez à cela le dirhem, c'est à dire six. Il résultera vingt huit et quatre cinquièmes. Convertissez le tout en des cinquièmes. Il résulte cent quarante quatre. Retranchez-en le quart, ce qui est trente six, et le tiers, ce qui est quarante huit. La somme de cela est quatre-vingt quatre. Ajoutez-y deux dirhems, c'est à dire soixante (*a*). Il résulte comme somme cent quarante quatre. Donc (vous avez à retrancher une quantité) d'(une quantité) égale, (et) il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné. Puisse Dieu pardonner à nous et à lui. Amen !.

(*a*) La première conversion donne le dénominateur six, la seconde le dénominateur cinq, donc ensemble le dénominateur trente; par conséquent deux dirhems, c'est à dire deux unités, s'ajoutent sous la forme de soixante trentièmes.

Manuscrit coté $951\frac{1}{3}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Voyez la description de ce manuscrit ci-dessus, pag. 14, lig. 3 à 12. — Les passages traduits ci-après appartiennent au traité d'arithmétique pratique d'Alkalaçâdî, intitulé: « Le soulèvement du vêtement de la science du calcul. Voyez ci-dessus, pag. 14, lig. 9 à 11. — Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 23 à 26 de la présente traduction se rapportent à la numération écrite au crayon sur les feuillets du manuscrit.)

Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed et ses compagnons. f. 123 v.

Le chaïkh, le philosophe exact, l'excellent, le docte, l'arithméticien, le savant connaisseur des opérations du partage des successions, celui qui réunit les qualités les plus diverses, le pénétrant, le précis, l'éminent, le célèbre, Aboû'l-haçan Alî Ben Mohammed Ben Mohammed Ben Alî (appelé) d'après son pays Alkalaçâdî, puisse Dieu lui être favorable et nous faire profiter de ses mérites, amen, dit:

Louange à Dieu qui est rapide dans son calcul, qui dirige les coeurs, qui est la cause des causes, le créateur des hommes, qui les a fait entrer dans le champ de l'existence en conséquence de sa volonté, et qui les a conduits par son prophète sur le chemin le plus parfait, dont la bonté et la générosité entourent tout ce qui existe, dont l'arrêt prédéterminé et la justice s'exercent à l'égard de toutes ses créatures, qu'il a formées dans des états successifs, et soumises à la nécessité de la destruction et de la mort, et du retour pour l'examen des secrets et des circonstances.

Grâces à Dieu pour les bienfaits nombreux dont il nous a gratifiés, et particulièrement pour ce qu'il nous a placés dans la plus noble espèce des hommes, distinguée par l'excellence de la langue et de l'éloquence.

Que la bénédiction et le salut (de Dieu) soient sur le seigneur des deux mondes, l'(apôtre) envoyé aux hommes et aux génies, le possesseur de la bannière et du nectar, celui en qui nous plaçons notre espoir au jour de la résurrection. (Que ce soit une) bénédiction qui se continue éternellement, tant que luira et brillera l'aurore.

Pour en venir au fait. Après que j'eus composé (l'ouvrage intitulé:) « Le moyen de fortifier la vue dans la science du calcul, » et qu'il ne m'était pas venu à l'esprit, pendant que j'en étais occupé, que rien dans cet ouvrage pût offrir de la difficulté au lecteur, (je m'aperçus) qu'il contenait des règles et des fondements des opérations exigés par l'art de la composition, et auxquels je fus amené par la nécessité de la rédaction, mais qui arrêtèrent, dans l'étude dudit ouvrage, les commencants pour lesquels il avait été composé. Cependant je ne pouvais plus changer
f. 124 r. l'ouvrage, parce qu'il s'était déjà répandu parmi les hommes, etc.

. . . . *Troisième section. De l'addition suivant le rapport.*

Quant à l'addition suivant le rapport naturel des nombres, l'opération pour cela consiste à ajouter une unité au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis un jusqu'à dix; alors ajoutez
f. 169 v. au dix un, ce sera onze. | Multipliez cela par le cinq qui est la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Il résulte cinquante cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus un tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres simples).

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors prenez deux tiers du dix plus un tiers de l'unité. Il en résulte comme somme sept. Multipliez cela par le cinquante cinq. Il résulte trois cent quatre-vingt cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

f. 169 v. lig. 5. L'élévation au cube de cette espèce (se fait) de nouveau par l'élévation au carré de la somme, c'est à dire du cinquante cinq dans notre exemple. Ce qui résulte (si l'on additionne) depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix, sera donc trois mille
f. 169 v. lig. 7. vingt cinq.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres pairs, l'opération pour cela consiste à ajouter deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la moitié de cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à douze suivant l'ordre des nombres pairs, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux. Ce sera quatorze, ce dont la moitié est sept. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Vous aurez pour résultat quarante deux, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers

du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres pairs simples).

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze; alors prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend et deux tiers de l'unité. Ce sera huit et deux tiers. Multipliez cela par la somme, laquelle est quarante deux. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché qui est trois cent soixante quatre.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double. f. 169 v. lig. 15.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de deux jusqu'au cube de douze; alors multipliez la somme, à savoir quarante deux, par son double, à savoir par quatre-vingt quatre. Vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt huit. f. 169 v. lig. 18.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres impairs, l'opération pour cela consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend une unité, et à élever au carré la moitié de la somme.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez au neuf une unité; ce sera dix. Élevez au carré la moitié de cela. Ce sera vingt cinq, et tel est le (nombre) cherché.

| L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication d'un sixième f. 170 r.
du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui le suivent immédiatement.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le résultat de la formation du rectangle compris sous le dix et le onze, ce qui est cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres impairs simples) par son double moins un. f. 170 r. lig. 5.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors multipliez la somme, à savoir vingt cinq, par son double moins un, à savoir quarante neuf. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché, lequel est mille deux cent vingt cinq. f. 170 r. lig. 9.

Avertissement. Si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre inconnu (*); et le résultat étant tant, combien est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend? Alors l'opération pour cela consiste à multiplier le résultat par le premier des cubes, à savoir huit, à ajouter au produit de la multiplication une unité, à prendre la racine de la somme, à ajouter ensuite à la ra-

(*) Il faut remarquer que l'auteur sous-entend ici, mais sans le dire, qu'il ne prend dans cette addition que les cubes des nombres *impairs* suivant l'ordre.

cine de nouveau une unité, à prendre la racine de la (somme), et à retrancher de ce qui est (la racine) l'unité. Vous aurez pour reste le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend (*).

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre inconnu, et le résultat sera quatre cent quatre-vingt seize. Alors multipliez ce résultat par huit, et ajoutez au produit une unité. La somme sera trois mille neuf cent soixante neuf. Prenez-en la racine. Ce sera soixante trois. Ajoutez-y une unité. Ce sera soixante quatre. Prenez-en la racine, à savoir huit. De ceci retranchez une unité. Vous aurez pour reste sept, ce qui est le (nombre) inconnu jus-
f. 170 r. qu'auquel (la suite) s'étend.

fig. 19. Quant à l'addition à la manière des cases de l'échiquier, il faut nécessairement que deux conditions aient lieu. L'une, c'est que le commencement soit fait par l'unité; et la seconde, que le (rapport) suivant lequel (les nombres) se dépassent mutuellement, soit le double. Il suit de là que les nombres (qui se trouvent dans les
f. 170 v. cases, sont tous) pairement pairs. | L'objet que l'on se propose est (de connaître) la quantité qui se trouvera dans la soixante quatrième case.

. . . . Vous aurez pour résultat deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le plus grand (des deux nombres amiables).

Ce nombre a en fait de parties: une moitié, un quart, un soixante-et-onzième, la moitié de cela, et la moitié de la moitié de cela ; et la somme de ces parties
f. 172 r. est | deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant.

Celui-ci a en fait de parties: une moitié, un quart, un cinquième, un dixième, et la moitié du dixième; il a en outre, en fait de parties, un onzième, et la moitié et le quart (du onzième), et pareillement le cinquième de la même partie, et la moitié de cela à savoir le dixième (du onzième), et la moitié du dixième du (onzième). La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre déficient.

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cette composition. Louange à Dieu, maître de l'univers. Que la bénédiction de Dieu et la plénitude de son salut soient sur notre seigneur Mohammed, sur sa famille et ses compagnons.

L'achèvement (**) de la copie de ce livre eut lieu dans la nuit du mercredi,

---

(*) En effet l'auteur avait trouvé précédemment

$$1^3+3^3+5^3+\ldots\ldots+x^3=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left\{2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1\right\},$$

et si l'on pose le second membre de cette équation égal a k, on obtient

$$x=\sqrt{\sqrt{8\,k+1}+1}-1.$$

(**) Tandis que l'écriture de ce qui précède dans le manuscrit est fort régulière et lisible, elle de-

vingt trois nuits étant passées du mois de (chawwâl) (*), par la main de celui qui l'a écrit, l'esclave qui a besoin de son Maître le riche, l'esclave de Celui qui soit loué, le khâdjah (**) Chehr, le médecin; puisse Dieu lui pardonner, ainsi qu'à ses père et mère (***).

Louange à Dieu, Maître de l'univers. Fin.



vient ici brusquement très-négligée et difficile à déchiffrer. La traduction des lignes suivantes, qui terminent cette page du manuscrit, est donc en grande partie conjecturale.

(*) Le texte ms. a ici seulement un *lâm*, lettre finale du nom du mois de chawwâl. Comme les Arabes remplacent quelquefois un mot par sa lettre finale, par manière d'abréviation, et comme le mois de chawwâl est le seul dont le nom se termine par un *lâm*, je conjecture que c'est ce mois que le copiste a voulu indiquer. Ce qui me semble confirmer cette conjecture, c'est qu'on lit, à l'endroit indiqué dans la dernière note ci-après, la date de l'année 1143 (de l'hégire), et que le 24.e jour du mois de chawwâl de l'année 1143 de l'hégire, qui correspond au 2 mai 1731 de l'ère chrétienne, est précisément un mercredi.

(**) Khâdjah est un titre honorifique donné par les Orientaux aux personnes riches et respectables.

(***) Dans le prolongement de cette ligne, un peu vers la marge du manuscrit, on lit la date « année 1143 ».

Manuscrit coté $^{951}_{\ 2}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

Voyez la description de ce manuscrit ci dessus, pag. 5, lig. 13 à 15. —Les passages traduits ci-après appartiennent au second des deux commentaires du *Talkhîs* d'Ibn Albannâ, contenus dans ce manuscrit. Voyez ci-dessus, pag. 5, lig. 12 et 13. — Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 28 à 32 de la présente traduction se rapportent à la seconde des deux numérations du manuscrit.)

---

f. 1 r. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre seigneur Mohammed !

Ceci est (l'ouvrage intitulé) « Le rapprochement de celui qui est éloigné, sur Ibn Albannâ (*) ».

Louons Dieu d'une louange qui puisse être une expression complète et suffisante de la reconnaissance due pour l'abondance de ses bienfaits. Que la bénédiction et le salut de Dieu les plus parfaits soient sur notre seigneur Mohammed, le dernier et le plus accompli des prophètes et le prince des apôtres.

Pour en venir au fait. Je me suis rendu au desir des grands, des ingénieux, des nobles, des illustres, des perspicaces, des intelligents, relativement à la rédaction d'un abrégé de mon ouvrage qui a pour objet le Talkhîs d'Ibn Albannâ. Et je me suis appliqué à suivre la trace de l'auteur dans cet objet, en tâchant d'atteindre son but, et en réalisant son intention et la signification du jugement qu'il a émis en disant: (**)

(*) Les mots « Ceci est » jusqu'à « Ibn Albannâ » sont d'une écriture différente de celle du reste de la page, et n'ont été ajoutés évidemment que plus tard. Le mot « sur » est probablement mis par erreur, au lieu de « de », ainsi qu'on le voit par le titre tel que le donne l'auteur du commentaire lui-même, ci-après, pag. 29, lig. 10 et 11.

(**) Je rappelle que ces vers sont à peu près les mêmes que ceux qui se trouvent cités au commencement du commentaire d'Alkalaçâdî, sans cependant être tout à fait identiques à ceux-ci. Voir ci-dessus, pag. 6.

Je me suis appliqué à être bref dans mon exposé,
Parce que je sais trouver la juste mesure dans la concision.
Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,
Mais je crains le blâme des grands hommes.
Or, la manière d'agir des savants distingués est la mienne,
Et le devoir de la science (*) est d'instruire les petits. (**)

Mais quelquefois j'ai laissé échapper le frein à cause de l'avantage d'un développement additionnel, et afin de rendre plus complète l'utilité (de mon ouvrage).

Je l'ai appelé « Le rapprochement de celui qui est éloigné des problèmes d'Ibn Albannà. »

J'invoque le Seigneur en le priant d'en laisser profiter et moi, et vous, et tous ceux qui s'en occuperont, comme il nous a permis de profiter de (l'ouvrage qui sert de) base (à mon travail.) Il est le bienfaiteur, le généreux. Que sa bénédiction et son salut soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

L'auteur dit: *Le but* (***) *de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, de rendre prompte et facile l'intelligence de ses règles et de ses théories, et de présenter dans un ordre sévère les bases et le système de cet art.*

Commentaire. « Le but » est l'objet qu'on se propose. Le (mot qui signifie) « exposé fait avec choix » est un infinitif dont le sens est: l'action d'extraire la moelle d'une chose. « Les opérations du calcul », ce sont ses diverses applications, telles que l'addition, la multiplication, la division, l'abaissement (****), et les autres. « L'action de présenter dans un ordre sévère les bases », c'est | etc. fin de f. 1 r.

L'auteur dit: | *Et l'élévation au carré* (*****) (*se fait*) *par la multiplication de deux tiers du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend, augmentés d'un tiers de l'unité, par la somme* (******). f. 8 r.

« L'élévation au carré » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même. Cependant l'auteur s'est éloigné de cette signification primitive dans la présente règle, soit pour abréger, soit pour plus de facilité à l'égard de celui qui exécute l'opéra-

(*) Une variante placée sur la marge du manuscrit porte « de la chamelle ».
(**) Ces vers paraissent être reproduits ici d'une manière plus correcte que dans le commentaire d'Alkalaçâdî. Le mètre dans lequel ces vers sont composés, s'appelle *Wâfir*.
(***) Les passages imprimés en italique sont la traduction des passages de l'ouvrage commenté.
(****) C'est l'opération décrite dans le septième chapitre de la deuxième partie de l'Arithmétique d'Alkalaçâdî. Voir *Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei*, Anno XII (1859), Pag. 274.
(*****) C'est à dire: la sommation des carrés des nombres naturels suivant l'ordre.
(******) C'est à dire: la somme des nombres naturels simples.

*

tion. En disant « la somme », l'auteur se sert de l'article pour rappeler ce dont il a été fait mention précédemment; comme cela a lieu aussi dans cette parole du Koran: « Et Pharaon n'obéit point à l'envoyé. » Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce cas consiste à multiplier deux tiers du dix plus un tiers de l'unité, ce qui est sept, par la somme (des nombres) depuis un jusqu'à dix, qui est cinquante cinq. Vous aurez pour résultat trois cent quatre-vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

f. 8 r. lig. 9. L'auteur dit : *Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par l'élévation au carré de la somme.* « L'élévation au cube » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même et du produit par sa racine; comme le huit et le vingt sept relativement au deux et au trois. L'article dans le mot « la somme », est de nouveau employé pour rappeler (ce qui précède). Donc si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme, à savoir cinquante cinq. Vous
f. 8 r. lig. 15. aurez pour résultat trois mille vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce de l'addition, et l'opération est claire d'après ce que l'auteur a dit. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez un au neuf; ce sera dix. Élevez la moitié de cela, à savoir cinq, au carré. Vous aurez pour résultat vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré* (*se fait*) *par la multiplication d'un sixième du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* « La formation du rectangle » signifie la multiplication d'un nombre par un autre. L'auteur a dit « par après » par précaution, pour empêcher qu'on ne s'imagine (que les deux nombres sont ceux) qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Exemple de cette (règle). Si
f. 8 v. l'on vous dit: additionnez les impairs depuis le carré | de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le rectangle compris sous les deux nombres qui suivent le neuf, à savoir par cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante cinq, ce qui est la quantité cherchée.

f. 8 v. lig. 3. L'auteur dit: *Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par la multiplication de la somme par son double moins un.* L'explication de cela (est contenue) dans notre exemple. Si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez que la somme (des impairs simples) est vingt cinq, et son double moins un, quarante neuf. Multipliez cela par le vingt cinq, vous aurez pour résultat mille
f. 8 v. lig. 8. deux cent vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.* Ceci est la cinquième espèce de l'addition, et la manière de faire l'opération est évidente, d'après ce que l'auteur a dit. Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à douze, alors ajoutez au douze deux; se sera quatorze. Multipliez la moitié de cela par la moitié du douze. Vous aurez pour résultat quarante deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* Ceci est une manière d'exécuter l'élévation au carré. Donc, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze, alors multipliez deux tiers du douze plus deux tiers de l'unité, ce qui est huit et deux tiers, par la somme, laquelle est quarante deux Vous aurez pour résultat trois cent soixante quatre, ce qui est la quantité cherchée. La manière de faire la seconde multiplication (*) sera donnée, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le (chapitre des) fractions. Cependant j'ai pour cela une méthode abrégée qui consiste à multiplier le huit par le quarante deux. Vous aurez pour résultat trois cent trente six. Réservez cela. Ensuite multipliez | le deux qui se trouve au-dessus f. 9 r.
du trois (**) par le quarante deux. Vous aurez pour résultat quatre-vingt quatre. Divisez cela par le dénominateur, à savoir par le trois. Vous aurez pour résultat vingt huit. Ajoutez cela au (nombre) réservé. Vous aurez en somme de tout cela trois cent soixante quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* Ceci est une seconde manière de l'élévation au carré des nombres pairs. Un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, est dans notre exemple deux, (et doit être) multiplié par cent quatre-vingt deux, ce qui est le résultat de la multiplication du treize par le quatorze. La quantité cherchée résultera conforme à ce qui précède.

L'auteur dit: *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double.* Ceci est plus clair que (la règle) qui précède. Donc, si vous multipliez le quarante deux par son double, à savoir par quatre-vingt quatre, vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt huit, ce qui est la quantité cherchée. f. 9 r. lig. 9. f. 9 r. lig. 13.

(*) A savoir la multiplication de la somme (quarante deux) par les deux tiers.
(**) Dans la fraction « deux tiers. »

TROISIÈME CHAPITRE

De la Soustraction.

La soustraction (*) *est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci est la soustraction par écrit. Et la définition plus exacte consiste à dire: La soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand.

L'auteur dit: *Elle* (*se fait*) *de deux manières*: Ceci est de nouveau une division et un classement de (ce qui est compris dans) la soustraction.

L'auteur dit: *Dans la première manière il faut poser* (*etc.*) Cette espèce est le genre de soustraction le plus facile; c'est le cas où, dans chaque rang du nombre que l'on retranche, il se trouve un (chiffre) plus petit que le (chiffre correspondant) dans chaque rang du (nombre) dont on retranche; et l'opération est évidente d'après ce que l'auteur a dit. En voici un exemple. Si l'on vous dit: retranchez cinq cent trente deux de neuf cent soixante quatorze, alors posez cela sur deux lignes de la même manière comme dans l'addition. C'est à dire que les unités du (nombre) retranché soient sous les unités du (nombre) dont on retranche, et pareillement les
fin de f. 9. r. dizaines, les centaines, et ce | qui vient après celles-ci, etc.

f. 58 v. L'opération, d'après | ce que l'auteur a dit, est évidente. Par exemple, si l'on vous dit: divisez vingt quatre carrés moins huit choses par quatre choses, alors posez cela ainsi: (**)

Q		C
24	moins	8
C		
4		

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique par le diviseur. Il résultera six choses. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par le « moins ». Il en résultera deux en nombre. Reliez cela par la particule « moins ». aux choses. Le résultat de la division sera: six choses moins deux en nombre, ainsi:

C		N
6	moins	2

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Glose. Le plus convenable est de dire que la soustraction est l'action de retrancher un nombre plus petit d'un nombre plus grand, et son utilité consiste à faire connaître le reste. Alghazzî et d'autres ont soulevé des objections contre l'auteur au sujet de sa définition.

(**) Voir, pour la manière dont la notation de l'auteur arabe est reproduite, la note au bas de la page 420 du Vol. XII (année 1859) des *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* J'ajoute que dans le ms. sur lequel a été faite la présente traduction, le signe de la " chose ,, a été réduit aux trois points de la lettre *chîn*, et que les nombres simples y sont aussi pourvus d'un signe superposé. Ce signe est le *dâl*, lettre initiale du mot *dirhem* dont les mathématiciens arabes se servent souvent dans le sens d'unité. Je rends ici ce *dâl* par un N (initiale du mot nombre).

Et si l'on vous dit: divisez quarante huit cubes moins dix-huit carrés, par trois choses, alors posez cela ainsi: (*)

K Q
48 moins 18

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique. Vous aurez pour résultat seize carrés. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par le « moins ». Il en résultera six choses. Reliez cela par la particule « moins » aux carrés. Le résultat sera seize carrés moins six choses, ainsi:

Q C
16 moins 6

Conformez-vous (pour d'autres cas semblables) au sens de cette (règle).

L'auteur dit: *Une espèce inférieure ne peut pas se diviser par une espèce supérieure*, c'est à dire à cause de l'impossibilité d'assigner (un résultat). Comme, par exemple, si l'on vous dit: quatre en nombre (divisé) par deux choses, ou neuf cubes (**) (divisés) par trois carrés.

L'auteur dit: *Et l'on ne divise pas non plus par une expression qui renferme un « moins »*. C'est à dire : et pareillement on ne divise pas par une expression qui renferme un « moins » à cause de l'impossibilité qui a lieu en ce (cas).

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cet objet. Et nous prions notre Seigneur qu'il rende cela profitable, comme il a rendu profitable (l'ouvrage qui a servi de) base au (présent travail). Il est bienfaisant et généreux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre seigneur Mohammed , sa famille et ses compagnons; que le salut de Dieu soit répandu sur eux avec profusion. Louange à Dieu, maître de l'univers.

Ceci fut écrit par le pauvre qui a besoin de son Seigneur le riche, Abdallah Soûlât Almozâtî, pour son propre usage, et pour l'usage de qui il plaira à Dieu, après lui. Cette copie fut faite sur un exemplaire difficile à lire.

(*) Je pense que c'est par un oubli du copiste que le ms. omet de poser aussi les « trois choses », en notation, au dessous des « quarante huit cubes moins dix huit carrés » figurés en notations.

(**) Le mot « cubes » paraît être une erreur du copiste, au lieu de « choses ».

Manuscrit coté 952 du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Volume in 4.° de 115 feuillets en papier dont les quatre premiers et les trois derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 108 autres feuillets sont numérotés avec les nombres 1 à 108, écrits à l'encre au moyen des chiffres indiens des Arabes orientaux, et, en outre (sauf le premier feuillet) avec les mêmes nombres écrits à l'encre au moyen des chiffres européens modernes.

Je pense que l'on peut attribuer à ces feuillets numérotés, à en juger d'après la teinte du papier et de l'encre, un âge de cinq à six cents ans, en exceptant les feuillets numérotés 9, 88 et 98 à 108, qui ont évidemment été ajoutés plus tard pour remplacer d'anciens feuillets perdus. La copie paraît avoir été faite en Égypte d'où le manuscrit a été apporté en France par M. Delaporte, lors de l'expédition d'Egypte.

Les 108 feuillets numérotés contiennent le texte d'un traité d'algèbre, composé par Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, et dédié au vizir Fakhr Almoulq qui mourut le 3 Septembre 1016 de notre ère.

Une analyse très-étendue de ce traité d'algèbre a été donnée dans l'ouvrage intitulé : *Extrait du Fakhrî*, par F. Woepcke. Paris, 1853.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 34 et suivantes de la présente traduction se rapportent à la numération écrite à l'encre.)

---

f. 1 v. Au nom de Dieu clément et miséricordieux !

Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, le calculateur, que Dieu le Très-Haut soit, miséricordieux envers lui, dit:

J'ai trouvé que le calcul a pour objet la détermination des inconnues au moyen des connues dans toutes ses espèces, et j'ai observé que la plus claire des règles, et le plus évident des moyens pour cet effet est l'art de l'algèbre, à cause de sa puissance et de l'universalité avec laquelle il s'étend sur tous les problèmes du calcul, suivant leur diversité.

J'ai vu que les ouvrages composés sur cet art ne contenaient pas (complétement) ce dont on a besoin en fait de la connaissance de ses éléments; qu'ils étaient insuffisants par rapport aux théories sur lesquelles on s'appuie dans l'étude de ses branches spéciales; et que leurs auteurs avaient négligé d'expliquer les théorèmes de cet art qui sont le chemin du plus haut degré (de savoir algébrique) et le moyen de parvenir à la perfection.

Ensuite j'ai fait dans cet art de belles découvertes, dont je n'ai vu chez aucun d'eux une mention, et j'ai éclairci des difficultés dont je n'ai trouvé dans leurs ouvrages ni l'exposé, ni l'explication.

Or, après avoir acquis cet avantage, et après avoir éprouvé le besoin de suppléer à ce defaut, je ne pus pas m'empècher de composer un ouvrage contenant et renfermant ces (perfectionnements), et dans lequel je donnasse une explication faite

avec choix des éléments de (l'algèbre), exemple de l'impureté de la redondance et de la souillure de la verbosité.

Mais je fus éloigné de l'exécution de) ce (projet) par les obstacles qu'y opposaient la corruption du temps, les calamités de périodes remplies de désastres et l'état général de crainte, de violence et d'oppression où se trouvaient les hommes, jusqu'à ce que Dieu, qu'il soit béni et exalté, les secourût par notre maître, le vizir, le seigneur illustre, le parfait dans le gouvernement, le vizir des vizirs, revêtu des deux autorités, Aboû Ghâlib, (*) l'affranchi du commandeur des croyants, dont Dieu prolonge l'existence! Dieu rendit les hommes heureux par l'excellence de son administration, et leur accorda, pendant la durée bienheureuse de ses jours, au plus haut degré tout ce qu'ils désiraient en fait de justice, de sécurité, d'abondance et de bien. Il arracha le monde, par son gouvernement, au vice et aux hommes vicieux, et le rendit resplendissant par la sérénité de son regard, et par la manière dont il fit revivre les traces effacées de la science. Dieu fit de lui un modèle de toutes les vertus, de sorte qu'on est guidé par sa direction et qu'on demande à être éclairé | par sa lumière. f. 2 r.

. . . Nous faisons cela en vertu de ce que j'ai expliqué. Car, si vous multipliez un nombre quelconque par le nombre suivant, et si vous multipliez ensuite l'un de deux autres nombres se trouvant de part et d'autre des deux (premiers) par celui qui lui correspond, le premier résultat dépasse le second de la quantité du produit de la différence entre l'un des deux extrêmes et l'un des deux moyens | par la différence entre le même extrême et l'autre moyen. (**) Comprenez cela. f. 22 r.

Si l'on vous dit: prenez depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque nombre par le suivant, un par deux, deux par trois, trois par quatre, et ainsi de suite; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante cinq. Prenez deux tiers du dix moins deux tiers d'un dirhem, et multipliez cela par cinquante cinq. Ce sera trois cent trente. (***)

Si l'on dit: combien (obtenez vous en allant) depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition d'élever chacun des nombres au cube et d'additionner les résultats; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante f. 22 v. lig. 5.

(*) On lit dans les *Vies des hommes illustres* d'Jbn Khallican: Aboû Ghâlib Mohammed Ben Khalaf, surnommé Fakhr Almoulq, vizir de Behâ Aldaoulah fils d'Adhad Aldaoulah Jbn Bouwaïh . . . . C'est pour lui que Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan, le calculateur, Alqarkhî, composa le livre (intitulé) Alfakhrî sur l'algèbre, et le livre (intitulé) Le (traité) suffisant sur le calcul. (Comparez la traduction anglaise de M. de Slane, T. III., p. 283; et Abulfedae *Annales muslemici*, ed. Reiske et Adler, T. III, p. 6 et 7.)

(**) C'est à dire $\{(a+1)+n\}.(a-n)=(a+1)a-n(n+1)$.

(***) $1.2+2.3+3.4+\ldots+9.10=(1+2+3+\ldots+10)(\frac{2}{3}.10-\frac{2}{3})=55(\frac{2}{3}.10-\frac{2}{3}) = 330.$

cinq. Multipliez cela par lui-même. Ce sera trois mille vingt cinq, et telle est la réponse. (*)

Démonstration numérique de ce (*théorème*). Il a été dit déjà précédemment que, si vous divisez un nombre quelconque en deux parties, si l'on multiplie (ensuite) chacune des deux parties par elle-même, et si l'on multiplie l'une des deux parties par l'autre (prise) deux fois, cela (fait ensemble) le carré de ce nombre. (**)

Donc, si vous divisez cinquante cinq en deux parties, dix et quarante cinq, le produit du dix par lui-même, et le produit du dix par le quarante cinq (pris) deux fois, ce dont la somme est mille, ensemble avec quarante cinq (multiplié) par lui-même, est égal au produit de cinquante cinq par cinquante cinq. Si donc nous rejetons le mille, qui est le cube du dix, et qui provient de la multiplication de dix par dix et de dix par quarante cinq (pris) deux fois, de trois mille vingt cinq, il reste quarante cinq (multiplié) par lui-même égal à deux mille vingt cinq. (***)

Si maintenant vous divisez le (quarante cinq) en deux parties, neuf et trente six, alors neuf fois neuf et neuf (****) fois trente six (pris) deux fois est sept cent vingt neuf, ce qui est le cube du neuf. Donc, si vous rejetez cela de deux mille vingt cinq, il reste mille deux cent quatre-vingt seize, ce qui est égal au produit
f. 23 r. de trente six par | trente six. (*****)

Si vous divisez ensuite ce (dernier nombre) en deux parties, huit et vingt huit, le produit du huit par lui-même et par vingt huit (pris) deux fois est cinq cent douze, ce qui est le cube du huit. Et si vous rejetez cela du mille deux cent quatre-vingt seize (******), il reste sept cent quatre-vingt quatre, ce qui est (le résultat) de la multiplication de vingt huit par lui-même. (*******)

(En continuant) d'une manière semblable à ce procédé on retranche du (nombre trois mille vingt cinq successivement) le cube de chaque nombre jusqu'à l'unité, et là on s'arrête.

Cela montre que, si vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis l'unité jusqu'au nombre que vous voudrez, et si vous la multipliez ensuite par elle-même, (le produit) est égal aux cubes des nombres qui sont précisément les nombres additionnés.

(*) $1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3=(1+2+3+\ldots+10)^2=55^2=3025$

(**) $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$.

(***) $55^2=(10+45)^2=10^2+2.10.45+45^2=1000+45^2=10^3+45^2$.

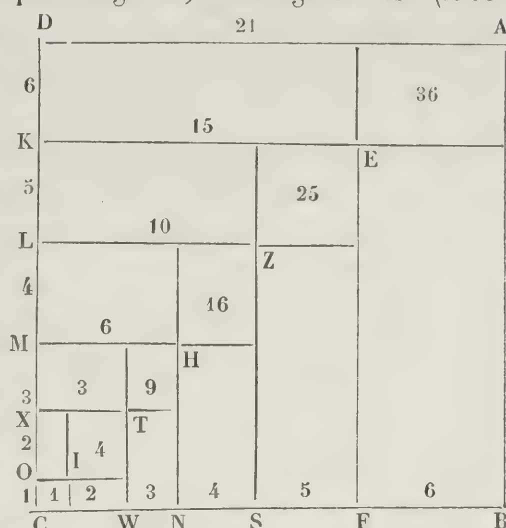
(****) Le texte manuscrit porte " quatre-vingt dix ,, au lieu de neuf, évidemment par suite d'une erreur de copiste.

(*****) $45^2=(9+36)^2=9^2+2.9.36+36^2=729+36^2=9^3+36^2$.

(******) Le manuscrit porte " quatre-vingt six ,, ce qui est évidemment une faute de copie.

(*******) $36^2=(8+28)^2=8^2+2.8.28+28^2=502+28^2=8^3+28^2$.

Démonstration de ce (théorème) au moyen de la figure. La surface ABCD est (le résultat) de la multiplication de vingt un par vingt un; et vingt un est (le résultat) de (la sommation des nombres naturels depuis) l'unité jusqu'à six. Nous disons donc que toute la surface ABCD est égale à l'ensemble des cubes des nombres dont l'addition produit vingt un, à savoir (des nombres) depuis un jusqu'à six.



Démonstration. Nous posons la ligne DK (égale à) [six, et la ligne KL égale à] (*) cinq, LM (égale à) quatre, MX (égale à) trois, XO (égale à) deux, et OC (égale à) un. De la même manière nous divisons la ligne BC, de sorte que BF égal à DK, FS égal à KL, SN égal à LM; et d'une manière analogue nous déterminons les autres parties.

Cela posé, nous disons que les surfaces DE , EA et EB sont (égales au) cube de six, parce que la surface EA est six fois six, tandis que la ligne KE est quinze, et la ligne EF pareillement, de sorte qu'il résulte des deux surfaces EB et ED cent quatre-vingt. Donc, si vous y ajoutez la surface EA, qui est trente six, ce sera deux cent seize, ce qui est le cube de six.

Il en est ainsi seulement, parce que, si d'un nombre quelconque vous retranchez l'unité, que vous multipliez le résultat par le carré du | premier nombre, et que f. 23. *v.* vous ajoutez à cela le carré (de ce nombre), il résulte le cube (du même nombre) (**). Cela est évident. Et si vous prenez le nombre que vous voudrez (de nombres) à partir de l'unité, suivant l'ordre naturel, et que vous divisez ensuite la somme par le nombre qui suit le (dernier des nombres additionnés), il résulte la moitié du nombre jusqu'auquel vous avez pris (la somme) (***). Par exemple, vous prenez (la somme) depuis un jusqu'à huit, c'est trente six; vous divisez cela par neuf; il résulte quatre, ce qui est la moitié du huit.

Donc, si vous prenez (la somme) jusqu'au nombre que vous voudrez, suivant l'ordre naturel, que vous multipliez ce qui en provient par le (nombre) qui suit (****)

(*) Les mots renfermés entre crochets manquent dans le manuscrit, évidemment par suite d'une omission du copiste.

(**) $(a-1)a^2+a^2=a^3$.

(***) $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}=\frac{n}{2}$, ou $1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

(****) Le texte manuscrit porte " par la moitié de celui qui suit ,, ce qui est erroné. C'est probablement une faute de copie.

*

(pris) deux fois, et que vous joignez à ce qui résulte de cette opération le carré du nombre suivant que je viens de mentionner, alors le résultat est le cube du nombre suivant (*).

Et conformément à cette explication, les surfaces KZ, ZE et ZF sont le cube de la ligne KL; les surfaces LH, HZ et HS le cube de la ligne LM; les surfaces MT, TH et TN égales au cube de MX; et les surfaces XI, IT et IW égales au cube de XO; (enfin) la surface IC est le cube de OC. Il est maintenant évident que la surface CA est égale aux cubes des nombres depuis un jusqu'à six; et voici la
f. 23 *v.* forme de la figure (**).

lig. 13. Si l'on dit: combien (obtenez-vous en allant) depuis un jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque (nombre) impair par l'impair suivant, et chaque (nombre) pair par le pair suivant; alors la règle pour cela (est) que vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante cinq. Multipliez cela par deux tiers du dix moins un et deux tiers (quantité qui doit être re-
f. 24 *r.* tranchée) essentiellement et | invariablement. Ce sera deux cent soixante quinze. Ajoutez-y constamment une unité, ce qui fait deux cent soixante seize; et telle est la réponse (***).

La démonstration de ce (théorême) est évidente, parce que etc.

. . . . Après cela il faut que vous divisiez le seize par le deux, afin qu'il résulte le cube cherché. Or, vous avez déjà divisé le trente deux par deux, puis (encore) par deux, afin qu'il résulte le cube; et de cette manière vous l'avez divisé, comme si vous l'aviez divisé par le carré de deux.

Fin de l'ouvrage (intitulé) Le Fakhrî (****) qui comprend les éléments de l'algèbre et les éléments des problèmes.

Louanges sans bornes et sans fin à Celui qui donne l'intelligence. Que sa bénédiction soit sur notre seigneur, Mohammed, le prophète, et sur sa famille et ses compagnons, les purs, les saints.

Ceci fut écrit et achevé par Sâliq.

f. 108 *v.* | Dans un autre exemplaire (l'auteur) a dit: J'ai exclu de mon présent ouvrage ce qui ne s'y rapporte pas. J'avais désiré y ajouter quelque chose en fait des particularités des figures, du cercle, et des testaments. Mais je ne l'ai pas fait, pour deux raisons, dont l'une est (mon) aversion pour la prolixité; la seconde (est) que

---

(*) $2.(1+2+3+\ldots+n)(n+1)+(n+1)^2=n(n+1)^2+(n+1)^2=(n+1)^3$.

(**) Dans le manuscrit la figure est placée à la fin de la démonstration.

(***) $(1.3+3.5+\ldots\ldots+7.9)+(2.4+4.6+\ldots+8.10)$

$$=(1+2+3+\ldots+10)(\tfrac{2}{3}10-1\tfrac{2}{3})+1=276.$$

(****) Il y a lieu de croire que l'auteur avait donné ce titre à son ouvrage en honneur du vizir Aboû Ghâlib, surnommé *Fakhr* Almoulq (" La gloire du gouvernement ") auquel il avait dedié ce traité.

j'ai (dejà) composé sur chacun de ces (objets) un ouvrage étendu, embrassant ses éléments, leurs théories exactes, et la solution des problèmes les plus subtils avec leur méthode. Je prie Dieu, le Très-Haut, qu'il m'assiste dans l'accomplissement des devoirs de l'obéissance envers lui, et qu'il facilite à toutes ses créatures ce qui les délivre de l'erreur. Je se supplie de répandre sa bénédiction sur le prophète, Mohammed, son élu parmi ses créatures, et sur sa famille, les purs.

Fin de l'ouvrage, à savoir du (livre) connu sous (le nom) du Fakhrî.

Ceci fut écrit par Sâliq, le pauvre. Fin.

SOPRA ALCUNE FORMOLE NEL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.

1°. Spesso accade nel calcolo delle differenze finite, che convenientemente profittando dell'analogia delle potenze con le differenze si possa giungere compendiosamente alla dimostrazione di alcune formole generali relative alle successive differenze, e che richiameremo con qualche esempio.

Supposto $y = f(x)$, e ponendo nello stesso tempo $\Delta x = \alpha$, avremo la funzione variata

$$f(x + \alpha) = y + \Delta y = (1 + \Delta)\, y = (1 + \Delta)\, f(x).$$

ove il secondo membro si è posto sotto la forma simbolica di un prodotto. Prendendo costante la differenza $\alpha = \Delta x$, e sostituendo successivamente $x + \alpha$ invece della x, avremo le successive funzioni variate sotto forma simbolica

$$f(x + 2\alpha) = (1 + \Delta)^2 f(x), \quad f(x + 3\alpha) = (1 + \Delta)^3 f(x)$$

ed in generale

$$f(x + n\alpha) = (1 + \Delta)^n f(x)$$

purchè s'intenda, che alle potenze del binomio simbolico $1 + \Delta$, si sostituiscano ordini somiglianti di differenze finite sopra $f(x)$. Ciò posto prendendo α infinitesimo, ed n infinito, il prodotto, $n\alpha$ convergerà verso una quantità finita h, per cui sia

$$\lim.\; n\,\alpha = h,$$

ed avremo la formola

$$f(x + h) = \lim.\; (1 + \Delta)^n f(x).$$

nella quale il secondo membro rappresenterà il tipo di una serie, che sotto i limiti della convergenza, porgerà anche il valor del primo membro: il numero n da intero,

e positivo si potrà per analogia estendere ad intero e negativo, ed anche a un numero infinitamente grande positivo, o negativo di forma irrazionale. Sia ora ε un numero infinitamente piccolo ed e la base dei logaritmi iperbolici abbiamo come è noto

$$\lim (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$$

Di più nella ricerca della derivata

$$\lim . \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim . \frac{\Delta f(x)}{\alpha} = \mathrm{D}. f(x)$$

quindi fra i simboli Δ delle differenze, ed il simbolo D della derivazione si potrebbe scrivere

$$\lim . \frac{\Delta}{\alpha} = \mathrm{D},\ \lim . \frac{\Delta^2}{\alpha^2} = \mathrm{D}^2 \ \ldots \ \lim . \frac{\Delta^n}{\alpha^n} = \mathrm{D}^n$$

Per conoscere adunque il limite verso il quale converge il valore di $f(x + h)$, poniamolo di più sotto la forma

$$f(x + h) = \lim . (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta} . n\alpha \frac{\Delta}{\alpha}} f(x)$$

Mà il simbolo Δ viene riferito ad un'infinitesimo, per cui sostituendo

$$\lim (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e,\ \lim n\alpha = h,\ \lim . \frac{\Delta}{\alpha} = \mathrm{D}$$

avremo la nuova formola simbolica generale

$$f(x + h) = e^{h\mathrm{D}} f(x).$$

ove avendosi generalmente

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

si ottiene pure

$$f(x + h) = (1 + h\,\mathrm{D} + \frac{h^2\,\mathrm{D}^2}{2} + \frac{h^3\,\mathrm{D}^3}{2.3} + \ldots) f(x)$$

ossia

$$f(x + h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \ldots$$

e che come ognun vede è lo sviluppo in serie dato dalla formola di Taylor.

Nel calcolo delle differenze finite, denotando con $\mathrm{F}(r)$ una funzione razionale di r e con h l' incremento della variabile indipendente x, è nota la formola generale simbolica

$$F(\Delta)\, e^{rx} f(x) = e^{rx} F\left[e^{rh}(1+\Delta) - 1\right] f(x).$$

Sostituendo in $F(\Delta)$, $\frac{\Delta}{h}$ invece di Δ, e per $h = 0$ sarà

$$\lim.\frac{\Delta}{h} = D, \quad \lim.\frac{e^{rh}-1}{h} = r$$

e la precedente formola diviene

$$F(D)\, e^{rx} f(x) = e^{rx} F(r + D) f(x)$$

la quale serve per l'operazioni della derivazione: Ambedue le formole ed altre somiglianti sono molto utili nell'integrazione dell'Equazioni lineari.

2.° Siano $u, v, w \ldots$ altrettante funzioni di una sola variabile x, avremo per la differenza del prodotto delle medesime

$$\Delta . u\, v\, w \ldots = (u + \Delta u)(v + \Delta v)(w + \Delta w) \ldots - uvw.$$

Se si mantenga con Δ il simbolo di differenza rispetto ad, u e con Δ', Δ'' i simboli di differenza rispetto a v, e w. potremo scrivere

$$\Delta . u\, v\, w \ldots = (u + \Delta v)(v + \Delta' v)(w + \Delta'' w.) - u\, v\, w \ldots$$

od anche sotto la forma simbolica

$$\Delta . u\, v\, w .. = \left[(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'')(\ldots\ldots) - 1\right] u\, v\, w.$$

Il numero delle caratteristiche Δ, Δ', $\Delta'' \ldots$ corrisponde al numero delle variabili $u, v, w \ldots$ Poniamo per brevità

$$1 + \Delta = \square, \; 1 + \Delta' = \square', \; 1 + \Delta'' = \square'',$$

si avrà $$\Delta . u\, v\, w \ldots = (\square\, \square' \square'' \ldots - 1)\, u\, v\, w ..,$$

Da una successiva differenza si avrà simbolicamente

$$\Delta^2 . u\, v\, w \ldots = (\square\, \square' \square'' \ldots - 1)\, \Delta . u\, v\, w \ldots$$

ovvero $$\Delta^2 . u\, v\, w \ldots = (\square\, \square' \square'' \ldots - 1)^2\, u\, v\, w \ldots$$

ed in generale per una differenza del grado n

$$\Delta^n . u\, v\, w \ldots = (\square\, \square' \square'' \ldots - 1)^n\, u\, v\, w \ldots$$

Per l'ulteriore sviluppo simbolico di questa formola, formiamo con le caratteristiche Δ, Δ', $\Delta'' \ldots$ il polinomio di grado m, e corrispondente al numero delle funzioni, cioè

$$(z + \Delta)(z + \Delta')(z + \Delta'' \ldots) \ldots (z + \Delta^{(m-1)})$$

è evidente che il suo valore per $z = 1$ si ridurrà a quello del prodotto $\square\, \square' \square'' \ldots$ Dalla composizione dell'equazioni avremo un polinomio della forme

$$z^m + A\,z^{m-1} + B\,z^{m-2} + \ldots + S\,z + T$$

ed ove come è noto sarà

$$A = \Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots, \quad B = \Delta\Delta' + \Delta\Delta'' + \Delta'\Delta'' + \ldots$$
$$C = \Delta\Delta'\,\Delta'' + \Delta'\Delta''\Delta''' + \ldots \qquad T = \Delta\,\Delta'\,\Delta'' \ldots \Delta^{(m-1)}$$

Fatto pertanto $z = 1$, e ritenute le lettere A, B, C... per indicare le differenti funzioni delle caratteristiche Δ, Δ', Δ'', . . . avremo per la differenza n^{esima} di un prodotto di m funzioni $u, v, w\ldots$ la formola generale

$$\Delta^n.\ u\,v\,w\ldots = (A + B + C + \ldots + S + T)^n\, u\,v\,w\ldots$$

il che tutto si ridurrà a formare la potenza di un polinomio. Volendo dalla differenza dell'ordine n passare alla derivata dello stesso ordine, siano D, D', D'' le caratteristiche di derivazione per le rispettive funzioni $u, v, w\ldots$, e dividendo la precedente formola per la potenza h^n, ed osservando che ai limiti

$$\lim.\frac{\Delta^n}{h^n} = D^n,\ \lim.\frac{A}{h} = D + D' + D''\ \text{ec.}\quad \lim.\frac{B}{h} = 0,\ \lim.\frac{C}{h} = 0\ldots\ \lim.\frac{T}{h} = 0$$

avremo la formola corrispondente per la derivata dell'ordine n^{esimo} di un prodotto

$$D^n.\ u\,v\,w\ldots = (D + D' + D''\ldots)^n\, u\,v\,w\ldots$$

In questa guisa tanto per la successiva differenza quanto per la successiva derivazione di un prodotto avremmo sempre a formare la potenza di un polinomio. Pongo fine a questo breve articolo col notare che nel calcolo delle differenze finite le formole

$$f'(x) = \lim.\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f''(x) = \lim.\frac{f(x+2h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

porgono nelle applicazioni il valore di una funzione derivata di un determinato ordine indipendentemente dalla derivata di ordine inferiore

Roma, 25 Ottobre 1863. Barnaba Tortolini.



MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION SOUS FORME FINIE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE ET A COEFFICIENTS RATIONNELS.

PAR LE P. PEPIN, S. J.



On trouvera dans ce mémoire une solution générale du problème suivant:
« Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + Q.\frac{dz}{dx} + Rz = 0, \qquad (1)$$

où Q et R désignent deux fonctions rationnelles de la variable x, décider s'il existe une integrale de la forme

$$z = \text{une fonction finie explicite de } x,$$

c. à *.d.* une fonction que l'on puisse écrire avec un nombre limité de signes algébriques, exponentiels, logarithmiques, et de signes $\int$ d'intégration indéfinie relative à la variable x. »

Monsieur Liouville est le premier qui se soit occupé de ce genre de recherches. Dans deux mémoires qui font partie du recueil *des savants étrangers*, il a donné une méthode pour déterminer les intégrales algébriques des différentielles algébriques, et les intégrales rationnelles des équations différentielles linéaires à coéfficients rationnels. Il a aussi résolu quelques cas particuliers du problème ci-dessus énoncé, et les beaux résultats qu'il en a déduits soit relativement aux intégrales Elliptiques considérées comme fonctions du module, soit à la recherche des cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati, montrent assez que la solution générale de ce problème ne peut être ni sans intérêt, ni sans importance.

Quant à la méthode suivie dans ce mémoire, on pourra s'en former une idée en lisant l'esquisse rapide que voici.

Après avoir ramené l'équation proposée à la forme

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = P.y. \qquad (2)$$

en posant

$$z = y.e^{-\frac{1}{2}\int Q\,dx}, \qquad \left(\tfrac{1}{4}Q^2 + \tfrac{1}{2}\frac{dQ}{dx} - R\right) = P,$$

je rappelle un théorème fondamental dû à M. Liouville.

« Si l'intégrale complète de l'équation (2) n'est pas algébrique, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = P \qquad (3),$$

en prenant pour t, une fonction rationnelle de x, ou une racine d'une équation algébrique du second degré à coefficients rationnels. »

Je démontre ensuite que, si l'intégrale complète de l'équation (2) est algébrique la valeur correspondante de la fonction t ou $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, qui vérifie l'équation (3) sera déterminée par une équation algébrique du premier, du second, ou du quatrième degré, à coefficients rationnels.

La démonstration de ce théorème découle d'une propriété remarquable des équations irréductibles dont les racines satisfont à l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P.y$. Non seulement leurs racines sont des fonctions rationnelles de l'une quelconque d'entre elles, mais encore celles qui se déduisent l'une de l'autre par une même opération rationnelle forment une série récurrente périodique dont l'échelle de relation est $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 1$, ρ désignant une racine imaginaire de l'unité. On déduit de là que, si dans l'équation irréductible $f(y) = 0$ dont les racines satisfont à l'équation (2), on désigne par μ le nombre des racines qui se déduisent l'une de l'autre par une même opération rationnelle θ, on pourra obtenir une seconde équation $F(y) = 0$ de même degré, dont les racines satisferont aussi à l'équation (2), et dans laquelle les exposants de y seront tous multiples du nombre μ. Nous supposerons que l'équation $F(y) = 0$ est de degré minimum parmi toutes les équations irréductibles dont les racines satisfont à l'équation (2), et que, de plus, le plus grand commun diviseur μ des exposants de y a la plus grande valeur possible. Dès lors, si dans cette équation on désigne par $\theta(y)$ une racine qui n'ait pas avec y un rapport constant, on aura

$$\theta(y) = a.y + b.\psi(y),$$

$\psi(y)$ désignant un polynôme dont les coéfficients sont des fonctions rationnelles de x et dans lequel tous les exposants de y sont de la forme $(i\mu - 1)$; a et b désignent deux constantes dont la première a vérifie l'équation

$$a = \frac{\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)};$$

ρ désigne une racine imaginaire quelconque de l'équation $x^\mu = 1$, β et β_1 sont deux racines imaginaires de l'unité qui vérifient les deux équations

$$\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \theta(y) - y; \qquad (\theta\rho)^2(y) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \cdot (\theta\rho)(y) - y.$$

De cette propriété de l'équation $\mathrm{F}(y) = 0$, il résulte que si l'on désigne par $\theta(y)$ une racine quelconque de cette équation, et par m le plus petit nombre entier qui vérifie la formule $\theta^m(y) = y$, le nombre m ne pourra avoir avec μ aucun facteur commun autre que 2 ou 4, sans être un diviseur de μ. De ce théorème et des propriétés des racines primitives d'une équation binôme on conclut que si le nombre m n'est pas égal à l'un des nombres 2, 3, 4, ou 6, il doit être nécessairement un diviseur du nombre μ.

Au moyen de ces théorèmes nous démontrerons que, si le plus grand commun diviseur μ des exposants de y dans $\mathrm{F}(y)$ n'est pas égal à l'un des trois nombres 6, 8, ou 10, la fonction t ou $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ sera racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels. Si μ est égal à 8 ou à 10, la fonction t est encore déterminée par une équation du second degré. Mais si μ est égal à 6, et que l'équation $\mathrm{F}(y) = 0$ ne se réduise pas à une équation binôme, cette équation sera du douzième ou du vingt-quatrième degré, et la fonction t sera déterminée par une équation algébrique du second ou du quatrième degré. En réunissant ces divers théorèmes nous concluons que dans tous les cas, si l'équation (2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{P}y$ admet une intégrale qui soit une fonction finie explicite de x, dans le sens expliqué plus haut, l'équation (3) $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + t^2 = \mathrm{P}$ sera vérifiée par une valeur de t rationnelle, ou par les racines d'une équation du second ou du quatrième degré.

Le problème proposé se trouve ainsi ramené au suivant:

« Décider si l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + t^2 = \mathrm{P}$, où P représente une fonction rationnelle de x, peut ou ne peut pas être vérifiée par une valeur de t rationelle, ou qui soit déterminée par une équation du second ou du quatrième degré. »

Comme, pour chaque valeur de P, on pourra aisément résoudre ce dernier problème par la méthode des coéfficients indéterminés, on peut considérer le problème comme suffisamment résolu. Néanmoins, si la théorie exposée dans ce mémoire mérite l'approbation des savants, je me propose de la compléter dans un second mémoire, où je traiterai directement ce dernier problème.

---

*

Considèrons l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + Q \frac{dz}{dx} + R z = 0 \qquad (1).$$

Pour en faire disparaitre le second terme, nous poserons

$$z = y . e^{-\frac{1}{2}\int Q dx}$$

y sera déterminé par l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = P . y \qquad (2)$$

dans laquelle
$$P = \tfrac{1}{4} Q^2 + \tfrac{1}{2} \frac{dQ}{dx} - R.$$

Ainsi, pour que l'intégrale z de la première équation soit une fonction finie explicite de x, il faut et il suffit que l'intégrale y de l'équation (2) soit une fonction finie explicite de x.

I.

Considérons d'abord le cas où l'intégrale générale de l'équation (2) n'est pas algébrique. M. Liouville (Journal des Mathématiques... t. IV. p. 435) a démontre les théorèmes suivants:

1.er *Théorème.* « Si on peut satisfaire à l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P . y$, en prenant pour y une fonction finie explicite de x, on pourra toujours la vérifier par une valeur de la forme $y = e^{\int t dx}$, t désignant une fonction algébrique de x, qui satisfait à l'équation (3) $\frac{dt}{dx} + t^2 = P$. »

2. *Théorème.* « Si l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$ n'admet pas d'intégrale algébrique, l'équation irréductible et à coéfficients rationnels $\omega(x, t) = 0$ qui détermine l'intégrale algébrique de l'équation (3) $\frac{dt}{dx} + t^2 = P$, ne peut pas être d'un degré supérieur au second. » - (V. le mémoire cité. t. IV. p. 446).

3. *Théorème.* « Si l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$ admet une intégrale algébrique, sans que l'intégrale complète soit elle-même algébrique, l'équation (3) admettra toujours une intégrale rationnelle. »

Démonstration. Soit $f(x, y) = 0$, l'équation algébrique irréductible et à coéfficients rationnels qui détermine l'intégrale y de l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P y$. Si on substitue

dans cette dernière équation la valeur de $\frac{d^2 y}{d x^2}$ déduite de l'équation $f(x, y) = 0$, on a

$$-\frac{f''_{x^2} f'^{2}_y - 2 f'_x f'_y \cdot f''_{xy} + f'^{2}_x f''_{y^2}}{f'^{3}_y} - \mathrm{P}\, y = 0$$

Le premier membre de cette équation est une fonction rationelle de x et de y. Comme elle est vérifiée par une racine y de l'équation irréductible $f(x, y) = 0$, elle doit l'être aussi par toutes les autres. Les racines de cette équation seront toutes égales au produit de l'une d'entre elle multipliée par une constante : car si deux de ces racines y_1, y_2 n'avaient pas entre elles un rapport constant, comme ces deux racines sont des solutions particulières de l'équation (2), l'intégrale générale serait

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 ,$$

et par conséquent cette intégrale serait algébrique contrairement à l'hypothèse. Ainsi en désignant par y une racine de l'équation $f(x, y) = 0$, toutes les racines de cette équation seront de la forme cy, c désignant une constante. La fonction

$$t = \frac{1}{y} \cdot \frac{d y}{d x}$$

sera donc une fonction symétrique des racines de l'équation $f(x, y) = 0$, *c. à .d.* elle sera une fonction rationnelle de x. C. Q. F. D.

En réunissant ces théorèmes nous pouvons conclure avec M. Liouville la première proposition enoncée d'abord:

« Si l'équation $\frac{d^2 y}{d x^2} = \mathrm{P} . y$ peut être satisfaite par une fonction finie explicite de x, et que son intégrale complète ne soit pas algébrique, on pourra toujours satisfaire à l'équation (3) en prenant pour t une fonction algébrique de x déterminée par une équation du premier ou du second degré à coéfficients fonctions rationnelles de x. »

II.

L'intégrale complète de l'équation $\frac{d^2 y}{d x^2} = \mathrm{P} y$ est algébrique.

Si une racine d'une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ satisfait à l'équation différentielle $\frac{d^2 y}{d x^2} = \mathrm{P} y$, on verra, comme au théorème 3.me que les autres racines satisfont aussi à la même équation. De plus l'équation $f(x, y) = 0$ appartient à la classe des fonctions abéliennes, *c. à .d.* que toutes ses racines s'expriment rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles. En effet; soit y_1 l'une des

racines de cette équation. Puisque y_1 est une intégrale particulière de l'équation (2) l'intégrale complète sera donnée par la formule

$$y = \mathrm{A}\, y_1 + \mathrm{B}.\, y_1 \int \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2} \qquad (a),$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Toutes les solutions de l'équation (2), et par conséquent toutes les racines de l'équation $f(x, y) = 0$ peuvent se déduire de cette formule en donnant aux constantes A et B des valeurs convenables. Le second membre de cette équation est, par hypothèse, une fonction algébrique de x. L'intégrale $\int \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2}$ est donc algébrique, et par conséquent elle peut s'exprimer rationnellement en fonction de x et de y_1. (V. Le mémoire de M. Liouville sur les intégrales dont la valeur est algébrique). On sait d'ailleurs que toute fonction rationnelle des racines d'une équation de degré n, peut être égalée à une fonction entière du degré $n - 1$ par rapport à cette racine. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

4.me *Théorème.*

« Si l'intégrale complète de l'équation (2) est algébrique et qu'on désigne par n le degré de l'équation irréductible $f(x, y) = 0$, dont l'une des racines y_1 satisfait à cette équation (2) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{P}y$;

1° Toutes les racines de l'équation $f(x, y) = 0$ vérifieront l'équation (2), et se déduiront de la formule

$$y = \mathrm{A}.\, y_1 + \mathrm{B}\, y_1 \int \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2} \qquad (a)$$

en attribuant des valeurs convenables aux constantes A et B.

2° On aura

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2} = \alpha + \beta\, y_1 + \gamma\, y_1^2 + \ldots + \lambda\, y_1^{n-1}$$

α, β, γ ... λ, désignant des fonctions rationnelles de x. »

Or soit

$$y_2 = a\, y_1 + b.\, y_1 (\alpha + \beta\, y_1 + \gamma\, y_1^2 + \ldots + \lambda\, y_1^{n-1}) = \theta\,(y_1)$$

une seconde racine de l'équation $f(x, y) = 0$. L'équation $f[x, \theta\,(y_1)] = 0$ aura une racine commune y_1 avec l'équation irréductible $f(x, y) = 0$; elle sera donc vérifiée par toutes les racines de cette dernière équation. Or $\theta\,(y_1)$ est une racine de cette équation, $\theta.\theta\,(y_1)$ le sera donc aussi, et généralement si l'on désigne par $\theta^m(y)$ le résultat obtenu en effectuant sur la fonction $\theta^{m-1}(y)$ l'opération rationnelle indiquée

par θ, tous les termes de la suite

$$y_1,\ \theta(y_1),\ \theta^2(y_1),\ \theta^3(y_1),\ \ldots\ \theta^m(y_1)\ \ldots$$

seront des racines de l'équation $f(x, y) = 0$, et satisferont à l'équation différentielle (2). De plus le nombre μ des termes distincts de cette suite, *c.* à *.d.* le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^\mu(y) = y$, est un diviseur du nombre n qui exprime le degré par rapport à y de l'équation $f(x, y) = 0$.

Ce sont là des propriétés bien connues des équations Abéliennes, et dont nous ferons un fréquent usage dans tout ce qui va suivre. De plus, comme il y a évidemment une limite inférieure pour le degré des équations irréductibles dont les racines satisfont à l'équation différentielle proposée, nous supposerons que le degré n de l'équation $f(x, y) = 0$ ou $f(y) = 0$ est ce degré minimum.

5.me *Théorème.*

« Soit $f(y) = 0$ une équation irréductible dont les racines satisfont à l'équation (2), soient y_1, $\theta(y_1)$ deux racines de cette équation dont le rapport ne soit pas constant, et soit μ le nombre des termes distincts de la suite y_1, $\theta(y_1)$, $\theta^2(y_1)\ldots$, les termes de cette suite formeront une série récurrente périodique dont l'échelle de relation est $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 1$, ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$. »

Démonstration. On a

$$\theta(y_1) = a.\ y_1 + b.\ y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\,x}{y_1^2}$$

d'où

$$\mathrm{D}_x\left(\frac{\theta\,(y_1)}{y_1}\right) - \frac{b}{y_1^2} = 0.$$

Le premier membre de cette dernière équation est une fonction rationnelle de x et de y_1; comme elle est vérifiée par une racine y_1 de l'équation irréductible $f(y) = 0$, elle sera aussi vérifiée par toutes les autres racines, par ex. par $\theta(y_1)$; on aura donc

$$\mathrm{D}_x\left(\frac{\theta^2(y_1)}{\theta\,(y_1)}\right) - \frac{b}{\overline{\theta\,(y_1)}^2} = 0.$$

En combinant cette équation avec la précédente poür éliminer la constante b, en effectuant les différentations indiquées et réduisant, nous trouverons

$$[y_1 + \theta^2\,(y_1)]\ \mathrm{d}\ \theta\,(y_1) = \theta(y_1)\ \mathrm{d}\,[y_1 + \theta^2(y_1)]$$

d'où
$$\mathrm{Log}\,[y_1 + \theta^2(y_1)] = \mathrm{Log}\,\theta(y_1) + \mathrm{Log}.\ h;$$

h désignant une constante. On aura donc

$$y_1 + \theta^2(y_1) = h\,\theta(y_1) \quad \text{ou} \quad \theta^2(y_1) = h\,\theta(y_1) - y_1.$$

Cette dernière équation, étant vérifiée par la racine y_1 de l'équation irréductible $f(y) = 0$, le sera encore par toutes les autres; car $\theta^2(y_1)$ et $\theta(y_1)$ désignant deux fonctions rationnelles de x et de y_1. On a donc généralement

$$\theta^m(y) = h\,\theta^{m-1}(y) - \theta^{m-2}(y) \qquad \text{(A)}.$$

Les termes de la suite y, $\theta(y)$, $\theta^2(y)$, $\theta^3(y)$.... forment donc une série récurrente dont l'échelle de relation est $h - 1$. Or si l'on désigne par ρ et $\frac{1}{\rho}$ les deux racines de l'équation $\rho^2 - \rho h + 1 = 0$, la solution générale de l'équation (A) sera

$$A\rho^m + B\rho^{-m}$$

A et B désignant deux quantités arbitraires indipèndantes de m. On aura donc

$$\theta^m(y) = A\rho^m + B\rho^{-m}$$

A et B étant déterminés par les deux équations

$$y = A + B \quad \theta(y) = A\rho + B\frac{1}{\rho}$$

d'où

$$A = \frac{\theta(y) - \frac{1}{\rho}y}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \qquad B = -\frac{\theta(y) - \rho y}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

On a donc, en posant pour abréger, $P_m = \dfrac{\rho^m + \frac{1}{\rho^m}}{\rho - \frac{1}{\rho}}$,

$$\theta^m(y) = P_m\,\theta(y) - P_{m-1}\,y. \qquad (4)$$

Si on fait $m = \mu$ dans cette équation, elle deviendra, eu égard à l'hypothèse $\theta^\mu(y) = y$,

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)y = \left(\rho^\mu - \frac{1}{\rho^\mu}\right)\theta(y) - \left(\rho^{\mu-1} - \frac{1}{\rho^{\mu-1}}\right)y.$$

Or l'on peut supposer que $\theta(y)$ ait été réduit au degré $n - 1$ par rapport à y, au moyen de l'équation $f(y) = 0$. De plus cette fonction doit être d'un degré supérieur au premier: car on a

$$\theta(y) = a\,y + b.\,y\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{y^2};$$

pour que $\theta(y)$ ne fût que du premier degré, il faudrait que l'intégrale $\int_x^x \frac{dx}{y^2}$ fût rationnelle, ce qui exigerait que y^2 fût rationnel contrairement à l'hypothèse.

L'équation précédente doit donc être identiquement nulle, ce qui donne

$$\rho^{\mu} - \frac{1}{\rho^{\mu}} = 0 \text{ et } \rho^{\mu-1} - \frac{1}{\rho^{\mu-1}} = \frac{1}{\rho} - \rho; \text{ d'où } \rho^{\mu} = 1.$$

D'ailleurs ρ doit être une racine primitive de l'équation $\rho^{\mu} = 1$; car, si l'on avait $\rho^{i} = 1$, i étant inférieur à μ, l'équation (4) donnerait $\theta^{i}(y) = y$; ce qui est impossible, puisque μ est le plus petit nombre tel qu'on ait $\theta^{\mu}(y) = y$. Comme $h = \rho + \frac{1}{\rho}$, nous pouvons conclure que l'échelle de la série récurrente

$$y, \ \theta(y), \theta^2(y), \theta^3(y) \dots \text{ est } \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 1,$$

ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^{\mu} = 1$. C. Q. F. D.

6.me *Théorème.*

« Soient y et $\theta(y)$ deux racines quelconques de l'équation $f(y) = 0$; soit μ le nombre des termes distincts de la suite y, $\theta(y)$, $\theta^2(y)$, $\theta^3(y) \dots$; on pourra toujours former une équation du même degré n par rapport à y, et à coéfficients rationnels, dont toutes les racines satisferont à l'équation $\frac{d^2 y}{d x^2} = P\, y$, et dans la quelle les exposants de y seront tous multiples du nombre μ. »

Démonstration. L'équation (A) obtenue dans le dernier théorème peut s'écrire:

$$\left\{\theta^{m}(y) - \rho\, \theta^{m-1}(y)\right\} = \frac{1}{\rho}\left\{\theta^{m-1}(y) - \rho\, \theta^{m-2}(y)\right\}. \qquad \text{(B)}$$

posons

$$z_i = \varphi(y_i) = \{\theta(y_i) - \rho\, y_i\}^{\mu},$$

et admettons que les n racines de l'équation $f(y) = 0$, aient été distribuées en m groupes de μ racines chacun, comme il suit

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_1 & \theta(y_1) & \theta^2(y_1) & \dots & \theta^{\mu-1}(y_1), \\ y_2 & \theta(y_2) & \theta^2(y_2) & \dots & \theta^{\mu-1}(y_2), \\ y_3 & \theta(y_3) & \theta^2(y_3) & \dots & \theta^{\mu-1}(y_3), \\ y_m & \theta(y_m) & \theta^2(y_m) & \dots & \theta^{\mu-1}(y_m), \end{array}\right.$$

L'équation $\qquad (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_m) = T(z) = 0$

sera du degré m en z, et tous ses coéfficients seront des fonctions rationnelles de x; car les fonctions symétriques des racines de l'équation $T(z) = 0$, sont aussi des fonctions symétriques des racines des l'équation $f(y) = 0$, ainsi qu'on le voit par les équations suivantes

$$z_i = \varphi\,(y_i) = \varphi\,[\theta(y_i)] = \varphi\,[\theta^2(y_i)] = \ldots = \varphi[\theta^{\mu-1}\,(y_i)],$$

lesquelles se déduisent immédiatement de l'expression de z_i et de la formule (B).

D'ailleurs, en désignant par z l'une quelconque de ces racines, on aura

$$z^{\frac{1}{\mu}} = \rho^h \,\{\, \theta(y) - \rho y \,\}$$

$z^{\frac{1}{\mu}}$ est donc une intégrale de l'équation (2). Posons $z = y^\mu$ dans l'équation $T(z) = 0$; nous obtiendrons une équation de la forme suivante

$$F\,(y) = y^{m\mu} + p_1\, y^{(m-1)\mu} + p_2\, y^{(m-2)\mu} + \ldots + p_{m-1}\, y^\mu + p_m = 0 \qquad (D)$$

p_1, p_2 . . . p_m désignant des fonctions rationnelles de x. Or toutes les racines de cette équation satisfont à l'équation différentielle proposée, elle est du degré minimum $n = m\mu$, et les exposants de y sont tous multiples du nombre μ. Le théorème énoncé est donc démontré.

7.me *Théorème.*

« Dans l'équation (D) obtenue précédemment, si on désigne par $\theta(y)$ une racine qui n'ait pas avec y un rapport constant, on pourra poser

$$\theta(y) = a\, y + b\, \psi\,(y),$$

a et b désignant deux constantes, $\psi(y)$ un polynome du degré $n - 1$, dont les coéfficients sont des fonctions rationnelles de x, et dans lequel les exposants de y sont tous de la forme $i\mu - 1$, i désignant un nombre entier. »

Démonstration. Quelle que soit la racine de l'équation $F(y) = 0$, que l'on représente par y, on a (voyez le commencement de la démonstration du 5.me théorème)

$$D_x \left\{ \frac{\theta\,(y)}{y} \right\} - \frac{b}{y^2} = 0.$$

On pourra donc remplacer y, par $\rho\; y$, ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$. On a donc

$$D_x \left\{ \frac{\theta\,(\rho\, y)}{\rho\, y} \right\} - \frac{1}{\rho^2}\frac{b}{y^2} = 0.$$

Intégrons cette équation et la précédente à partir de $x = x_0$, nous aurons

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\theta\,(y)}{y} &= \frac{\theta\,(y_0)}{y_0} + b.\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\,x}{y^2} \\ \frac{\theta(\rho\, y)}{\rho y} &= \frac{\theta(\rho y_0)}{\rho y_0} + \frac{b}{\rho^2}\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{y^2}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs (4.me théorème),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\,x}{y^2} = \alpha + \beta\, y + \delta\, y^2 + \ldots + \lambda\, y^{n-1};$$

α, β, δ, ... λ, désignant des fonctions rationnelles de x. On pourra donc poser

$$y \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\,x}{y^2} = a_0 + a_1\, y + a_2\, y^2 + \ldots + a_{n-1}\, y^{n-1} = \varphi(y)$$

a_0, a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$, désignant aussi des fonctions rationnelles de x. Les deux équations précédentes deviendront

$$\left\{ \begin{aligned} \theta(y) &= \frac{\theta(y_0)}{y_0}\, y + b.\ \varphi(y) \\ \theta(\rho\, y) &= \frac{\theta(\rho\, y_0)}{y_0} y + \frac{b}{\rho}\, \varphi(y). \end{aligned} \right.$$

Puisque ces équations doivent être vérifiées par toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, nous remplacerons dans la première y par $\rho\, y$, puis nous en retrancherons la dernière équation, ce qui nous donnera

$$0 = c\, y + \varphi(\rho\, y) - \frac{1}{\rho}\, \varphi(y),$$

en posant, pour abréger,

$$\rho \left(\frac{\theta(y_0)}{y_0} - \frac{\theta(\rho\, y_0)}{\rho\, y_0} \right) = bc.$$

En remplaçant $\varphi(\rho\, y)$ et $\varphi(y)$ par leurs valeurs dans l'équation précédente, et ordonnant le résultat on obtient:

$$0 = a_0 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) + \left[c + a_1 \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\right] y + a_2 \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho}\right) y^2 + a^3 \left(\rho^3 - \frac{1}{\rho}\right) y^3$$
$$+ \ldots + a_{n-1} \left(\rho^{n-1} - \frac{1}{\rho}\right) y^{n-1}.$$

Cette équation doit être identique par rapport à y; et comme on ne peut avoir $\rho^m - \frac{1}{\rho} = 0$ qu'autant que le nombre m est de la forme $i\mu - 1$, i désignant un nombre entier, il faut que a_m soit nul, excepté quand $m = 1$, ou quand $m = i\,\mu - 1$. On a donc

$$\varphi(y) = a_1\, y + a_{\mu-1}\, y^{\mu-1} + a_{2\mu-1}\, y^{2\mu-1} + \ldots + \dot{a}_{m\mu-1}\, y^{m\mu-1}; \quad m\mu = n.$$

Si donc nous posons $\frac{\theta(y_0)}{y_0} + b\, a_1 = a$, et que nous remplacions $a_{\mu-1}$, $a_{2\mu-1}$ .... $a_{m\mu-1}$, par α, β, ... λ, la racine $\theta(y)$ sera représentée par la formule

*

$$\theta(y) = a\,y + b\,(\alpha y^{\mu-2} + \mathcal{C}\,y^{2\mu-1} + \gamma\,y^{3\mu-1} + \ldots + \lambda\,y^{m\mu-1}) = a\,y + b\,\psi(y).$$

8.me *Théorème.*

« Dans la formule $\theta(y) = a\,y + b\,\psi(y)$, qui peut représenter toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, au moyen de valeurs convenables attribuées aux constantes a et b, on a toujours

$$a = \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{\rho^i}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)}$$

ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$, i un nombre entier, β, β_i deux racines de l'unité telles que l'on ait

$$\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\theta(y) - y, \quad (\theta\,\rho^i)^2\,y = \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right)(\theta\,\rho^i)\,y - y. \text{ »}$$

Démonstration. L'équation $\theta(y) = a\,y + b\,\psi\,(y)$ est encore vérifiée quand on y remplace la racine y, par la racine $\rho^i\,y$. On a donc

$$\theta(\rho^i\,y) = a.\,\rho^i\,y + b\,\psi(\rho^i\,y) = a.\,\rho^i\,y + \frac{b}{\rho^i}\psi\,(y).$$

Cette équation doit être vérifiée par toutes les racines de l'équation irréductible $F(y) = 0$; nous pouvons donc remplacer y par $\theta\,\rho^i.\,y$, ce qui donne

$$(\theta\,\rho^i)^2\,(y) = a\,\rho^i\cdot(\theta\,\rho^i)\,y + \frac{b}{\rho^i}\psi\,(\theta\,\rho^i\,y) = \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right)(\theta\,\rho^i)\,y - y$$

En faisant la même substitution dans la première équation, on a

$$\theta^2(\rho^i\,y) = a.\,(\theta\,\rho^i)\,y + b.\,\psi\,(\theta\,\rho^i\,y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)(\theta\,\rho^i)\,y - \rho^i.\,y.$$

En éliminant $\psi(\theta\rho^i y)$ entre ces deux équations, on trouve

$$a\,(\rho^{2i} - 1).\,(\theta\,\rho^i)\,y = \left[\rho^i\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right]\cdot(\theta\,\rho^i).\,y$$

d'où

$$a = \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{\rho^i}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)}. \text{ C. Q. F. D.}$$

Remarque 1.° Nous supposerons que, parmi les équations irréductibles du degré

minimum n, dont les racines vérifient l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = P.\, y$, l'équation $F(y) = 0$ est celle dans laquelle le plus grand commun diviseur μ des exposants de y est le plus grand possible. De cette hypothèse et du 6.me théorème, nous concluons, que, si $\theta(y)$ désigne une racine quelconque de l'équation $F(y) = 0$, distincte de y, le nombre μ' des termes distincts de la suite $y, \theta(y), \theta^2(y)$ etc. ne pourra jamais surpasser μ.

2.° Si l'équation $F(y) = 0$ a une racine $\varphi(y)$ dont le rapport avec y ne soit pas constant, et que le nombre des termes distincts de la suite y, $\varphi(y)$, $\varphi^2(y)$... soit égal à m, on peut supposer dans la valeur précédente de a, que la racine de l'unité β appartient à un exposant m_0 égal à un diviseur quelconque de m; car il suffit pour cela de prendre $\theta(y) = \varphi^{\frac{m}{m_0}}(y)$, d'où $\theta^{m_0}(y) = \varphi^m(y) = y$.

9.me *Théorème.*

« $\psi(y)$ conservant la même signification qu'au théorème 7.me supposons que dans la fonction $\varphi(y) = A\, y + B.\, \psi(y)$ les deux constantes A et B soient différentes de 0. Si on égale successivement y à toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, le nombre des valeurs de cette fonction $\varphi(y)$, qui n'ont de rapport constant ni entre elles, ni avec y ou $\psi(y)$, est toujours multiple de $\frac{\mu}{2}$ ou de μ, suivant que μ est pair ou impair. »

Démonstration. Soit ρ une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$, et désignons par μ' le nombre $\frac{\mu}{2}$ ou le nombre μ, suivant que μ est pair ou impair.

D'abord les μ' valeurs suivantes de $\varphi(y)$

$$\varphi(y),\ \varphi(\rho\, y),\ \varphi(\rho^2 y),\ \ldots\ \varphi(\rho^{\mu'-1} y), \qquad (1)$$

n'auront aucun rapport constant ni entre elles, ni avec y ni avec $\psi(y)$. Car on a

$$\varphi(\rho^i y) = A\, \rho^i\, y + B\, \rho^i.\, \psi(y);$$

or, quelle que soit la valeur de i, comme A et B sont différents de zèro, $\varphi(\rho^i y)$ ne peut avoir de rapport constant ni avec y, ni avec $\psi(y)$.

D'ailleurs, si l'on supposait $\varphi(\rho^i y) = c\, \varphi(\rho^{i'} y)$, c désignant une constante, on devrait avoir

$$A\rho^i.\, y + \frac{B}{\rho^i}\psi(y) = c\, A\, \rho^{i'}\, y + \frac{c\, B}{\rho^{i'}}.\, \psi(y);$$

et par conséquent

$$A\, \rho^i = c\, A.\, \rho^{i'}, \qquad B\, \rho^{i'} = c\, B\, \rho^i$$

On devrait donc avoir $\rho^{i-i'} = \rho^{i'-i}$ ou $\rho^{2(i-i')} = 1$; ce qui est impossible, puisque

nous supposons i et i' différents l'un de l'autre et inférieurs à μ'. Donc les termes de la suite (I) n'ont pas entre eux de rapport constant. Nous avons donc μ' valeurs de $\varphi(y)$ satisfaisant aux conditions énoncées, et, s'il n'en existe pas d'autre, notre assertion est démontrée.

S'il y a une autre valeur de $\varphi(y)$, qui ne soit d'aucune des trois formes $c.y$, $c\psi(y)$, $c\varphi(\rho^i y)$, (c, désignant une constante), soit $\varphi(\theta y) = \varphi_1(y)$ cette valeur. On aura

$$\varphi_1(y) = A\,\theta(y) + B\,\psi[\theta(y)].$$

Comme $\theta(y)$ et $\psi(\theta y)$ sont de la forme $ay + b\,\psi(y)$, a, et b désignant deux constantes, $\varphi_1(y)$ sera de la même forme, et l'on pourra poser

$$\varphi_1(y) = A_1\,y + B_1\,\psi(y).$$

Or les μ' valeurs suivantes

$$\varphi_1(y),\ \varphi_1(\rho y),\ \varphi_1(\rho^2 y),\ \ldots\ \varphi_1(\rho^{\mu'-1} y) \qquad \text{(II)}$$

n'ont de rapport constant, ni entre elles deux à deux, ni avec y ou avec $\psi(y)$; (la démonstration est la même que pour les termes de la suite (I)). Elles n'ont pas non plus de rapport constant avec les termes de la suite (I): car si on avait

$$\varphi_1(\rho^l.\,y) = c\,\varphi(\rho^{l'} y)$$

en remplaçant dans cette équation y par $\rho^{-l}.\,y$ et posant $l' - l = i$, on aurait $\varphi_1(y) = c\,\varphi(\rho^i y)$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi les valeurs de $\varphi(y)$ renfermées dans les deux suites (I), (II) satisfont aux conditions énoncées, et s'il n'y en a pas d'autre, notre théorème est démontré.

En continuant ainsi, on voit que les valeurs de $\varphi(y)$ qui n'ont aucun rapport constant, ni entre elles deux à deux, ni avec y ou $\psi(y)$, peuvent se distribuer en un certain nombre k de suites semblables aux suites (I) et (II), de telle sorte que le nombre de ces valeurs sera toujours un multiple de μ' égal à $k \times \mu'$; ce nombre sera donc toujours multiple de $\frac{\mu}{2}$ ou de μ, suivant que μ sera pair ou impair.

10.me *Théorème.*

« Soit $\theta(y)$ une racine de l'équation $F(y) = 0$; soit μ le plus grand commun diviseur des exposants de y dans $F(y)$; soit enfin m le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^m(y) = y$. Le nombre m ne peut avoir avec μ un facteur commun autre que 2 ou 4 sans être un diviseur de μ. »

Démonstration. Soit

$$\theta(y) = a\,y + b\,\psi(y).$$

Je dis que si m n'est égal ni à 4, ni à un diviseur de μ, aucune des constantes a et b n'est nulle.

1.° b n'est pas nul. Car celles des racines de l'équation $F(y) = 0$, qui ont un rapport constant avec y, sont de la forme $\rho^i\, y$. On aurait donc $\theta^\mu(y) = \rho^{i\mu}\, y = y$, et par conséquent le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^m(y) = y$, devrait être diviseur de μ.

2.° a n'est pas nul. Si a était nul, la formule obtenue au 8.me théorème donnerait

$$\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) = \rho^i\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right);$$

or ρ^i étant imaginaire, cette équation ne peut subsister qu'autant que l'on a

$$\beta_1 + \frac{1}{\beta_1} = 0, \quad \beta + \frac{1}{\beta} = 0 \quad \text{d'où} \quad \beta^4 = 1.$$

On aurait donc $\theta^4(y) = y$, et par conséquent $m = 4$ contrairement à l'hypothèse.

Nous pourrons donc appliquer ici le théorème précédent en prenant $\varphi(y) = \theta(y)$. Ainsi en substituant successivement dans $\theta(y)$ toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$, le nombre des valeurs de $\theta(y)$ qui n'auront aucun rapport constant ni entre elles deux à deux, ni avec y ou avec $\psi(y)$ sera $\mu' \times k$, μ' désignant $\frac{\mu}{2}$ ou μ, suivant que μ est pair ou impair. Le nombre des valeurs distinctes de $\theta(y)$, et par conséquent le degré n de l'équation $F(y) = 0$, sera de l'une des deux formes suivantes

$$\mu\,(k\,\mu' + 2), \qquad \mu\,(k\,\mu' + 1),$$

savoir, de la première quand l'équation $F(y) = 0$ admet une racine de la forme $c\psi(y)$, et de la seconde dans le cas contraire.

Soit β la racine primitive de l'équation $\beta^m = 1$, pour la quelle on a (5.me th.).

$$\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\theta(y) - y.$$

Posons $z = \varphi(y) = [\theta(y) - \beta y]$, et formons l'équation $T(z) = 0$ dont les racines sont les n valeurs que prend la fonction $\varphi(y)$, quand on égale successivement y à chacune des racines de l'équation $F(y) = 0$. L'équation ainsi obtenue sera du degré n, et aucune de ses racines n'aura un rapport constant avec y ou avec $\psi(y)$, à moins que m ne soit un diviseur de μ. En effet, si l'on avait $\varphi(\theta_1 y) = cy$ ou $c\,\psi(y)$ en remplaçant dans cette équation y par $\rho^i y$, on obtiendrait $\varphi(\theta_1 \rho^i y) = c\rho^i y$ ou $c\rho^{-i}(y)$; on aurait donc $\varphi(\theta_1\, \rho^i\, y) = \rho^{\pm i}.\ \varphi(\theta_1\, y)$. L'équation $T(z) = 0$ serait donc vérifiée par les μ valeurs représentées par la formule $\rho^i.\ \varphi(\theta_1\, y)$; les exposants de

z dans $T(z)$ seraient donc tous multiples de μ. D'ailleurs ils sont déjà multiple de m, puisque l'on a

$$[\theta^2(y) - \beta.\, \theta(y)] = \frac{1}{\beta} \cdot [\theta(y) - \beta y] \quad c.\ à\ .d. \quad \varphi(\theta\, y) = \frac{1}{\beta} \cdot \varphi(y).$$

Les exposants de z dans $T(z)$ seraient donc divisibles par le plus petit multiple commun de μ et de m, et par conséquent par un nombre supérieur à μ, ce qui est impossible (v. 8.me théorème, Remarque 1°). Le nombre des valeurs de $\varphi(y)$ qui n'ont entre elles aucun rapport constant sera donc un multiple de μ' (9.me théorème); et comme chacune de ces valeurs fournit pour $\varphi(y)$ les m valeurs comprises dans la formule $\beta^i.\ \varphi(y)$, le nombre total des valeurs de $z = \varphi(y)$ sera égal à un multiple de μ' multiplié par m. Ce nombre z sera donc $n = m \times \mu' \times p$, p désignant un nombre entier. On aura donc l'une des deux équations

$$m \times \mu'.\ p = \mu\,(k\,\mu' + 2) \quad \text{ou} \quad m.\ \mu'.\ p = \mu\,(k\mu' + 1).$$

1° Soit μ impair. On aura $\mu' = \mu$, et les deux équations précédentes donneront

$$m.\, p = k\,\mu + 2 \quad \text{ou} \quad m.\, p = k\, r + 1;$$

dans l'un et l'autre cas m et μ seront premiers entre eux.

2° Soit μ pair. On aura $\mu' = \frac{\mu}{2}$ et les deux équations précédentes donneront

$$m.\ p = k\,\mu + 4 \quad \text{ou} \quad mp = k\,\mu + 2.$$

Si donc m n'est pas un diviseur de μ, ainsi que nous l'avons supposé pour parvenir aux équations précédentes, les nombres m et μ ne pourront avoir aucun diviseur commun autre que 2 ou 4. C. Q. F. D.

11.me *Théorème.*

« Soit $\theta(y)$ une racine de l'équation $F(y) = 0$; soit toujours μ le plus grand commun diviseur des exposants de y dans $F(y)$, et désignons par m_0 le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^{m_0}(y) = y$. Si m_0 n'est pas égal à l'un des nombres 2, 3, 4 ou 6, il sera égal à un diviseur de μ. »

Démonstration. En posant $\theta(y) = a\, y + b\, \psi(y)$, nous avons obtenu (8.me th.)

$$a = \frac{\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right) - \frac{1}{\rho^i}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)} \qquad \text{(E)}$$

i désignant un nombre entier quelconque : ρ et β sont respectivement des racines primitives des équations $\rho^\mu = 1$; $\beta^{m_0} = 1$; β_i est une racine de l'unité qui vérifie l'équation

$$(\theta\,\rho^{i})^{2}\,y=\left(\beta_i+\frac{1}{\beta_i}\right)(\theta\,\rho^{i})\,y-y.$$

Egalons successivement le nombre i à $+1$ et à -1. En comparant les deux valeurs de a nous aurons;

$$\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\left(\beta_{1}+\frac{1}{\beta_{1}}\right)+\left(\beta_{-1}+\frac{1}{\beta_{-1}}\right).$$

Soient m_1 et m_{-1} les plus petits nombres entiers qui vérifient respectivement les équations $\beta_1^{m_1}=1$, $\beta_{-1}^{m_{-1}}=1$. Désignons par m le plus petit commun multiple des quatre nombres μ, m_0, m_1, m_{-1}, et par x une racine primitive de l'équation $x^m=1$. L'équation précédente pourra s'écrire sous la forme suivante

$$(x^{r}+x^{-r})(x^{tn}+x^{-tn})=x^{t'n'}+x^{-t'n'}+x^{t''n''}+x^{-t''n''}. \qquad (a)$$

en posant $r=\dfrac{m}{\mu}$, $n=\dfrac{m}{m_0}$, $n'=\dfrac{m}{m_1}$, $n''=\dfrac{m}{m_{-1}}$, et désignant par t, t', t'' des nombres premiers avec m.

Comme l'équation dont les racines sont les racines primitives de l'équation $x^m=1$ est irréductible, l'équation (a) ne peut être vérifiée par une racine x de cette équation, sans l'être aussi par toutes les autres. On pourra donc remplacer dans l'équation (a) x par x^l, l désignant un nombre entier quelconque premier avec m. Or, si m_0 n'a aucune des valeurs exceptées 2, 3, 4 ou 6, ou pourra toujours déterminer deux nombres l, l' premiers avec m de la forme, $l=1+\theta.\mu$, $l'=1+y\dfrac{4m}{a\,\mu}$

(a désigne le plus petit des nombres 1, 2, 4 pour lequel $\dfrac{a\,\mu}{4}=$ un nombre entier),

et tels qu'aucun des deux nombres $(l+1)$, $(l-1)$ ne soit divisible par $\dfrac{4m}{a\,\mu}$, et qu'aucun des deux nombres $(l'+1)$, $(l'-1)$ ne soit divisible par μ. (voyez la note à la fin du mémoire). Supposons donc que nous ayons déterminé deux nombres l, l' satisfaisant à ces conditions, et après avoir remplacé x par x^l dans l'équation (a) retranchons du résultat cette même équation. Le premier membre de l'équation obtenue sera

$$(x^{r}+x^{-r})\left[(x^{lt.n}+x^{-ltn})-(x^{tn}+x^{-tn})\right];$$

dans cette nouvelle équation remplaçons x par $x^{l'}$, et, remarquant que $x^{l'n}=x^{n}$, retranchons cette même équation du résultat ainsi obtenu; le premier membre sera

$$\left[(x^{l'r}+x^{-l'r})-(x^{r}+x^{-r})\right]\left[x^{ltn}+x^{-ltn})-(x^{tn}+x^{-tn})\right],$$

et je dis que le second membre est nul. En effet, chacun des deux nombres m_1,

m_{-1} étant ou un diviseur de μ, ou un nombre premier avec $\frac{a\mu}{4}$ chacun des deux quotiens $\frac{m}{m_1} = n'$, $\frac{m}{m_{-1}} = n''$ est, ou multiple de $\frac{m}{\mu}$, ou multiple de $\frac{a\mu}{4}$. La première soustraction fait disparaître du second membre les puissances de x dont l'exposant est multiple de $\frac{m}{\mu}$, la seconde soustraction en fait disparaître les puissances de x dont l'exposant est multiple de $a\,\frac{\mu}{4}$, et par conséquent le réduit à zéro. On devrait donc vérifier l'une des deux équations $x^{l'r} + x^{-l'r} = x^r + x^{-r}$, ou $x^{ltn} + x^{-ltn} = x^{tn} + x^{-tn}$. Pour vérifier la première, il faudrait que l'un des deux nombres $l'+1$, $l'-1$ fût divisible par $\frac{m}{r} = \mu$, et, pour vérifier la seconde, il faudrait que l'un des deux nombres $l+1$, $l-1$ fût divisible par $\frac{4m}{a\mu}$; or les nombres l, l' ont été choisis de manière à rendre ces divisions impossibles. L'équation (a) est donc elle même impossible. Donc si m_0 désigne le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^{m_0}(y) = y$, m_0 ne pourra pas avoir une valeur différente de 2, 3, 4 ou 6, sans être un diviseur de μ. C. Q. F. D.

12.me *Théorème.*

« Si l'équation $F(y) = 0$ a une racine $\theta(y)$ dont le rapport avec y ne soit pas constant; et que μ ne soit égal à aucun des trois nombres 6, 8, ou 10 on aura nécessairement $\theta^2(y) = -y$. »

Démonstration. Soit $\theta(y)$ celle des racines de l'équation $F(y) = 0$ pour laquelle le plus petit nombre entier qui satisfasse à l'équation $\theta^m(y) = y$ ait la plus grande valeur possible. Je démontrerai d'abord que, si m n'est pas égal à 4, c. à .d. si l'on n'a pas $\theta^2(y) = -y$, le nombre m doit être égal à μ; et ensuite que le nombre μ ne peut avoir que l'une des trois valeur 6, 8 ou 10.

Dans l'équation obtenue plus haut (théorème 11).

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right)$$

les exposants m_1, m_{-1} auxquels appartiennent les racines de l'unité β_1, β_{-1}, ne pourront pas, par suite de l'hypothèse faite, surpasser le nombre m auquel appartient β. De plus comme on a

$$\theta^{2l}(y) = \left(\beta^l + \frac{1}{\beta^l}\right)\theta^l(y) - y$$

on pourra supposer que β désigne celle des racines primitives de l'équation $\beta^m = 1$, pour laquelle on a $\beta + \frac{1}{\beta} = 2 \cos \frac{2\pi}{m}$; car si cela n'était pas, on remplacerait $\theta(y)$ par $\theta^l(y)$, le nombre l étant choisi de telle sorte que la condition précédent fût remplie. De même on supposera qu'on ait choisi celle des racines primitives de l'équation $\rho^\mu = 1$, qui vérifie la relation $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{\mu}$. Dés lors en désignant par k et k' deux nombres entiers tels que les deux fractions $\frac{2k}{m_1}$, $\frac{2k}{m_{-1}}$ soient inférieures à l'unité, on pourra écrire l'équation précédente comme il suit:

$$2. \cos \frac{2\pi}{\mu} \cdot \cos \frac{2\pi}{m} = \cos \frac{2k\pi}{m_1} + \cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}}, \qquad (a)$$

ou encore

$$\cos\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu}\right) 2\pi + \cos\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\mu}\right) 2\pi = \cos \frac{2k\pi}{m_1} + \cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}}. \qquad (a)$$

1.° Pour que cette équation soit possible, il faut que chacune des deux fractions $\frac{k}{m_1}$, $\frac{k'}{m_{-1}}$ soit inférieure à $\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} < \frac{2}{m}$; car si on avait $\frac{k}{m_1} =$ ou $> \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu}\right)$ on aurait $\cos \frac{2k\pi}{m_1} =$ ou $< \cos\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu}\right) 2\pi$, et comme on a nécessairement $\cos \frac{2k'\pi}{m_{-1}} < \cos\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\mu}\right) 2\pi$, le second membre de l'égalité précédente serait inférieur au premier membre. Comme m_1 et m_{-1} ne peuvent pas surpasser le nombre m, les deux inégalités $\frac{k}{m_1} < \frac{2}{m}$, $\frac{k'}{m_{-1}} < \frac{2}{m}$, exigent que k et k' soient inférieurs à 2, on a donc $k = k' = 1$. De plus le 11.me théorème nous apprend que si l'un des nombres m, m_1, m_{-1}, n'est pas diviseur de μ il ne peut avoir que l'une des trois valeurs 3, 4 ou 6.

2.° Cela posé, nous allons démontrer que si m est supérieur a 4, il doit être égal à μ. D'abord si μ est pair on ne peut pas supposer m impair: car au lieu de la racine $\theta(y)$, considérons la racine $\varphi(y) = [(-1)\theta](y)$; on aura

$$\varphi^m(y) = (-1)^m \cdot \theta^m(y) = (-1)^m \cdot y;$$

et si m est impair on aurait $\varphi^m(y) = -y$; l'équation $F(y) = 0$, aurait donc une racine $\varphi(y)$ qui appartiendrait à une période dont l'indice serait $2m > m$, contrairement à l'hypothèse. Quelle que soit la valeur de μ supérieure à 6, on ne pourra pas supposer que m ne soit pas diviseur de μ; car alors chacun des trois nombres

*

m, m_1, m_{-1}, serait égal à l'un des nombres 3, 4 ou 6, et comme nous supposons que m n'est pas égal à 4, on déduirait de la première équation (a) $\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{\mu} =$ un nombre rationnel, ce qui est impossible.

Soit donc $m = \frac{\mu}{a}\cdot$ On aura $\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = \frac{a+1}{a}\cdot\frac{1}{m}$, et par conséquent les inégalités obtenues plus haut (1°) deviendront

$$\frac{1}{m_1} < \frac{a+1}{a}\cdot\frac{1}{m},\ \frac{1}{m_{-1}} < \frac{a+1}{a}\,\frac{1}{m}\cdot$$

Or cela est impossible si l'on suppose que l'un des nombres m_1, m_{-1} soit un diviseur de μ autre que m. Soit en effet, $m_1 = \frac{\mu}{b} = \frac{am}{b}\cdot$ Comme m_1 est au plus égal à m, si b diffère de a, il sera au moins égal à $(a+1)$, et par conséquent, la fraction $\frac{b}{a}\,\frac{1}{m}$ ou $\frac{1}{m_1}$ sera au moins égale à $\frac{a+1}{a}\cdot\frac{1}{m}$, et l'inégalité

$$\frac{1}{m_1} < \frac{a+1}{a}\cdot\frac{1}{m}$$

sera impossible. Si donc m_1 n'est pas égal à m, il ne pourra avoir que l'une des trois valeurs 3, 4 ou μ.

La première équation donnerait alors pour $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ une valeur égale à une fonction rationnelle de $\left(\rho^a + \frac{1}{\rho^a}\right)\cdot$ Or cela est impossible:

En effet, soit $\mu = a^\alpha b^\beta c^\varkappa \ldots$, et posons $\mathrm{M} = \mu\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$; ρ désignant une racine primitive de l'équation $\rho^\mu = 1$, $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ sera racine d'une équation irréductible du degré $\frac{\mathrm{M}}{2}$; tandis que $\left(\rho^a + \frac{1}{\rho^a}\right)$ sera racine d'une équation irréductible du degré $\frac{\mathrm{M}}{2a}$ excepté le seul cas où l'on aurait en même temps $a = 2$, $\alpha = 1$, mais ce cas d'exception doit être écarté, puisque $\frac{\mu}{a}$ et μ doivent être en même temps pairs ou impairs. Or toute fonction rationnelle d'une racine d'une équation de degré n peut être déterminée par une équation du même degré. Nous serions donc conduits à cette absurdité qu'une équation irréductible du degré

$\frac{M}{2}$ pourrait avoir une racine commune avec une équation de même forme et d'un degré moindre $\frac{M}{2a}$. On doit donc avoir $a = 1$ et $m = \mu$.

3° L'équation (b) deviendra donc

$$\cos\frac{4\pi}{\mu} + 1 = \cos\frac{2\pi}{m_1} + \cos\frac{2\pi}{m_{-1}},$$

et l'on aura $m_1 > \frac{\mu}{2}$. $m_{-1} > \frac{\mu}{2}$. D'abord si les deux nombres m_1 et m_{-1} sont des diviseurs de μ, pour vérifier les inégalités précédentes, il faut que l'on ait

$$m_1 = m_{-1} = \mu.$$

Mais alors l'équation précédente est impossible; car elle devient

$$\cos\frac{4\pi}{\mu} + 1 = 2\cos\frac{2\pi}{\mu};$$

et comme

$$\cos\frac{2\pi}{\mu} + 1 = \cos\frac{2\pi}{\mu} . \cos\frac{2\pi}{\mu};$$

on conclurait que $\cos\frac{2\pi}{\mu} = 1$, ce qui est impossible. Il faut donc que l'un des nombres m_1, m_{-1} ne soit pas diviseur de μ. Dès lors il ne pourra pas être supérieur à 6, et pour que l'inégalité $m_1 > \frac{\mu}{2}$ soit verifiée, il faudra que μ soit inférieur à 12.

De plus μ doit être un nombre pair ; car si μ est impair, m, m_1 et m_{-1} le seront aussi. Si $\mu = 3$, les quatre nombres m, m_1, m_{-1} et μ sont égaux, et nous retombons ainsi dans le cas que nous venons de démontrer impossible. Si μ a une valeur impaire autre que 3, on aura $m = \mu$; dans la première équation on pourra poser $\beta = \rho$, et comme μ est impair on pourra choisir pour valeur de ρ celle des racines de l'équation $\rho^\mu = 1$ pour la quelle on a

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 2\cos\frac{\mu - 1}{2}\,\frac{2\pi}{\mu};$$

ainsi, au lieu de l'équation (a) on aura

$$\cos\frac{2\pi}{\mu} + 1 = \cos\frac{2k\pi}{m_1} + \cos\frac{2k'\pi}{m_{-1}}$$

k et k' étant deux nombres entiers choisis de telle sorte que les fractions $\frac{2k}{m_1}$, $\frac{2k'}{m_{-1}}$ soient inférieures à l'unité. Or quelle que soit cette valeur entière de k ou de k';

aucune des deux fractions $\frac{2k}{m_1}$, $\frac{2k'}{m_{-1}}$ ne peut devenir inférieure $\frac{2}{\mu}$; le plus grand des deux cosinus du second membre sera au plus égal à $\cos\frac{2\pi}{\mu}$; et comme l'autre est nécessairement inférieur à l'unité cette équation est impossible.

Ainsi le nombre μ ne peut avoir que des valeurs paires inférieures à 12, *c.* à *d.* qu'il ne peut avoir que l'une des 4 valeurs 4, 6, 8 ou 10. D'ailleurs si $\mu = 4$, l'équation $F(y)$ ne peut avoir aucune racine qui ne satisfasse à l'équation $\theta^4(y) = y$.

Donc si l'équation $F(y) = 0$ a une racine $\theta(y)$ dont le rapport avec y ne soit pas constant, et qui ne vérifie pas l'équation $\theta^2(y) = -y$, le nombre μ ne peut avoir que l'une des trois valeurs 6, 8, ou 10. C. Q. F. D.

13.me *Théorème.*

« Si $\mu = 6$ et que l'équation $F(y) = 0$ ait une racine $\theta(y)$, qui n'aît pas avec y un rapport constant, et pour laquelle on n'aît pas $\theta^2(y) = -y$, la fonction $\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)$ est déterminée par une équation algébrique du quatrième degré.

Démonstration. $\theta(y)$ n'ayant pas avec y un rapport constant, on pourra écrire $\theta(y) = a\,y + b\,\psi(y)$, et la constante a sera déterminée (8.me théorème) par la formule

$$a = \frac{\left(\beta^i + \frac{1}{\beta^i}\right) - \frac{1}{\rho^i}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)}. \quad (E)$$

Si dans cette formule nous faisons successivement $i = 1$, $i = -1$, la comparaison des valeurs de a donnera en remarquant que $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = 1$,

$$\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right) \qquad (a)$$

β, β_1 et β_{-1} doivent vérifier l'une des deux équations $x^4 = 1$, $x^6 = 1$. Les trois termes de l'équation (a) ne pourront avoir que l'une des trois valeurs 0, $+1$, ou -1.

1.° Nombre des valeurs de a, en supposant que l'on n'aît pas $\theta(y) = ay$.

Pour que l'équation (a) soit possible, il faut, ou bien que les trois binômes soient nuls, ou bien que l'un d'eux au moins soit nul; car autrement on aurait

$$\pm 1 = \pm 1 \pm 1,$$

ce qui est impossible. Si nous supposons $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 1$, $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ n'aura que l'une des deux valeurs $0, +1$, et la formule (E), en y faisant $i = 1$, ne donne pour a que les deux valeurs

$$\frac{-\rho^{-1}}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Si nous supposons $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -1$, $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ n'aura que l'une des deux valeurs $0, -1$, et la formule (E), donnera pour valeurs correspondantes de a

$$\frac{+\rho^{-1}}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \frac{-\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Si enfin nous supposons $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 0$ la costante a ne peut avoir que l'une des trois valeurs 0, $\frac{+1}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, $\frac{-1}{\rho - \frac{1}{\rho}}$. De telle sorte que, quelle que soit la racine $\theta(y)$, dont le rapport avec y n'est pas constant, si nous posons $\theta(y) = a\, y + b\, \psi(y)$, la constante a se réduira à zéro, ou à l'une des six valeurs comprises dans la formule $\frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, i désignant un entier.

2° L'équation $F(y) = 0$ n'admet pas de racine de la forme $c\psi(y)$. Puisque, par hypothèse, cette équation admet au moins un racine qui ne vérifie pas la formule $\theta^2(y) = -y$, et qui n'a pas avec y un rapport constant, on reconnait aisément qu'elle doit en admettre une qui vérifie l'équation $\theta^3(y) = -y$. La valeur correspondante de $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ sera 1, et la valeur correspondante de a sera

$$\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho}\right)}};$$

d'ailleurs ρ désignant une racine primitive quelconque de l'équation $\rho^6 = 1$, et $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ étant aussi bien que ρ racine primitive de cette équation, nous pouvons prendre

$$a = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}};$$

de telle sorte que nous aurons en même temps:

$$\theta^2(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\theta(y) - y \quad \text{et} \quad \theta(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\,\psi(y).$$

Nous considérerons la fonction $\varphi(y) = [\theta(y) - \rho y]$, et les diverses valeurs qu'elle prend quand on égale y successivement à toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$; nous montrerons que ces diverses valeurs n'ont pas de rapport constant avec les racines de l'équation $F(y) = 0$, et que cependant quelques unes d'entre elles doivent être de la forme $c\psi(y)$. Nous conclurons de là qu'aucune racine de l'équation $F(y) = 0$ ne peut être de cette même forme.

Supposons qu'en remplaçant dans $\varphi(y)$, y par $\theta(y) = a_1 . y + b_1\,\psi(y)$, on obtienne une valeur de la forme cy, c. à .d. supposons que l'on ait

$$cy = \varphi(\theta_1 y) = \left[\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \rho\right]\theta_1(y) + b\,\psi(\theta_1 y) = \frac{2}{\rho - \frac{1}{\rho}}\theta_1(y) + b\,\psi(\theta_1 y). \quad (b)$$

Nous avons d'ailleurs

$$\theta_1^2(y) = a_1\,\theta_1(y) + b_1\,\psi(\theta_1 y) \quad \text{et} \quad \theta_1^2(y) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\theta_1(y) - y, \quad (c)$$

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ ayant l'une des trois valeurs $0, -1, -1$. En combinant les équations (b) et (c), on trouve:

$$c.\,y = \left[\frac{2}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \frac{b}{b_1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - a_1\right)\right]\theta_1(y) - \frac{b}{b_1}y. \quad (d)$$

D'un autre côté

$$\theta(\theta_1 y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}\theta_1(y) + b\,\psi(\theta_1 y) = \left(\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \frac{b}{b_1}\left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - a_1\right]\right)\theta_1(y) - \frac{b}{b_1}y \quad (e)$$

si b_1 était nul, on aurait

$$\varphi(\theta_1 y) = \varphi(\rho^i y) = \frac{2\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\,\rho^{-i}\,\psi(y),$$

et dès lors l'équation (b) serait impossible, b_1 n'est donc pas nul. De même l'équation (d) n'est possible qu'autant qu'on annule le facteur de $\theta_1(y)$, ce qui donne

$$\frac{b}{b_1}=\frac{2}{\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\left(a_1-\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

L'équation (e) deviendra

$$\theta(\theta_1 y)=\frac{\rho-2}{\rho-\frac{1}{\rho}}\theta_1(y)-\frac{b}{b_1}y=\left[\frac{\rho-2}{\rho-\frac{1}{\rho}}a_1-\frac{b}{b_1}\right]y+\frac{\rho-2}{\rho-\frac{1}{\rho}}b\,\psi(y).$$

$\theta\,\theta_1 y$ étant racine de l'équation $F(y)=0$, et n'ayant pas avec y un rapport constant, sera de la forme

$$\theta(\theta_1 y)=\frac{\rho^i}{\rho-\frac{1}{\rho}}y+b_2\,\psi(y).$$

On doit donc avoir

$$\frac{\rho-2}{\rho-\frac{1}{\rho}}a_1-\frac{b}{b_1}=\frac{\rho^i}{\rho-\frac{1}{\rho}},\quad \text{d'où}\quad \frac{b}{b_1}=\frac{\rho-2}{\rho-\frac{1}{\rho}}a_1-\frac{\rho^i}{\rho-\frac{1}{\rho}}.$$

La comparaison de cette valeur et de la précédente nous donnera

$$2=\left[(\rho-2)\,a_1-\rho^i\right]\left[a_1-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right]\qquad (f).$$

Dans cette équation $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$ ne peut avoir que l'une des trois valeurs

$$0,+1,-1.$$

Supposons $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=0$. Comme a_1 ne peut pas être nul en même temps, on aura $a_1=\frac{\pm\rho}{\rho-\frac{1}{\rho}}$ et l'équation (f) devient

$$2\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2=\left[\left(\rho-2\right)\mp\rho^i\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

ce qui est impossible; car le module du premier membre est 6, tandis que la somme des modules des 4 termes du second membre est 5, et par conséquent le module du second membre est <5.

Supposons $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=1$. La valeur correspondante de a_1 sera (v. 1°) $\frac{l.\rho^l}{\rho-\frac{1}{\rho}}$, en faisant $\pm 1 = l$. On aura

$$a_1-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{l\,\rho^l}{\rho-\frac{1}{\rho}}-1=\frac{l\,\rho^{-l}}{\rho-\frac{1}{\rho}},$$

et par conséquent l'équation (f) deviendra

$$2\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2=l.\,\rho^{-l}\left[\left(\rho-2\right)l.\,\rho^{-l}-\rho^i\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\right];$$

le module du premier nombre est 6, la somme des modules des termes du second membre est 5; cette équation est donc impossible.

Supposons enfin $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=-1$, ce qui donne pour a_1 l'une des deux valeurs $\frac{-l\,\rho^l}{\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)}$; l'équation (f) est impossible pour la même raison que dans le dernier cas.

Donc dans tous les cas l'équation (f) est impossible, et par conséquent, il est impossible que parmi les diverses valeurs que prend $\varphi(y)$ quand on y remplace successivement y par les diverses racines de l'équation $F(y)=0$, il y en ait une de la forme $c\,y$. Si en même temps aucune de ces valeurs de $\varphi(y)$ n'était de la forme $c\,\psi\,(y)$, on conclurait du 9.me théorème que le nombre des valeurs de $\varphi(y)$ qui n'ont pas entre elles deux à deux de rapport constant est un multiple de 3, et que le nombre total des valeurs de $\varphi(y)$, c. à .d. le degré n de $F(y)$, est un multiple de 6×3. Mais d'après le 10.me théorème, ce nombre n doit être de l'une des deux formes $6(3k+2)$ ou $6(3k+1)$; on devrait donc avoir $6\times 3\times m=6(3k+2)$ ou $=6(3k+1)$; ce qui est impossible. Il est donc nécessaire que parmi les valeurs considérées de $\varphi(y)$ il y en ait quelqu'une de la forme $c.\psi(y)$. On aura donc $\varphi\left[\theta_i(y)\right]=c\,\psi(y)$. Cette équation subsistera encore quand on remplacera y par toutes les autres racines de l'équation $F(y)=0$. Or si le second membre $c\psi(y)$ était égal à une racine de la même équation $F(y)=0$, à un facteur constant près, les diverses valeurs de $\psi(y)$ seraient, à ce facteur constant près, les diverses racines de $F(y)=0$, de telle sorte qu'on aurait $\varphi(\theta_1\,y)=c.y$, ce qui a été démontré impossible. L'équation $F(y)=0$ ne peut donc pas avoir des racines de la forme $c\psi(y)$, et par conséquent (11.me théorème) le degré n de $F(y)$ sera donné par la formule

$$n=6\,(3\,m+1). \qquad (g)$$

3° Le degré n de $F(y)$ ne peut pas être supérieur à 48.

Considérons comme dans le cas précédent celle des racines de l'équation $F(y)=0$, qui vérifie les deux conditions

$$\theta(y)=\frac{\rho}{\rho-\frac{1}{\rho}}\,y+b\,\psi(y)\qquad\text{et}\qquad\theta^2(y)=\theta(y)-y.$$

Soit $\theta_1(y)=a_1\,y+b_1\,\psi(y)$ l'une quelconque des racines de la même équation, dont le rapport avec y n'est pas constant $\theta_1\,\theta\,(y)$ sera aussi une racine de la même équation, et par conséquent on pourra poser, $\theta_1\,\theta(y)=a_2\,y+b_2\,\psi(y)$. D'ailleurs on a

$$\theta_1\,(\theta\,y)=a_1\,\theta(y)+b_1\,\psi(\theta\,y)\qquad\text{et}\qquad\theta^2\,(y)=\frac{\rho}{\rho-\frac{1}{\rho}}\,\theta(y)+b\,\psi(\theta\,y)=\theta(y)-y$$

Donc

$$a_2\,y+b_2\,\psi(y)=a_1\,\theta(y)-\frac{b_1}{b}\left(\frac{\frac{1}{\rho}}{\rho-\frac{1}{\rho}}\right)\theta\,y-\frac{b_1}{b}\,y$$

$$=\left\{\frac{a_1\,\rho}{\rho-\frac{1}{\rho}}-\frac{b_1}{b}\,\frac{1}{\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}-\frac{b_1}{b}\right\}y+\left\{a_1\,b-b_1\,\frac{\frac{1}{\rho}}{\rho-\frac{1}{\rho}}\right\}\psi(y).$$

On aura donc

$$\frac{a_1\,\rho}{\rho-\frac{1}{\rho}}-\frac{b_1}{b}\,\frac{1}{\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}-\frac{b_1}{b}=a_2\qquad\left[a_1-\frac{b_1}{b}\,\frac{\frac{1}{\rho}}{\rho-\frac{1}{\rho}}\right]b=b_2$$

Or, si b_2 n'est pas nul, a_2 ne peut avoir que l'une des six valeurs comprises dans la formule $\frac{\rho^i}{\rho-\frac{1}{\rho}}$. Donc, si b_2 n'est pas nul, à une même valeur de a_1, il ne peut correspondre que six valeurs de b_1. D'ailleurs, si $b_2=0$, b_1 n'a qu'une seule valeur $b\,\rho\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)a_1$. Donc dans tous les cas une même valeur de a_1 ne peut répondre qu'à 7 valeurs différentes de b_1. Comme d'ailleurs a_1 ne peut avoir que six valeurs, le nombre des racines de l'équation $F\,(y)=0$, qui n'ont pas avec y un rapport constant ne pourra pas surpasser le produit 6×7. Ajoutez les 6. racines comprises dans la formule $\rho^i\,y$, le nombre total des racines de l'équation $F(y)=0$ ne pourra pas surpasser 6×8.

*

4.° Nous avons vû (1°) que l'équation (a) n'est possible qu'autant que l'une des racines de l'unité β, β_1, β_{-1}, vérifie l'équation $x^2 = -1$, à laquelle correspond $\theta_i^2(y) = -y$. Le degré n de $F(y)$ doit donc être divisible par 4. D'ailleurs (2.°) ce degré est donné par la formule $n = 6(3m + 1)$ et doit être (3°) inférieur à 6×8. Pour satisfaire à la première condition, il faut que $3m + 1$ soit pair et par conséquent m impair. On aura donc, en faisant successivement $m = 1, 3, 5, \ldots$

$$n = 6 \times 4, \qquad n = 6 \times 10, \qquad n = 6 \times 16.$$

Mais la première seule de ces valeurs est inférieure à 6×8. On a donc

$$n = 6 \times 4 = 24.$$

La fonction $t = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, ne pourra donc avoir que quatre valeurs distinctes, et par conséquent elle sera déterminée par une équation du quatrième degré. C.Q.F.D.

14.me *Théorème.*

« Soit $\mu = 8$. Si $\theta(y)$ désigne une racine de l'équation $F(y) = 0$ dont le rapport avec y ne soit pas constant, on aura $\theta^2(y) = -y$. »

Démonstration. Soit $\theta(y) = ay + b\psi(y)$, l'une quelconque des racines de l'équation $F(y) = 0$, dont le rapport avec y n'est pas constant. Si l'on n'a pas $\theta^2(y) = -y$, la valeur de $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ dans la formule (E) sera différente de 0, (8.me th.) la constante a ne peut pas être nulle. D'ailleurs on aura nécessairement l'une des équations suivantes

$$\theta^4(y) = \pm y, \qquad \theta^3(y) = \pm y$$

Cherchons quelles peuvent être les diverses valeurs de a dans ces différents cas.

Faisons $i = 1$ dans la formule (E), ce qui nous donnera

$$a = \frac{\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)} \qquad \text{(E)}$$

Nous obtiendrions aussi comme au théorème 11.me la formule

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right) \qquad (a)$$

Et comme nous pourrions partir de la racine $(\theta\rho)\,y$, nous obtiendrions de la même manière la formule

$$\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)=\left(\beta_2+\frac{1}{\beta_2}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right) \qquad (b)$$

ρ désignant une racine primitive de l'équation $x^8=1$, et β_i une racine de l'unité qui vérifie la formule

$$(\theta\,\rho^i)^2\,(y)=\left(\beta_i+\frac{1}{\beta_i}\right)(\theta\,\rho^i)\,(y)-y.$$

nous savons que dans le cas présent β_i doit être racine ou de l'équation $x^8=1$ ou de l'équation $x^6=1$. La racine ρ étant à notre choix, nous prendrons

$$\rho+\frac{1}{\rho}=\sqrt{2}.$$

1° $\theta^4(y)=-y$. La valeur correspondante de $\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$ sera $\pm\sqrt{2}$. L'équation (a) deviendra donc

$$\pm 2=\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)+\left(\beta_{-1}+\frac{1}{\beta_{-1}}\right),$$

ce qui exige qu'on ait

$$\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)=\left(\beta_{-1}+\frac{1}{\beta_{-1}}\right)=\pm 1,$$

le signe étant le même que dans la formule

$$\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\pm\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right).$$

La formule (E) donnera pour a, les deux valeurs

$$\frac{\pm\rho^2}{\rho-\frac{1}{\rho}}.$$

2° $\theta^2\,(y)=-y$. On aura $\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=0$. L'équation (a) donne

$$\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)=-\left(\beta_{-1}+\frac{1}{\beta_{-1}}\right).$$

Mais on voit par l'équation (b) que $\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)$ ne peut pas avoir l'une des deux valeurs $\pm\sqrt{2}$, car alors on aurait $\pm 2=\left(\beta_2+\frac{1}{\beta_2}\right)$, ce qui est impossible. On

aura donc $\beta_1 + \frac{1}{\beta_1} = 0$ ou ± 1. La constante a ne pourra donc avoir que l'une des trois valeurs

$$0, \frac{\pm 1}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Nota. Si a n'est pas nul, l'équation (b) donnera $\left(\beta_2 + \frac{1}{\beta_2}\right) = \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$.

3.° $\theta^3(y) = \pm y$. On aura $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm 1$, et par conséquent l'équation (a) deviendra

$$\pm\sqrt{2} = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right);$$

Or cette équation n'est possible qu'autant que l'un des deux binômes du second membre se reduira à zéro, et l'autre à $\pm\sqrt{2} = \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$. La formule (E) donnera pour (a) l'une des quatre valeurs $\frac{\pm \rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, $\frac{\pm \rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, le signe étant le même que dans la formule $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm 1$.

Donc, si $\theta(y) = a\,y + b\,\psi(y)$, désigne une racine de l'équation $F(y) = 0$ qui n'ait pas avec y un rapport constant, la constante a sera nulle, ou bien elle aura une des huit valeurs renfermées dans la formule $\frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}$.

De même la constante b, pour les racines qui n'ont pas de rapport constant ni avec y ou avec $\psi(y)$, ne peut avoir que huit valeurs différentes. En effet, si toutes les racines n'ont pas un rapport constant avec y ou avec $\psi(y)$, il y aura une racine $\theta(y)$ qui vérifiera en même temps les deux formules

$$\theta(y) = \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,y + b\,\psi(y) \quad \text{et} \quad \theta^2(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\theta(y) - y.$$

Car, excepté le cas où tous les binômes seraient nuls, nous avons vû dans la discussion précédente qu'il y a toujours un de ces binômes égal à $\pm\sqrt{2} = \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$; prenons ce binôme pour celui que nous avons désigné par $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$, la valeur cor-

respondante de a sera $\dfrac{\pm \rho^2}{\rho - \dfrac{1}{\rho}}$. (1°)

On a donc $\theta^2(y) = \left\{ \dfrac{\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)\rho^2}{\rho - \dfrac{1}{\rho}} - 1 \right\} y + b . \left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right) . \psi(y) = b\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)\psi(y)$.

Nous pouvons supposer que $b\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right) = 1$, car cela revient à multiplier les coéfficients de $\psi(y)$ par une constante convenable. On aura donc $\theta^2(y) = \psi(y)$, et par conséquent $\psi(y)$ sera une racine de l'équation $F(y) = 0$.

Or, si dans une racine quelconque de la même équation, $\theta_1(y) = a_1 y + b_1 \psi(y)$, nous remplaçons la racine y par $\psi(y)$ en remarquant que $\psi^3(y) = - y$, nous aurons

$$\theta_1 (\psi y) = - b_1 y + a_1 \psi(y).$$

Si donc aucune des deux constantes a_1, b_1 n'est nulle, nous pouvons appliquer ici à $(- b_1)$ ce que nous avons démontré précédemment pour a, $(- b_1)$ ne peut avoir que l'une des huit valeurs représentées par la formule $\dfrac{\rho^i}{\rho - \dfrac{1}{\rho}}$.

Si donc nous représentons les racines de l'équation $F(y) = 0$ par la formule

$$\theta_i (y) = a_i y + b_i \psi(y)$$

le nombre de celles de ces racines qui ne sont d'aucune des deux formes $\rho^i y$, $\rho^i \psi(y)$ ne pourra pas surpasser le nombre des combinaisons des 8 valeurs de a_i avec les huit valeurs de b_i, c. à .d. $8 \times 8 = 64$. Le nombre de toutes les racines, et par conséquent le degré n de l'équation $F(y) = 0$ ne pourra pas surpasser $(64 + 16) = 80$. Or en appliquant ici le raisonnement fait au commencement du 10.[me] théorème pour déterminer la forme du nombre n, et se rappelant que $\psi(y)$ est racine de l'équation $F(y) = 0$, nous trouvons $n = 8\,(4m + 2)$. Mais comme le nombre n doit être divisible par 3 et inférieur à 8×12, cette formule donne pour elle une valeur unique $8 \times 6 = 48$.

Si donc les racines de l'équation $F(y) = 0$ ne sont pas de l'une des deux formes $\rho_i\, y$, $\rho_i\, \psi(y)$, le degré n de cette équation est égal à 8×6.

Or cela est impossible:

Pour le démontrer considérons les deux racines $\theta_1(y) = \dfrac{1}{\rho}\,\theta(y)$, $\theta_2(y) = \dfrac{1}{\rho^2}\,\theta\,(y)$,

$\theta(y)$ désignant toujours la même racine que plus haut:

$$\theta(y) = \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y).$$

On aura
$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_1(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y), & \theta_2(y) = \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \psi(y). \\ \theta_1^2(y) = \theta_1(y) - y & \text{et } \theta_2^2(y) = -y; \end{array}\right.$$

les deux premières équations sont évidentes. Les deux autres en sont une conséquence, par ce que dans toute autre hypothèse, le coéfficient de y dans $\theta_1(y)$ et $\theta_2(y)$ serait différent de $\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}$, et de $\frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}}$.

Désignons par β une racine primitive de l'équation $x^6 = 1$, et posons

$$\varphi(y) = \theta_1(y) - \beta y.$$

L'équation $\theta_1^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\theta_1(y) - y$ donnera $\theta_1^2(y) - \beta\,\theta_1(y) = \frac{1}{\beta}\{\theta_1(y) - \beta y\}$, et par conséquent

$$\varphi(\theta_1 y) = \frac{1}{\beta}\varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(\theta_1^i y) = \frac{1}{\beta^i}\varphi(y).$$

La fonction $z = \varphi(y)$ sera donc racine d'une équation du degré n dans laquelle les exposants de z seront multiples de 6. Pour que le degré n de cette équation fût égal à 6×8, il faudrait que le nombre des valeurs de z qui n'ont pas entre elles deux à deux de rapport constant fût égal à 8; car à chacune de ces valeurs correspondent pour z 6 valeurs distinctes représentées par la formule $\beta^i z$. Or le nombre de ces valeurs de z est au moins égal à 12. En effet posons

$$\varphi[\psi(y)] = \varphi_1(y) \quad \text{et} \quad \varphi(\theta_2 y) = \varphi_2(y).$$

Les douze valeurs renfermées dans les trois suites

$$\left\{\begin{array}{llll} \varphi(y), & \varphi(\rho y), & \varphi(\rho^2 y), & \varphi(\rho^3 y) \\ \varphi_1(y), & \varphi_1(\rho y), & \varphi_1(\rho^2 y), & \varphi_1(\rho^3 y) \\ \varphi_2(y), & \varphi_2(\rho y), & \varphi_2(\rho^2 y), & \varphi_2(\rho^3 y) \end{array}\right.$$

n'ont aucun rapport constant deux à deux. Pour celles qui forment une même suite, la démonstration est la même qu'au 9.me théorème, de telle sorte qu'il nous suffira de démontrer l'impossibilité des trois équations

$$\varphi_1(y) = c\,(\rho^i y), \qquad \varphi_2(y) = c\,\varphi_1(\rho^i y), \qquad \varphi_2(y) = c\,\varphi(\rho^i y).$$

D'abord la constante c ne peut être qu'une puissance de β: car si l'équation en z admet deux racines de la forme z et cz, elle admet nécessairement toutes les racines renfermées dans la formule $c^m z$; si donc l'on n'avait pas $c^6 = 1$, le plus grand commun diviseur des exposants de z dans l'équation algébrique qui détermine cette fonction serait un multiple de 6 supérieur à 6, et par conséquent supérieur à 8, ce qui est impossible. Cela posé, l'impossibilité de la première équation

$$\varphi_1(y) = \beta^h\,\varphi(\rho^i y)$$

est manifeste, puisque $$\varphi(y) = \left\{\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta\right\} y + \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,\psi(y),$$

tandis que $$\varphi_1(y) = \left\{\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta\right\}\psi(y) - \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,y.$$

Pour démontrer l'impossibilité des deux autres, mettons $\varphi_2(y)$ sous la forme $a_2 y + b_2\psi(y)$.

On a $$\varphi_2(y) = \varphi(\theta_2 y) = \left\{\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta\right\}\theta_2(y) + \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,\psi(\theta_2 y);$$

Or les équations relatives à $\theta_2(y)$ donnent

$$\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,\psi(\theta_2 y) = \rho\left\{\theta_2^2(y) - \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,\theta_2(y)\right\} = -\rho y - \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,\theta_2(y)$$

donc $$\varphi_2(y) = -\beta\,\theta_2(y) - \rho y = -\left\{\frac{\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \rho\right\} y - \frac{\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}}\,\psi(y).$$

Ainsi pour vérifier l'une des deux équations $\varphi_2(y) = \beta^h\varphi(\rho^i y)$, $\varphi_2(y) = \beta^h\varphi_1(\rho^i y)$, on devrait vérifier, en donnant aux exposants i et h des valeurs entières, l'un des deux systèmes d'équations:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \rho = \beta^h\rho^i\left\{\dfrac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta\right\} \quad \text{et} \quad \dfrac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} = \beta^h.\rho^{-i}. \\ \text{ou bien,} \\ \dfrac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \rho = -\beta^h\rho^i\dfrac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} \quad \text{et} \quad \dfrac{-\beta}{\rho - \frac{1}{\rho}} = \beta^h\rho^{-i}\left\{\dfrac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} - \beta\right\}. \end{array}\right.$$

Or chacun de ces deux systèmes est impossible, et par conséquent les 12 valeurs de z renfermées dans le tableau précédent n'ont aucun rapport constant entre elles deux à deux. Le nombre total des valeurs de z et par conséquent le degré n de l'équation, serait au moins égal à 6×12, Or cela est impossible, puisque nous avons démontré que, si les racines de l'équation $F(y)=0$ ne sont pas toutes comprises dans les deux expressions $\rho^i y$ et $\rho^i \psi(y)$, on aura $n=8\times 6$. On ne peut donc pas supposer que l'équation $F(y)=0$ ait une racine, dont le rapport avec y ne soit pas constant, et qui ne vérifie pas l'équation $\theta^2(y)=-y$. C. Q. F. D.

15.me *Théorème*

« Si $\mu=10$, l'équation $F(y)=0$ n'aura aucune racine dont le rapport avec y ou avec $\psi(y)$ ne soit pas constant. »

Démonstration. Soit $\theta(y)=a\,y+b\,\psi(y)$ (1)

une racine quelconque de l'équation $F(y)=0$, je veux démontrer que si b n'est pas nul, a le sera nécessairement, *c. à .d.* que $\theta(y)$ aura nécessairement un rapport constant avec y ou avec $\psi(y)$.

Si b n'est pas nul, on aura comme dans le théorème précédent

$$a=\frac{\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)-\frac{1}{\rho}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)}\text{(E)},\ \text{et}\ \left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\left(\beta_1+\frac{1}{\beta_1}\right)+\left(\beta_{-1}+\frac{1}{\beta_{-1}}\right)\ (a)$$

ρ est une racine primitive de l'équation $x^{10}=1$, β, β_1, β_{-1} sont ou des puissances de ρ, ou des racines de l'une des deux équations $x^2=-1$, $x^3=\pm 1$. Si $\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=0$, quelle que soit la racine $\theta(y)$ pour la quelle b n'est pas nul dans la formule (1), on aura en même temps $a=0$, et notre théorème est démontré.

Si les racines de l'unité β, β_1, β_{-1} ne vérifient par toutes l'équation $\beta+\frac{1}{\beta}=0$, l'une d'elles au moins sera une puissance de ρ; car autrement la formule (a) donnerait pour $\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ une valeur rationnelle. La racine correspondante $\theta(y)$ vérifiera donc l'équation $\theta^5(y)=\pm y$. Du reste comme $\theta(-y)=-\theta(y)$, si l'on a $\theta^5(y)=y$, en posant $\theta(-1)(y)=\theta_1(y)$, on aura $\theta_1^5(y)=-y$.

Donc, si parmi les racines de l'équation $F(y)=0$, il y en avait une pour laquelle dans la formule (1) aucune des deux constantes a et b ne fût nulle, il y en aurait nécessairement une qui satisferait à l'équation $\theta^5(y)=-y$. Or nous allons démontrer que cela est impossible.

Si $\theta^5(y) = -y$, la valeur de β dans la formule $\theta^2(y) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \theta(y) - y$ sera une racine primitive de l'équation $x^{10} = 1$, et par conséquent $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ aura l' une des deux valeurs $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)$.

1.° Soit $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, et cherchons quelles peuvent être les valeurs correspondantes de a. La formule (a) devient

$$\pm\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\right) = \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho} + 1\right) = \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + \left(\beta_{-1} + \frac{1}{\beta_{-1}}\right).$$

Chacun des binômes du second membre ne peut avoir que l'une des sept valeurs, $0, \pm 1, \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \pm\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)$; or l'on reconnait aisément que $\left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)$ ne peut avoir que l'une des valeurs ± 1, $\pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, le signe étant ici le même que dans la formule $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$. En substituant ces valeurs dans la formule (E) on reconnait que la constante a ne peut avoir que l'une des valeurs suivantes

$$\frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \text{ ou } \frac{\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \text{si} \quad \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = +\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{-\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} \text{ ou } \frac{-\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \text{si} \quad \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right).$$

2.° Soit $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)$. Si dans la formule (4) (5.me théorème) nous donnons à m deux valeurs m et $2m$, l'élimination de $\theta(y)$ entre les deux équations ainsi obtenue donnera, en remplaçant ρ par β

$$\theta^{2m}(y) = \left(\beta^m + \frac{1}{\beta^m}\right)\theta^m(y) - y. \quad (5)$$

Faisons $m = 2$, $m = 3$; en remarquant que dans le cas présent,

$$\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \left(\rho^6 + \frac{1}{\rho^6}\right) = -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad \text{et} \quad \beta^3 + \frac{1}{\beta^3} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),$$

nous aurons

$$\theta^4(y) = -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\theta^2(y) - y, \quad \text{et} \quad \theta^6(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\theta^3(y) - y.$$

si donc nous posons $\theta^2(y) = a_2\, y + b_2\, \psi(y)$, $\theta^3(y) = a_3\, y + b_3\, y$, il résulte de ce que nous avons démontré précédemment (1°) que l'on aura

$$\left\{\begin{array}{lll} a_2 = \dfrac{-\rho^2}{\rho - \dfrac{1}{\rho}} & \text{ou} & a_2 = \dfrac{-\rho^3}{\rho - \dfrac{1}{\rho}} \\[2ex] a_3 = \dfrac{+\rho^2}{\rho - \dfrac{1}{\rho}} & \text{ou} & a_3 = \dfrac{+\rho^3}{\rho - \dfrac{1}{\rho}}. \end{array}\right.$$

Or les deux formules

$$\theta^2(y) = \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^3}\right)\theta(y) - y \quad \text{et} \quad \theta^3(y) = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)\theta^2(y) - \theta(y),$$

jointes à la formule (1) donnent

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^2(y) = \left\{\left(\rho^3 + \dfrac{1}{\rho^3}\right)a - 1\right\}y + \left(\rho^3 + \dfrac{1}{\rho^3}\right)b\,\psi(y) \\[2ex] \theta^3(y) = \left\{\left(\rho^3 + \dfrac{1}{\rho^3}\right)a_2 - a\right\}y + \left\{\left(\rho^3 + \dfrac{1}{\rho^3}\right)b_2 - b\right\}\psi(y). \end{array}\right.$$

On a donc

$$a_2 = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)a - 1 \quad \text{et} \quad a_3 = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)a_2 - a.$$

En éliminant a entre ces deux équations et remarquant qu'on a

$$\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right) = -\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) = 1 - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),$$

On trouve

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{\left(\rho^2 + \dfrac{1}{\rho^2}\right)}.$$

En donnant à a_3 et à a_2 toutes les valeurs comprises dans le tableau précédent, on obtient les trois équations suivantes

$$2\rho^2 = \frac{\rho - \dfrac{1}{\rho}}{\rho^2 + \dfrac{1}{\rho^2}}, \quad 2\rho^3 = \frac{\rho - \dfrac{1}{\rho}}{\rho^2 + \dfrac{1}{\rho^2}}, \text{ et } \frac{\rho^2 + \rho^3}{\rho - \dfrac{1}{\rho}} = \frac{1}{\rho^2 + \dfrac{1}{\rho^2}} \text{ ou } \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho^2 + \dfrac{1}{\rho^2}}\right).$$

On reconnait aisément que ces équations sont impossibles. Il est donc impossible que parmi les racines de l'équation $F(y)=0$, dont le rapport avec y n'est pas constant, il y en ait une qui vérifie la formule

$$\theta^2(y)=\left(\rho^3+\frac{1}{\rho^3}\right)\theta(y)-y.$$

Or, s'il y en avait une qui vérifiat la formule $\theta^2(y)=\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\theta(y)-y$; la racine $\theta^3(y)$ vérifierait la formule précédente. Il n'y en a donc aucune qui vérifie l'une de ces deux formules, et par conséquent il n'y en a aucune qui satisfasse à l'équation $\theta^5(y)=-y$. Or nous avons vu plus haut que, si l'équation $F(y)=0$ admettait une racine qui n'eût de rapport constant ni avec y ni avec $\psi(y)$, il y en aurait nécessairement une qui vérifierait l'équation $\theta^5(y)=-y$. Donc etc... C.Q.F.D

16.me *Théorème.*

« Si l'intégrale générale de l'équation $\frac{d^2 y}{d x^2}=Py$ est algébrique, il y aura toujours un intégrale particulière y, telle que la fonction t ou $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ soit une fonction rationnelle de x, ou une racine d'une équation du second ou du quatrième degré. »

Démonstration. Pour vérifier cette assertion il suffit de prendre pour intégrale particulière l'une quelconque des racines de l'équation $F(y)=0$ définie dans la 1.re remarque du théorème 8.me En effet, si le plus grand commun diviseur μ des exposants de y dans $F(y)$ n'est égal à aucun des trois nombres 6, 8, 10, nous avons vu (12.me théorème) que toute racine $\theta(y)$ qui n'a pas avec y un rapport constant vérifie l'équation $\theta^2(y)=-y$. Si donc nous désignons par $ay+b\,\psi(y)$ une racine quelconque do l'équation $F(y)=0$, dont le rapport avec y ne soit pas constant, on conclura de la formule (E) du 8.me théorème, que la constante a est nulle. Ainsi toutes les racines de l'équation $F(y)=0$, seront de l'une des deux formes ay ou $b\,\psi(y)$. La fonction t ou $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$ considérée comme fonctions des racines de l'équation $F(y)=0$, n'aura que deux valeurs, et par conséquent elle sera déterminée par une équation algébrique du second degré.

De même si $\mu=8$, toutes les racines de l'équation $F(y)=0$, dont le rapport avec y n'est pas constant, satisfont à l'équation $\theta^2(y)=-y$ (14.me théorème); on en conclut comme précédemment qu'elles doivent être de la forme $b\,\psi(y)$, et que la fonction t est déterminée par une équation du second degré.

Si $\mu=10$, le 15.me théorème démontre que toutes les racines de l'équation

$F(y)=0$ sont de l'une des deux formes ay ou $b\psi(y)$. On en conclut comme dans les cas précédents que la fonction t n'a que deux valeurs, et qu'ainsi elle est racine d'une équation du second degré.

Donc, si μ a une valeur quelconque autre que 6, la fonction t ou $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ sera ou une fonction rationnelle de x, ou une racine d'une équation algébrique du second degré.

D'ailleurs si $\mu=6$ et que l'équation $F(y)=0$ ait quelques racines dont le rapport avec y ne soit pas constant, nous avons démontré au 13.me théorème que la fonction t est déterminée par une équation algébrique du second ou du quatrième degré. Le théorème énoncé est donc démontré.

Conclusion.

« Comme la fonction t vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dx}+t^2=P \qquad (3)$$

on voit en unissant le théorème précédent à la conclusion de la première partie de ce mémoire, que le problème proposé, de décider si une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels et sans second membre peut ou ne peut pas s'intégrer sous forme finie, est ramené au problème suivant:

« Décider si l'équation différentielle $\frac{dt}{dx}+t^2=P$, où P désigne une fonction rationnelle de x, peut être satisfaite par une valeur de t, rationnelle, ou racine d'une équation algébrique du second ou du quatrième degré. »

La solution générale de ce problème, et l'application de cette solution à quelques cas particuliers, notamment à ceux qui ont été traités par M. Liouville, feront l'objet d'un second mémoire.

Note. Nous avons dit (11.me théorème) que si m_0 n'a aucune des valeurs 2, 3, 4 ou 6 on pourra toujours déterminer deux nombres premiers avec m, de la forme $l=1+\theta\mu$, $l'=1+y.\frac{4m}{a\mu}$, tels qu'aucun des deux nombres $l+1$, $l-1$, ne soit divisible par $\frac{4m}{a\mu}$, et qu'aucun des deux nombres $l'+1$, $l'-1$, ne soit divisible par μ. En voici la démonstration.

m désigne le plus petit commun multiple des quatre nombres μ, m_0, m_1, m_{-1} m_0 ne peut avoir avec μ aucun diviseur commun autre que 2 ou 4; les deux nombres m_1, m_{-1} sont ou des diviseurs de μ, ou des nombres qui n'ont avec μ aucun diviseur commun autre que 2 ou 4; a désigne le plus petit des trois nombres

1, 2, 4 pour lequel le quotient $\frac{a\mu}{4}$ est entier; $\frac{4}{a}$ sera donc toujours un multiple du plus grand commun diviseur des deux nombres m_0 et μ, et par conséquent le plus petit multiple commun de ces deux nombres sera $m_0 \times \frac{a\mu}{4} \times b$, ($m_0 b$ et μ n'auront aucun diviseur commun autre que 2 ou 4); et, puisque les deux nombres m_1 et m_{-1} sont ou des diviseurs de μ, ou des nombres qui n'ont avec μ aucun diviseur commun autre que 2 ou 4, on aura $m = m_0 \times \frac{a\mu}{4} \times p$, et le nombre $m_0 \times p$ n'aura avec $\frac{a\mu}{4}$ aucun diviseur commun autre que 2, ou 4.

1° Posons
$$l = 1 + \theta\mu = u + \theta' \frac{4m}{a\mu} \qquad (1)$$
d'où
$$(u - 1) = \theta\mu - \theta' \frac{4m}{a\mu} = \theta\mu - \theta' \times m_0 \times p \qquad (2).$$
Si $m_0 p$ n'est pas divisible par 5, on prendra $u = 5$, $u - 1 = 4$ sera nécessairement multiple du plus grand diviseur commun des deux nombres μ et $m_0 \times p$, et par conséquent on pourra trouver deux nombres entiers θ et θ' qui vérifieront l'équation (2). Or, la valeur correspondante de l sera première avec m; car la première forme de l montre que ce nombre est premier avec μ; la seconde forme montre que l ne pourrait avoir avec $\frac{4m}{a\mu} = m_0 p$, aucun diviseur commun autre que $u = 5$, mais comme $m_0 p$, par hypothèse est premier avec 5, il s'en suit que l est premier avec tous les diviseurs de m. Enfin comme on a
$$l \pm 1 = 5 \pm 1 + \theta' \frac{4m}{a\mu} = 5 \pm 1 + \theta' . m_0 \times p,$$
aucun des deux nombres $l \pm 1$ n'est divisible par $\frac{4m}{a\mu}$ ou $m_0 \times p$, puisque nous supposons que m_0 est > 4 et n'est pas égal à 6.

Si $m_0 p$ est divisible par 5, on prendra $u = 20 . n + 13$, le nombre n étant choisi de telle sorte que u soit premier avec $m_0 \times p$, ce qui est possible d'une infinité de manières, puisque 20 et 13 sont premiers entre eux. Aucun des deux nombres $u + 1$, $u - 1$, ne sera divisible par 5, et l'on verra comme dans le cas précédent que le nombre l satisfait à toutes les conditions énoncées ci-dessus.

2° Posons
$$l' = 1 + y . m_0 p = u + y' . \mu \qquad (3)$$
d'où
$$u - 1 = y . m_0 . p - y' . \mu . \qquad (4)$$

On verra, comme dans le cas précédent, que, μ étant > 6, et les deux nombres $m_o \times p$ et μ, n'ayant aucun diviseur commun autre que 2 ou 4, on satisfera à l'équation (4) par une valeur première avec μ et telle qu'aucun des deux nombres $u+1$, $u-1$, ne soit divisible par μ, en prenant $u=5$, ou $u=20.n+13$, suivant que μ est premier avec 5 ou divisible par 5. On verra de même que la valeur correspondante de l' satisfait à toutes les conditions énoncées ci-dessus.

On peut donc toujours trouver deux nombres l, l' qui satisfassent à toutes les conditions énoncées dans le 11.me théorème.

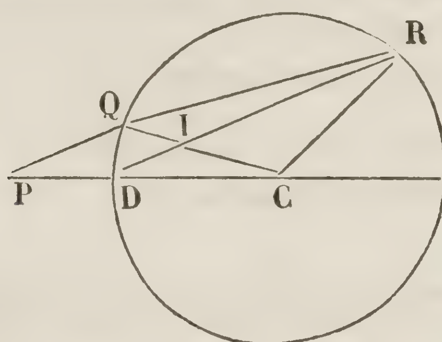
St Etienne, 4 novembre 1862.

LETTERA DEL SIG. W. ROBERTS ALL' EDITORE.

Cher Mr. Tortolini.

Voici une construction geometrique des transformations des *Jacobi* des fonctions elliptiques F, pour le cas ou le nombre p a 3 pour valeur.

Soient C le centre d'un cercle, dont le rayon est égal à a, et P un point fixe, pris extérieurement au cercle dont nous désignons la distance CP au centre par c



Ayant fait passer par P une droite quelconque, rencontrent au cercle dans les deux points Q, R menons CQ, CR, DR, et I le point de rencontre de CQ avec DR. Designons l'angle CDR par φ, et CIR par ψ. Alors les angles φ, et ψ satisfont à la relation du premier théoreme de *Jacobi* pour $p = 3$, c'est à dire nous avons

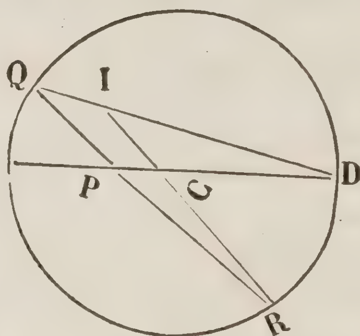
$$\tang \tfrac{1}{2} (\psi - \varphi) = \frac{c - a}{c + a} \tang \varphi$$

et le théorème nous donnera la relation remarquable à cause de la symetrie.

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(c + a)^3 (3c - a) \cos^2 \varphi + (c - a)^3 (3c + a) \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(c + a) (3c - a)^3 \cos^2 \psi + (c - a) (3c + a)^3 \sin^2 \psi}}$$

Pour le second théorème il faut prendre le point P dans l'interieur du cercle comme dans la figure



Soient CD le rayon egal à a et CP egal à c. Ayant tiré une droite quelconque par P rencontrent la circonference en, Q, R, menons les droites RC, DQ, et soit I le point de rencontre de CR avec DQ.

Soient CDQ $= \varphi$, CID $= \psi$, et nous aurons

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(\psi + \varphi) = \frac{a+c}{a-c}\ \text{tang}\ \varphi$$

et le second théorème de *Jacobi* nous donnera

$$\frac{d\,\varphi}{\sqrt{(a-c)^3\,(a+3\,c)\,\cos^2\varphi + (a+c)^3\,(a-3\,c)\,\sin^2\varphi}}$$

$$= - \frac{d\,\psi}{\sqrt{(a-c)\,(a+3\,c)^3\cos^2\psi + (a+c)\,(a-3c)^3\sin^2\psi}}$$

Cette construction ne dependent que du cercle, est plus simple que celle que j'ai donnée dans les Nouvelles Annales de Mathematiques et que vous avez inserée dans votre excellent Recueil (tom. III. pag. 179.)

College de la Trinité à Dublin

Le 21 *Novembre* 1863.

SULLA PROJEZIONE IPERBOLOIDICA DI UNA CUBICA GOBBA

NOTA

DEL

PROF. LUIGI CREMONA.

Lemma 1.° Se K è la conica polare di un punto θ rispetto ad un trilatero (i cui vertici siano $a\,b\,c$) risguardato come una linea del terz'ordine — cioè se K è la conica circoscritta al trilatero e tangente nei vertici a quelle rette che insieme colle $a\theta$, $b\theta$, $c\theta$ ne dividono armonicamente gli angoli — ciascuna delle tangenti condotte per θ alla conica medesima forma colle rette $\theta\,(a, b, c)$ un sistema equianarmonico (*).

Lemma 2.° Due fasci projettivi (in uno stesso piano), l'uno di semplici rette, l'altro di coppie di rette in involuzione, abbiano lo stesso centro θ; e siano $\theta\omega_1$, $\theta\omega_2$ i raggi doppi del secondo fascio, e θa, θb, θc i raggi *comuni* (**) ai due fasci. Se ciascuno dei primi due raggi forma cogli ultimi tre un sistema equianarmonico, in tal caso ai raggi $\theta\omega_1$, $\theta\omega_2$ del secondo fascio corrispondono nel primo i raggi $\theta\omega_2$, $\theta\omega_1$ rispettivamente.

1. Sia data una cubica gobba, curva cuspidale di una superficie sviluppabile di terza classe. Data inoltre una retta R, un piano π condotto ad arbitrio per essa sega la cubica in tre punti p, q, r, vertici di tre coni (di secondo grado) prospettivi alla curva. Se le rette $q\,r$, $r\,p$, $p\,q$ incontrano R in p', q', r', e se il piano π si fa girare intorno alla retta data, la terna $p'\,q'\,r'$ genera un'involuzione di terzo grado, ove le coppie $q'r'$, $r'p'$, $p'q'$ sono le intersezioni di R coi coni anzidetti. L'involuzione ha quattro punti doppi (***), in ciascun de' quali R tocca un cono prospettivo: i punti corrispondenti sono le intersezioni di R con altrettante tangenti della cubica. Dunque *per un punto arbitrario dello spazio passano due coni prospettivi, ed una retta arbitraria ne tocca quattro.*

2. Un dato piano Π seghi la cubica gobba ne' punti $a\,b\,c$. Il cono prospettivo alla curva ed avente il vertice in un punto s della medesima ha per traccia su quel piano una conica S circoscritta ad abc (****). Sia σ il polo di questa conica rispetto al trilatero $a\,b\,c$, risguardato come una linea del terz'ordine; Σ la retta polare di σ rispetto al trilatero, o (ciò che qui torna lo stesso) rispetto alla conica S.

(*) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 27.
(**) *Ibid.* 24, b.
(***) *Ibid.* 22.
(****) Nouv. Annales de Math. 2e série, t. 1er, Paris 1862, p. 291.

3. L'inviluppo delle coniche S è la curva W di quart'ordine e terza classe, secondo la quale il piano Π sega la sviluppabile formata dalle tangenti della cubica. La curva W ha tre cuspidi ne'punti *abc*, e tocca la conica S nel punto d'incontro del piano Π colla retta tangente alla cubica in *s*.

4. Quale è il luogo dei punti σ? Sia Λ una trasversale arbitraria (nel piano Π); λ il polo di questa retta. Ogni punto di Λ ha la sua conica polare passante per λ, dunque i punti σ in Λ saranno tanti quanti i coni prospettivi passanti per λ, cioè *due*. Perciò *il luogo del punto σ è una conica* K.

Fra le coniche prospettive (basi dei coni prospettivi sul piano Π) vi sono tre coppie di rette (ab, ac), (bc, ba), (ca, cb), i cui poli σ sono a, b, c; dunque *la conica* K *è circoscritta al trilatero* abc.

5. Sia θ il polo della conica K; le rette Σ polari dei punti di K (ossia dei poli delle coniche prospettive) passeranno tutte per θ (*). Le rette θa, θb, θc fanno evidentemente l'ufficio di rette polari dei punti a, b, c.

Condotta ad arbitrio una retta Δ per θ, il polo di essa è un punto δ di K; e le due coniche prospettive passanti per δ hanno i loro poli nelle intersezioni di K con Δ. Siano Γ, Γ' le rette polari di questi due punti.

Variando Δ, le rette Γ, Γ' generano un fascio involutorio e projettivo al fascio semplice delle rette Δ. I raggi *comuni* de'due fasci sono evidentemente θa, θb, θc; cioè ciascuno di questi raggi, risguardato come retta Δ, coincide con una delle corrispondenti rette Γ, Γ'.

I raggi doppi del fascio involutorio corrisponderanno alle rette Δ tangenti a K; ma se Δ tocca K, anche le due coniche prospettive passanti per δ coincidono, epperò δ sarà un punto dell'inviluppo W.

Ciascuna delle due rette Δ_1, Δ_2 tangenti a K forma (*lemma* 1°) colla terna θ (a, b, c) un sistema equianarmonico; cioè nei due fasci projettivi, l'uno semplice, l'altro doppio involutorio, i tre raggi *comuni* formano con ciascuno dei raggi doppi del secondo fascio un sistema equianarmonico. Dunque (*lemma* 2°) ai raggi doppi Δ_1, Δ_2 dell'involuzione corrispondono nel fascio semplice le stesse rette Δ_2, Δ_1 prese in ordine inverso. Cioè, se ω_1, ω_2 sono i punti in cui K è toccata dalle tangenti per θ (ossia segata dalla retta polare di θ), le rette polari di ω_1, ω_2 sono rispettivamente $\theta\omega_2$, $\theta\omega_1$. Ond'è che per ciascuno de'punti ω_1, ω_2 passano la retta polare e la conica polare dell'altro; ossia la retta $\omega_1\omega_2$ tocca in ω_1, ω_2 le coniche polari dei punti ω_2, ω_1.

Ma i punti ω_1, ω_2 appartengono anche alla curva W, che ivi sarà toccata dalle

(*) *Introd.* 130.

coniche prospettive che vi passano: dunque *la retta* $\omega_1 \omega_2$ *tocca in* ω_1, ω_2 *la curva* W, vale a dire è la sua tangente doppia.

In altre parole, $\omega_1 \omega_2$ è l'intersezione di due piani osculatori della cubica, i cui punti di contatto 0_1, 0_2 sono i vertici di due coni prospettivi aventi per basi sul piano Π le coniche polari dei punti ω_1, ω_2; e le tangenti alla cubica in 0_1, 0_2 sono le rette $0_1 \omega_2$, $0_2 \omega_1$.

Da ciò segue che θ è il punto di concorso delle tangenti alla curva W nelle cuspidi a, b, c (*). Inoltre le coniche polari di ω_1, ω_2 passano entrambe per θ ed ivi sono rispettivamente toccate dalle rette $\theta \omega_1$, $\theta \omega_2$.

6. Assunti come *corrispondenti* i punti s, σ, la cubica gobba e la conica K sono due forme projettive, e *la superficie luogo della retta* $s \sigma$ *è un iperboloide* J. Infatti, siccome ad ogni punto di K corrisponde un solo punto della cubica, così K è una linea *semplice* della superficie, e nessuna generatrice di questa può giacere nel piano Π; cioè K è la *completa* intersezione della superficie con Π. Dunque la superficie di cui si tratta è del second'ordine.

Questa superficie incontra la retta $\omega_1 \omega_2$ nei punti in cui questa è tangente alla data sviluppabile (osculatrice della cubica gobba); dunque l'iperboloide J non cambia, quando il piano Π si faccia ruotare intorno a quella retta.

7. Siccome l'iperboloide J passa pei punti ω_1, ω_2, così esso contiene le tangenti $0_1 \omega_2$, $0_2 \omega_1$ della cubica, epperò coincide coll'iperboloide inviluppato dai coni *congiunti*, i cui vertici sono nella retta $0_1 0_2$; ossia, mentre le rette $s \sigma$ sono le generatrici di un sistema, quelle dell'altro sono le rette che uniscono a due a due i punti corrispondenti in cui la cubica è segata dalle coppie di piani congiunti passanti per $\omega_1 \omega_2$ (**).

L'identità dei due iperboloidi risulta anche dalla seguente considerazione. La retta che tocca in σ la conica K è la polare del punto σ relativa alla conica polare del punto θ, ossia (***) la polare del punto θ relativa alla conica polare del punto σ. Dunque *la conica* K *è l'inviluppo delle rette polari del punto* θ *relative alle coniche prospettive.*

8. Assunte come *corrispondenti* la retta $s \sigma$ e la tangente in s alla cubica gobba, l'iperboloide J e la sviluppabile data sono due sistemi projettivi di rette. Quale è l'inviluppo del piano che contiene due rette corrispondenti? Siccome il piano che tocca l'iperboloide in s contiene anche la tangente della cubica gobba in quel punto, così l'inviluppo richiesto sarà il sistema polare reciproco della data cubica rispetto

---

(*) Annali di Matematica, t. I, Roma 1858, p. 160.
(**) Nouv. Ann. *ut supra*, p. 302.
(***) *Introd.* 130, b.

all'iperboloide, vale a dire sarà *una superficie sviluppabile di terza classe*, circoscritta all'iperboloide lungo la cubica gobba.

9. Siano l, l_1 due punti della cubica; x il punto in cui la retta $l\,l_1$ incontra il piano Π. Le coniche intersezioni di questo piano coi due coni prospettivi, i cui vertici sono l, l_1, passano entrambe per x, onde la retta polare di x passerà pei poli di quelle due coniche, cioè pei punti λ, λ_1 della conica K, corrispondenti ad l, l_1. Donde segue che *le tangenti della conica* K *sono le polari dei punti della curva* W.

Descritta ad arbitrio una conica per $a\,b\,c$, essa segherà la curva W in due altri punti w, w_1, piedi di due tangenti della cubica. Se l, l_1 sono i punti di contatto di tali tangenti, ne'corrispondenti punti λ, λ_1 la conica K sarà toccata dalle rette polari di w, w_1; e queste polari concorreranno nel polo della conica $abcww_1$. Per questa conica e per la cubica passa un iperboloide che contiene le due tangenti $w\,l$, $w_1\,l_1$, le quali separatamente giacciono anche nei due coni prospettivi i cui vertici sono l, l_1, e le cui sezioni col piano Π toccano la curva W rispettivamente in w, w_1.

Per tal guisa, come ogni punto della conica K individua un cono prospettivo, così un punto qualunque del piano Π (non situato nella conica anzidetta) individua un iperboloide passante per la cubica: iperboloide che sega il piano Π secondo la conica polare del punto che si considera.

10. Pei punti $a\,b\,c$ si può descrivere un circolo; dunque *per la cubica gobba passa un iperboloide* (un solo) *segato secondo circoli dei piani paralleli a* Π.

Se due de'tre punti $a\,b\,c$ fossero i punti circolari all'infinito del piano Π, tutte le coniche descritte per $a\,b\,c$ sarebbero circoli, cioè tutte le superficie di second'ordine passanti per la cubica gobba avrebbero una serie di sezioni cicliche parallele al piano Π.

11. Un piano Π_1 seghi la cubica in tre punti $a_1\,b_1\,c_1$; il triangolo $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ (inscritto in K) formato dai punti corrispondenti ad $a_1\,b_1\,c_1$, sarà circoscritto alla poloconica (*) della retta $\Pi\Pi_1$, perchè le rette $\beta_1\,\gamma_1$, $\gamma_1\,\alpha_1$, $\alpha_1\,\beta_1$ sono le polari dei punti in cui $\Pi\Pi_1$ è incontrata dalle $b_1\,c_1$, $c_1\,a_1$, $a_1\,b_1$. Ond'è che tutt'i triangoli, analoghi ad $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$, nascenti da piani che seghino Π secondo una medesima retta Λ, sono inscritti in K e circoscritti ad una stessa conica: la poloconica di Λ.

Viceversa, si inscriva nel trilatero $a\,b\,c$ una conica L: essa è la poloconica di quella retta Λ che coi punti di contatto di L divide armonicamente i lati bc, ca, ab; e i vertici degli infiniti triangoli inscritti in K e circoscritti ad L corrispondono a terne di punti comuni alla cubica ed a piani passanti per Λ: cioè ogni corda di K,

(*) *Poloconica* di una retta data rispetto ad una linea del terz'ordine è la conica inviluppata dalle rette polari dei punti della retta data relative alla linea suddetta (*Introd.* 136).

tangente ad L, corrisponde ad una corda della cubica, incontrante A. Le quattro tangenti comuni a K e ad L corrisponderanno quindi alle quattro tangenti della cubica incontrate da A; e le corde della cubica situate ne'piani tangenti alla medesima che passano per A, corrisponderanno alle rette che toccano L ne'punti comuni a K.

Se per la retta A passa un piano osculatore della cubica, cioè se A è una tangente della curva W, la conica L toccherà K nel punto che corrisponde al contatto della cubica col piano osculatore.

Finalmente, la poloconica T della retta $\omega_1 \omega_2$, tangente doppia della curva W, ha doppio contatto in $\omega_1 \omega_2$, colla conica K.

12. Se la retta $l\, l_1$ (9) incontra il piano Π in un punto x della conica K, cioè se $l l_1$ è una generatrice (del secondo sistema) dell' iperboloide J (7), i punti l, l_1 appartengono rispettivamente a due piani *congiunti* passanti per la retta $\omega_1 \omega_2$. Ma d'altronde (5) la retta $\lambda \lambda_1$ passa, in questo caso, pel punto θ; dunque, se si inscrive in K un triangolo $\lambda \mu \nu$ che sia circoscritto alla conica T, e se le rette $\theta \lambda$, $\theta \mu$, $\theta \nu$ incontrano di nuovo K in λ_1, μ_1, ν_1, anche il triangolo $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ sarà circoscritto a T, e i due triangoli $\lambda \mu \nu$, $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ corrisponderanno alle intersezioni lmn, $l_1 m_1 n_1$ della cubica con due piani congiunti passanti per la retta $\omega_1 \omega_2$.

13. Rappresentati per tal modo sul piano Π i punti della cubica data, molti problemi relativi a questa si tradurranno in ricerche più facili relative alla conica K, che può chiamarsi *la projezione iperboloidica* della cubica medesima. Evidentemente questa conica può ottenersi da qualunque iperboloide passante per la cubica, purchè il piano segante Π passi per l'intersezione de'due piani osculatori della cubica contenenti quelle tangenti di essa che sono anche generatrici dell'iperboloide medesimo.

Bologna, 26 ottobre 1863.

PUBBLICAZIONI RECENTI

Böklen O. – Analytische Geometrie des Raumes. *Stuttgart,* 1861.
Timmermans. – Traité de mécanique rationnelle. *Gand,* 1862.
Timmermans. – Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. *Gand,* 1862.
Baltzer R. – Die Elemente der Mathematik 2 vol. *Leipzig,* 1860–62.
Fiedler W. – Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. *Leipzig,* 1862.
Clebsch A. – Theorie der Elasticität fester Körper. *Leipzig,* 1862.
Weissenborn H. – Die Projection in der Ebene. *Berlin,* 1862.

Le Besgue. – Introduction à la théorie des nombres. *Paris,* 1863.

Bordoni A. – Memorie postume pubblicate dall'Istituto Lombardo (Sull'equilibrio astratto delle volte — Sulle svolte delle strade.) *Milano,* 1863.

Prym F. A. Theoria nova functionum ultra-ellipticarum. Pars I. *Berolini,* 1863.

Hermite C. – Uebersicht der Theorie der elliptischen Funktionen. Aus dem Franzosischen übertragen und mit einem Anhange versehen von L. Natani. *Berlin,* 1863.

Voizot. – Mémoire sur la mécanique celeste etc. *Paris,* 1863.

De Gasparis A. – Sulla determinazione delle orbite planetarie. *Napoli,* 1863.

Betti E. – Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa. *Pisa,* 1863.

Stammer W. – Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene *München,* 1863.

Joachimsthal F. – Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. *Berlin,* 1863.

Sedillot – Courtes observations sus quelques points de l'histoire de l'astronomie et des mathématiques chez les Orientaux. *Paris,* 1863.

Painvin. – Propriétés des points d'inflexion des courbes du 3e ordre et des points de rebroussement des courbes de la 3e classe *(Extrait des Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille).*

Salmon G. – A treatise on conic sections etc. Fourth edition. *London,* 1863.

Martus. – Kegelschnittkantige Pyramiden und curvenkantige Prismen von krummen Seitenflächen begrenzte Körper, welche sich kubiren lassen. *Berlin,* 1863.

Neumann. – Die Umkehrung der Abelschen Integrale. *Halle,* 1863.

Wharton. – Complete solutions of every class of examples in algebra. *London,* 1863.

Beltrami E. – Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono. *Bologna,* 1863.

Chelini D. – Sulla teoria de'sistemi semplici di coordinate e sulla discussione dell'equazion generale di 2° grado in coordinate triangolari e tetraedriche. *Bologna,* 1863.

Cremona L. – Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Bologna,* 1863.

Janni V. – Trattato elementare di geometria analitica. *Napoli,* 1862-63.

Rubini R. – Complemento agli elementi d'algebra. *Napoli,* 1863.

Battaglini G. – Sulle involuzioni dei diversi ordini. *Napoli,* 1863.

Mossotti O. F. Teoria ed applicazioni delle funzioni circolari ed iperboliche = *Pisa,* 1863. (Memoria postuma inserita nel tomo 6° degli *Annali delle Università Toscane,* con note ed aggiunte del prof. A. Forti; essa serve di prefazione alle « Tavole di logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche » costruite dallo stesso prof. Forti e pubblicate in *Pisa*).

Novi G. – Trattato di Algebra superiore. Parte I^{a} Analisi Algebrica. *Firenze,* 1863.

Poudra. – Oeuvres de Desargues – Deux tomes. *Paris,* 1864.



SULLA RISOLVENTE DI MALFATTI PER LE EQUAZIONI DEL QUINTO GRADO (*)

MEMORIA

DI FRANCESCO BRIOSCHI

Le scienze matematiche ebbero in Italia, nella seconda metà del secolo scorso, valentissimi cultori, le opere delle quali, poco note fra noi, sono quasi sconosciute presso gli stranieri. La storia delle matematiche in questo periodo di tempo è così strettamente legata a quella delle nostre accademie scientifiche, che soltanto frugando con diligenza negli atti della Società italiana delle scienze, in quelli delle Accademie di Torino, di Bologna, dei Fisiocritici di Siena, ec., possiamo formarci un chiaro concetto del fiorire fra noi di questi studj in quell' epoca. Rinveniamo infatti in quegli atti, oltre i primi lavori del sommo Lagrange, e la maggior parte dei lavori matematici del Ruffini, quelli del Paoli, del Malfatti, del Manfredi, del Fontana, del Saladini, del Lorgna, di quella schiera, cioè, di matematici, i quali o precedettero di poco tempo, od ebbero parte all' educazione scientifica dei nostri egregi colleghi, il Bordoni, il Mossotti, il Piola, il Belli.

Non v' ha dubbio che un lavoro storico intorno ai progressi delle matematiche in quell' epoca, nel quale si ponesse in evidenza la molta parte che vi ebbero gl' Italiani, sarebbe non solo utile dal lato scientifico, ma per l' Italia tutta, potrebbe ritenersi il soddisfacimento di un debito di gratitudine. Per il che gli è con viva compiacenza che io afferrai l'occasione offertami da alcune recenti ricerche intorno ad un problema, il quale è ora oggetto delle meditazioni dei più insigni geometri, onde intrattenervi di alcuni lavori italiani di quel tempo.

Il problema al quale alludo è quello della risoluzione delle equazioni algebriche. Sono notissime le soluzioni che del medesimo, pei casi speciali delle equazioni del terzo e del quarto grado, diedero il Cardano, il Luigi Ferrari, il Bombelli; ma un tentativo del Malfatti per la risoluzione delle equazioni di quinto grado ed alcuni importanti risultamenti da lui ottenuti, furono talmente dimenticati, che assistiamo

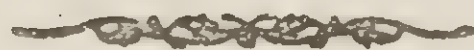
(*) Questa memoria letta nella tornata del 9 Aprile 1863 dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere fu pubblicata nel Volume IX delle Memorie dell'Istituto medesimo. In questa ristampa l'Autore introdusse alcune modificazioni ed aggiunte.

ancora oggi agli sforzi, mercè i quali due geometri inglesi, tentano d'arrivare ai medesimi. La prima Memoria del Malfatti sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado, fu pubblicata nel tomo quarto degli atti dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena dell'anno 1771, ed ha per titolo: *De aequationibus quadrato-cubicis disquisitio analytica.* In essa l'egregio autore, dopo avere dato un nuovo metodo di soluzione delle equazioni dei tre primi gradi; dopo avere cioè, determinato per ciascuna di queste equazioni un'altra equazione inferiore in grado di una unità, denominata da lui risolvente applica lo stesso metodo alle equazioni del quinto grado, e giunge, con un metodo ingegnosissimo di eliminazione, alla effettiva calcolazione della risolvente, la quale presentasi del sestò grado. Non mi è possibile dire con certezza, se il Malfatti avesse una intuizione del risultato al quale pervenne, o si lasciasse condurre puramente dall'analogia; però il sobbarcarsi che egli fece ad un lavoro di calcolo tanto lungo quanto poteva prevedersi dover essere la calcolazione di quella risolvente, e l'insistenza colla quale la condusse a compimento, mi fa supporre che egli avesse la convinzione di poter giungere ad un risultato relativamente non molto complicato, e tale da lasciargli speranza di qualche passo nel problema della risoluzione.

Quasi contemporaneamente a queste Memorie del Malfatti, erano fatte pubbliche, negli Atti dell'Accademia di Berlino, le due Memorie del Lagrange sulla risoluzione delle equazioni, nelle quali erano poste le vere basi di questa teoria, principalmente nei teoremi risguardanti il numero dei valori che una funzione di più variabili può assumere, permutando in modi determinati le variabili stesse. Non molto tempo dopo, cioè nel 1799, era pubblicata in Bologna la *Teoria delle equazioni* del Ruffini, nella quale stabilivasi uno dei teoremi più importanti dell'analisi: la impossibilità della risoluzione per radicali delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto. Il Malfatti concepì dapprima qualche dubbio sulla esattezza del risultato del Ruffini; ed in una Memoria, pubblicata negli Atti della Società italiana pel 1804, si fece ad esporli, appoggiandosi ai risultati da lui ottenuti nelle sue prime ricerche. Questo lavoro del Malfatti diede origine a due bellissime Memorie del Ruffini, anch'esse pubblicate negli Atti della Società italiana, nella prima delle quali, dopo avere tributata la debita lode alla perspicacia mostrata dal Malfatti in quelle sue ricerche, risolve i dubbi proposti dal medesimo; e nella seconda si propone di scoprire *a priori* il perchè la risolvente ottenuta dal Malfatti risulti del sesto grado. Infatti egli giunge a dimostrare, che una radice qualsivoglia della risolvente del Malfatti è una funzione del quarto grado delle radici dell'equazioni di quinto grado proposta; funzione la quale non può assumere che sei valori per tutte le permutazioni delle variabili.

Prima di accennare ad un legame fra la risolvente del Malfatti e quelle equazioni, le quali hanno origine dal problema della trasformazione nella teorica delle funzioni ellittiche, e dalle quali si fa oggi dipendere la risoluzione delle equazioni di quinto grado, citerò i lavori di due geometri inglesi, il Cockle e l'Harley, il primo dei quali nel *Philosophical Magazine*, il secondo nelle Memorie della Società di Manchester, si prefissero la calcolazione di una risolvente identica a quella del Malfatti; ma avendo battuto un'altra via, essendo cioè partiti dai valori delle sei radici della risolvente in funzione delle radici dell' equazione di quinto grado, s' incontrarono in calcolazioni così prolisse, da dover abbandonare il problema generale, ed accontentarsi di ottenere quella risolvente in un caso speciale. Una risolvente che ha molta analogia con quella del Malfatti fu più recentemente calcolata dal Sig. Cayley e pubblicata nel tomo 151 delle Philosophical Transactions della Società Reale.

In questo breve mio lavoro, ripubblico con qualche maggior concisione, il metodo di eliminazione del Malfatti, allo scopo di correggere alcuni errori, probabilmente tipografici, incorsi nella sua prima Memoria e deduco da essa la risolvente del Sig. Cayley (*Nota I*); dimostro in seguito come col mezzo di una facile trasformazione (*Nota II*) riducasi la risolvente di Malfatti ad avere la forma di quella equazione del sesto grado, la quale comprende come casi particolari la equazione del moltiplicatore e le altre equazioni che incontransi nel problema della trasformazione del quinto ordine nella teorica delle funzioni elittiche. Questa trasformata della risolvente del Malfatti conduce quindi alla risoluzione delle equazioni del quinto grado (*Nota III*).



NOTA I.

Della Risolvente del Malfatti.

Considerando l'equazione del quinto grado priva del secondo termine:

$$x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 - 5cx + d = 0,$$

e supponendo con Eulero, che le radici della medesima sieno rappresentate dall' equazioni:

$$x_0 = -(m + p + q + n) \qquad x_1 = -(\alpha m + \alpha^2 p + \alpha^3 q + \alpha^4 n),$$

$$x_2 = -(\alpha^2 m + \alpha^4 p + \alpha q + \alpha^3 n)$$

$$(1) \qquad x_3 = -(\alpha^3 m + \alpha p + \alpha^4 q + \alpha^2 n), \qquad x_4 = -(\alpha^4 m + \alpha^3 p + \alpha^2 q + \alpha n),$$

nelle quali m, p, q, n sono quattro indeterminate, ed α è una radice quinta dell'unità; se con questi valori formasi l'equazione:

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0,$$

e si confrontano i coefficienti delle identiche potenze della x fra queste e la data, si ottengono le quattro equazioni:

$$g + h = a \qquad r + s = b$$

$$t + u + gh - g^2 - h^2 = c \qquad m^5 + n^5 + p^5 + q^5 + 5(g - h)(s - r) = d,$$

nelle quali:

$$g = mn, \qquad h = pq, \qquad r = m^2 q + n^2 p, \qquad s = mp^2 + nq^2.$$

$$(2) \qquad t = m^3 p + n^3 q, \qquad u = mq^3 + np^3.$$

Da queste si deducono facilmente le:

$$ht + gu = rs, \qquad tu = hr^2 + gs^2 - 4h^2 g^2,$$

e quindi:

$$ht - gu = \pm\sqrt{(r^2 s^2 - 4gh^2 r^2 - 4g^2 h s^2 + 16h^3 g^3)};$$

od, indicando con μ il secondo membro si avranno le:

$$t = \frac{rs + \mu}{2h}, \qquad u = \frac{rs - \mu}{2g}.$$

Inoltre essendo:

$$m^5+n^5=\frac{tr-g^2s}{h}, \qquad p^5+q^5=\frac{us-h^2r}{g},$$

si avranno le due equazioni:

$$\mu(g-h)+ars+2g^2h^2-2g^3h-2gh^3-2ghc=0$$

$$\mu(rg^2-sh^2)+rs(rg^2+sh^2)-2g^4hs-2h^4gr-2g^2h^2d+10g^2h^2(g-h)(s-r)=0,$$

delle quali eliminando la μ e ponendo per s il suo valore $b-r$, si ottiene, dopo alcune riduzioni:

$$ar^3-b(a+h)r^2+(2g^4+2h^4-12gh^3-12hg^3+22g^2h^2+c(g^2+h^2)+b^2h)r-$$
$$-(bg^4+bh^4-6bhg^3-6bgh^3+11bg^2h^2+dgh(g-h)+bch^2)=0.$$

La prima di quelle equazioni dà anche la seguente:

$$\mu^2(g-h)^2=(ars+2g^2h^2-2g^3h-2gh^3-2ghc)^2,$$

nella quale ponendo per μ^2 ed s i loro valori si giunge alla:

$$r^4-2br^3+(2g^3+2h^3-agh+b^2+ac)r^2-(g^3+h^3+2g(g-h)^2+ac)br+$$
$$+b^2g(g-h)^2-6g^2h^2(g^2+h^2)+11g^3h^3+gh(g^4+h^4)+c^2gh+2cgh(g^2+h^2)+$$
$$+2cg^2h^2=0.$$

Se in queste equazioni poniamo $gh=v$, e rammentiamo essere $g+h=a$, si hanno le:

$$ar^3-b(a+h)r^2+(2a^4-20a^2v+50v^2-2cv+a^2c+b^2h)r-$$
$$-(a^4b-10a^2bv+25bv^2+adv-2dhv+abch-bcv)=0.$$

$$r^4-2br^3+(2a^3-7av+ac+b^2)r^2-(3a^3b-11abv+8bhv-2a^2bh+abc)r+$$
$$+25v^3-10a^2v^2-6cv^2+a^4v+c^2v+2a^2cv-a^2b^2h-4ab^2v+4b^2hv+a^3b^2=0;$$

ed essendo:

$$h=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-v\right)}, \quad g=\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-v\right)},$$

se da queste due ultime equazioni si elimina la r, si otterrà una equazione, la quale non conterrà che la v ed i coefficienti dell' equazione data, e sarà la risolvente cercata.

Supponiamo dapprima per brevità $b=0$, e ponendo $\lambda=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-v\right)}$, le due

equazioni superiori si ridurranno alle:

$$ar^3 + (50\,v^2 - 20\,a^2 v - 2\,cv + 2\,a^4 + a^2 v)\,r + 2\,\lambda\,dv = 0$$

$$r^4 - (7\,av - 2\,a^3 - ac)\,r^2 + 25\,v^3 - 10\,a^2 v^2 - 6\,cv^2 + (a^2 + c)^2\,v = 0,$$

dalle quali deducesi facilmente la seguente:

$$(50\,v - 13\,a^2 - 2\,c)\,r^2 + 2\,\lambda\,dr = a\,(25\,v^2 - 10\,a^2 v - 6\,cv + (a^2 + c)^2);$$

e da questa e dalla prima delle superiori la:

$$2ad\lambda r^2 - (2500\,v^3 - 1625a^2v^2 - 200cv^2 + 350a^4v + 110a^2cv + 4c^2v - 25a^6 - 15a^4c -$$

$$- a^2c^2)\,r = 2d\lambda v\,(50v - 13a^2 - 2c).$$

Dalle due ultime equazioni ricavando i valori di r^2, r, si ottengono le:

$$\Delta r^2 = P, \qquad \Delta r = Q,$$

nelle quali le Δ, P, Q, divise pel fattore comune $4v - a^2$, e posto $25v = w$. hanno i valori:

$$\Delta = 2w^3 - 3\,(11a^2 + 2c)\,w^2 + 2\,(90a^4 + 38a^2c + 3c^2)\,w - 325a^6 - 245a^4c - 43a^2c^2 -$$

$$- 2c^3 - ad^2$$

$$25\,P = aw^4 - 4a\,(5a^2 + 2c)\,w^3 + (150a^5 + 145a^3c + 38ac^2 - 2d^2)\,w^2 -$$

$$- (500a^7 + 850a^5c + 450a^3c^2 + 56ac^3 - 13a^2d^2 - 2cd^2)\,w + 625a^9 + 1625a^7c +$$

$$+ 1400a^5c^2 + 425a^3c^3 + 25ac^4$$

$$Q = -2\lambda d\,(w^2 - (7a^2 + 2c)\,w + (a^2 + c)^2),$$

e la risolvente richiesta sarà:

$$P\Delta - Q^2 = 0,$$

ossia, dividendola pel fattore $\frac{a}{25}(2w - 13a^2 - 2c)$, la seguente:

$$w^6 - 10\,(3a^2 + c)\,w^5 + 5\,(75a^4 + 56a^2c + 11c^2)\,w^4 - 10\,(250a^6 + 310a^4c + 126a^2c^2 +$$

$$+ 14c^3 - \frac{1}{2}ad^2)\,w^3 + 25\,(375a^8 + 680a^6c + 435a^4c^2 + 104a^2c^3 + 7c^4 - 3a^3d^2 - acd^2)\,w^2 -$$

$$- (18750a^{10} + 46250a^8c + 41720a^6c^2 + 16050a^4c^3 + 2390a^2c^4 + 106\,c^5 -$$

$$- 267a^5d^2 - 145a^3cd^2 + 5ac^2d^2 - d^4)\,w + 25\,(625a^{12} + 2000a^{10}c + 2400a^8c^2 +$$

$$+ 1330a^6c^3 + 336a^4c + 32a^2c^5 + c^6 + 2a^7d^2 + 5a^5cd^2 + 4a^3c^2d^2 + ac^3d^2) = 0.$$

Questa equazione semplificasi, e prende una forma singolare facendo sparire il secondo termine col metodo ordinario; ponendo cioè:

$$w = x + \frac{5}{3}(3a^2 + c),$$

si giunge alla:

$$\left\{x^3 + \frac{5}{3}c(9a^2 + 4c)\,x + \frac{5}{27}\left(108a^2c^2 + 112c^3 + \frac{27}{2}ad^2\right)\right\}^2 + \left(x - \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{3}c\right)$$

$$(d^4 - 108a^5d^2 - 180a^3cd^2 - 80ac^2d^2 - 400a^4c^3 - 640a^2c^4 - 256c^5) = 0.$$

Pel caso più generale, nel quale non suppongasi $b = 0$, l' equazione corrispondente, quale fu trovata dal Malfatti, è la seguente:

$$\Big\{x^3 + \frac{5}{3}\,9a^2c + 4c^2 - 3ab^2 - 3bd)\,x + \frac{5}{27}(108a^2c^2 + 112c^3 + \frac{27}{2}ad^2 - \frac{279}{2}ab^2c +$$

$$+ 27b^4 + \frac{81}{2}a^2bd - 72bcd)\Big\}^2 + \left(x - \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{3}c\right)(d^4 - 108a^5d^2 - 180a^3cd^2 -$$

$$- 80ac^2d^2 - 400a^4c^3 - 640a^2c^4 - 256c^5 + 30abd^3 + 165a^2b^2d^2 - 90b^2cd^2 +$$

$$+ 360a^2bcd + 560a^2bc^2d + 160bc^3d - 80a^3b^3d - 630ab^3cd + 108b^5d +$$

$$+ 100a^3b^2c^2 + 720ab^2c^3 - 135b^4c^2) = 0.$$

Le equazioni (2) danno facilmente le:

$$m^4q^2 - rm^2q + gv = 0, \qquad n^4p^2 - rn^2p + gv = 0$$

$$m^2p^4 - smp^2 + hv = 0, \qquad n^2q^4 - snq^2 + hv = 0$$

quindi indicando con y_1, y_2; z_1, z_2 le radici delle equazioni:

$$y^2 - ry + gv = 0, \qquad z^2 - sz + hv = 0,$$

si avranno le:

$$y_1^2z_1 = m^5h^2, \qquad y_2^2z_2 = n^5h^2, \qquad z_1^2y_2 = p^5g^2, \qquad z_2^2y_1 = q^5g^2,$$

delle quali:

$$m = \sqrt[5]{\frac{y_1^2z_1}{h^2}}, \qquad n = \sqrt[5]{\frac{y_2^2z_2}{h^2}}, \qquad p = \sqrt[5]{\frac{z_1^2y_2}{g^2}}, \qquad q = \sqrt[5]{\frac{z_2^2y_1}{g^2}}.$$

Ora i secondi membri di queste equazioni sono funzioni di $r, g, h,$ e dei coefficienti dell' equazione del quinto grado, ossia funzioni di w e di quei coefficienti: dunque l' equazione di sesto grado in w è una risolvente dell' equazione data.

Il Ruffini nella sua Memoria, pubblicata fra quelle della Società Italiana (tomo XII, anno 1805), ha determinato quale funzione delle radici dell' equazione del quinto grado sia una radice della risolvente; ha determinato, cioè, il valore del prodotto $mnpq$ in funzione delle radici x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Giunse così a dimostrare *a priori*, che la risolvente doveva essere del sesto grado.

Il valore di w, quale fu trovato dal Ruffini, e può ottenersi con tutta facilità, è il seguente:

$$w = 5a^2 + 3c - \frac{1}{5}\Big(x_0x_1^2x_2 + x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_4 + x_3x_4^2x_0 + x_4x_0^2x_1 + x_0x_2^2x_4 + x_2x_4^2x_1 + $$
$$+ x_4x_1^2x_3 + x_1x_3^2x_0 + x_3x_0^2x_2\Big).$$

Questa funzione delle radici è ciclica ed invariabile per le sostituzioni della forma:

$$\binom{r}{2r} \qquad \binom{r}{3r} \qquad \binom{r}{4r};$$

ed i sei valori della medesima corrispondono alle sostituzioni:

$$\binom{r}{r} \quad \binom{r}{(2r)^3} \quad \binom{r}{(2r)^3+1} \quad \binom{r}{(2r)^3+2} \quad \binom{r}{(2r)^3+3} \quad \binom{r}{(2r)^3+4}$$

La equazione del quinto grado considerata dai signori Cockle ed Harley è la seguente:

$$x^5 - 5Qx^2 + E = 0;$$

e ponendo nella risolvente del Malfatti $a=0$, $b=-Q$, $c=0$, $d=E$, si ottiene:

$$(x^3 + 5QEx + 5Q^4)^2 + (E^3 - 108Q^5)Ex = 0,$$

il qual risultato coincide con quello trovato dai suddetti geometri (Vedi *Memoirs of the Society of Manchester,* 1860, pag. 134, 215).

La risolvente od equazione ausiliare calcolata dal Sig. Cayley deducesi da quella del Malfatti osservando che posto:

$$\psi = x_0x_1^2x_2 + x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_4 + x_3x_4^2x_0 + x_4x_0^2x_1 + x_0x_2^2x_4 + x_2x_4^2x_1 + x_4x_1^2x_3 +$$
$$+ x_1x_3^2x_0 + x_3x_0^2x_2,$$

e quindi:

$$\psi = 25a^2 + 15c - 5w,$$

si hanno le equazioni:

$$(01234)\,(02413) = 15c - \psi$$
$$(01234)^2 + (02413)^2 = 25a^2 - 30c + 2\psi$$

nelle quali:

$$(01234) = x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0\,,$$

$$(02413) = x_0x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_3x_0$$

Da queste deducesi la:

$$[(01234) - (02413)]^2 = 25a^2 - 60c + 4\psi\,,$$

o pel valore superiore di ψ ponendo:

$$y = (01234) - (02413)\,,$$

si avrà:

$$y^2 = 5\,(25a^2 - 4w)\,;$$

da ultimo sostituendo in questa equazione in luogo di w il suo valore in x si ottiene:

(1) $$y^2 = -20\left(x - \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{3}c\right).$$

La y è una funzione ciclica delle radici x_0, x_1, x_2, x_3, x_4; essa è invariabile per le sostituzioni $\binom{r}{\alpha r}$, essendo α residuo quadratico di 5, e non muta che di segno se α non è residuo quadratico. Le funzioni simmetriche delle radici:

$$y_1 = (01234) - (02413)\,,\quad y_2 = (02143) - (01324)\,,\quad y_3 = (02314) - (03421)\,,$$

$$y_4 = (01342) - (03214)\,,\quad y_5 = (03124) - (01432)\,,\quad y_6 = (03241) - (02134)\,,$$

saranno quindi funzioni a due valori delle radici x_0, x_1, ..., ed esprimibili perciò in funzioni dei coefficienti dell' equazione proposta e della radice quadrata del discriminante della medesima.

Il sig. Cayley ha notato un'altra proprietà interessante di queste funzioni simmetriche, o dei coefficienti della risolvente richiesta. Osservando che il valore di y può porsi sotto la forma:

$$y = (x_0 - x_4)(x_1 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_4)(x_3 - x_4) -$$

$$- (x_1 - x_4)(x_3 - x_4) - (x_3 - x_4)(x_0 - x_4) - (x_0 - x_4)(x_2 - x_4)\,,$$

deducesi che quei coefficienti saranno eguali a coefficienti di covarianti, o, secondo le espressioni del sig. Cayley, saranno seminvarianti.

Sostituendo nella risolvente di Malfatti in luogo di x, il valore dato dalla (1), si ottiene la equazione seguente:

$$\Big[y^6 - 100\left(\frac{3}{4}a^2 - c\right)y^4 + 2000\left(\frac{1}{2}a^2c + 3c^2 + \frac{15}{16}a^4 - ab^2 - bd\right)y^2 -$$

$$- 40000\left(\frac{25}{64}a^6 + c^3 + \frac{35}{16}a^4c + \frac{11}{4}a^2c^2 - \frac{5}{4}a^3b^2 - \frac{7}{2}ab^2c + \frac{1}{4}a^2bd - bcd + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}ad^2 + b^4\right)\Big]^2 - 5.\overline{800}^2.y^2(d^4 - 108a^5d^2....) = 0.$$

Ora, indicando con s, t, k, h, i primi coefficienti dei covarianti irreducibili del secondo, terzo, quarto e sesto ordine delle forme del quinto ordine:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, y)^5;$$

supponendo cioè:

$s = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$, $t = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3$, $h = a_0a_2 - a_1^2$,

$k = a_0^2a_3a_5 - 3a_0a_1a_2a_5 - 5a_0a_1a_3a_4 + 10a_0a_2^2a_4 - 4a_0a_2a_3^2 + 2a_1^3a_5 - 5a_1^2a_2a_4 +$
$+ 14a_1^2a_3^2 - 16a_1a_2^2a_3 + 6a_2^4$;

ed indicando con I, D l'invariante del quarto grado ed il discriminante, si hanno le:

$$\frac{3}{4}a^2 - c = \frac{1}{a_0^2}s, \quad \frac{1}{2}a^2c + 3c^2 + \frac{15}{16}a^4 - ab^2 - bd = \frac{1}{a_0^4}(3s^2 - 2k)$$

$$\frac{25}{64}a^6 + c_3 + \frac{35}{16}a^4c + \frac{11}{4}a^2c^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots = - \frac{1}{a_0^6}(s^3 - 2sk - hI - 16t^2)$$

$$d^4 - 108a^5d^2 - 180a^3cd^2\ldots\ldots = \frac{1}{a_0^8}D;$$

quindi, sostituendo, si otterrà la trasformata:

$$a_0^6y^6 - 100a_0^4sy^4 + 2000a_0^2(3s^2 - 2k)y^2 - 800a_0^2y\sqrt{5D} + 40000(s^3 - 2sk - hI - 16t^2) = 0,$$

la quale coincide colla equazione ausiliare del sig. Cayley.

NOTA II.

Trasformazione della Risolvente di Malfatti.

Nelle considerazioni seguenti supporremo $b=0$. In questo caso, ponendo:

$$a^2+c=\beta\,,\qquad 9a^2+4c=\gamma\,,\qquad 27a^5+45a^3c+20ac^2-\frac{1}{2}d^2=\delta\,,$$

la risolvente in x trovata nella Nota I può scriversi:

$$\left\{x^3+\frac{5}{3}c\gamma x+5\left(4a^2c^2+\frac{112}{27}c^3+\frac{1}{2}ad^2\right)\right\}^2+4\left(x-\frac{5}{4}a^2-\frac{5}{3}c\right)\left(\delta^2-\beta^2\gamma^3\right)=0,$$

o ponendo:

$$x=\rho+\frac{1}{3}\gamma,$$

si ha:

$$\left\{\rho^3+\gamma\rho^2+3\beta\gamma\rho+2\beta\gamma^2-5a\delta\right\}^2+4\left\{\rho+\frac{1}{4}(7a^2+12c)\right\}\left(\delta^2-\beta^2\gamma^3\right)=0.$$

Sia:

$$y\rho=\beta\gamma-y^2;$$

moltiplicando la superiore per y^6 e sostituendo, si otterrà la seguente:

$$\left\{y^6-\gamma y^5+5a\delta y^3-\beta^2\gamma^3y-\beta^3\gamma^3\right\}^2-4y^5\left(y^2-\frac{1}{4}(7a^2+12c)\,y-\beta\gamma\right)\left(\delta^2-\beta^2\gamma^3\right)=0,$$

la quale posta per brevità:

$$\varepsilon^2=\delta^2-\beta^2\gamma^3,$$

riducesi alla:

$$[y^6-\gamma y^5+5a\delta y^3-(\varepsilon^2+\delta^2)\,y-\beta\,(\varepsilon^2+\delta^2)]^2-[5ay^3-2\delta y-2\beta\delta]^2\,\varepsilon^2=0.$$

Il primo membro di questa equazione essendo la differenza di due quadrati, sarà eguale al prodotto di due polinomj del sesto grado, i quali evidentemente danno luogo alla seguente trasformata della risolvente di Malfatti:

$$y^6-\gamma y^5+5a\,(\delta\pm\varepsilon)\,y^3-(\delta\pm\varepsilon)^2y-\beta\,(\delta\pm\varepsilon)^2=0.$$

Ora, se supponesi:

(1) $$\gamma=4A\,,\qquad a\,(\delta\pm\varepsilon)=2B\,,\qquad (\delta\pm\varepsilon)^2=5C\,,$$

*

si ha:

$$5B^2 - 4AC = -\beta(\delta \pm \varepsilon)^2$$

quindi l'equazione superiore può scriversi:

$$y^6 - 4Ay^5 + 10By^3 - 4Cy + 5B^2 - 4AC = 0,$$

cioè la trasformata ottenuta appartiene a quella classe di equazioni che hanno lo stesso gruppo della equazione del moltiplicatore per la trasformazione del quinto ordine.

È noto che posto $y = z - A$, indicando con $z_1, z_2 \ldots z_6$ le radici della equazione:

$$(2) \quad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - 4C(z-A) + 5B^2 - 4AC = 0$$

la proprietà caratteristica di questa classe di equazioni è espressa dalle tre relazioni:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} + \sqrt{z_4} + \sqrt{z_5} + \sqrt{z_6} = \sqrt{5z_1} \\ &\sqrt{z_2} + \alpha^2\sqrt{z_3} + \alpha^4\sqrt{z_4} + \alpha\sqrt{z_5} + \alpha^3\sqrt{z_6} = 0 \\ &\sqrt{z_2} + \alpha^3\sqrt{z_3} + \alpha\sqrt{z_4} + \alpha^4\sqrt{z_5} + \alpha^2\sqrt{z_6} = 0, \end{aligned}$$

nelle quali α è una radice immaginaria dell' equazione $x^5 = 1$.

Dalle equazioni (1) si hanno le:

$$a = \frac{B}{\sqrt{C}}, \qquad c = \frac{1}{4C}(4AC - 9B^2);$$

e per la terza di esse, essendo:

$$[\delta^2 + \varepsilon^2 - 4C]^2 = 4\delta^2\varepsilon^2,$$

sostituendo il valore di ε^2 si otterrà, dopo alcune riduzioni, la:

$$\delta C^2\sqrt{C} = C^3 + A^3(4AC - 5B^2)^2,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}d^2C^2\sqrt{C} = 27B^5 - C^3 - 25A^3B^4 + 40A^4B^2C + 20A^2BC^2 - 45AB^3C - 16A^5C^2.$$

Da questi valori di a, c, d, deducesi che la equazione del quinto grado, dalla quale siamo partiti, è quella di cui le radici non differiscono che di un fattore costante dalle espressioni della forma:

$$\sqrt{(z_1 - z_2)(z_3 - z_6)(z_4 - z_5)}.$$

Infatti, i valori di questi coefficienti non differiscono che di un fattore da quelli da me trovati nell'Appendice alla nota: *Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado*, pubblicata nel tomo **I**, pag 326 degli *Annali di Matematica*.

NOTA III.

Risoluzione della equazione di quinto grado.

La trasformazione del quinto ordine delle funzioni elittiche dà origine a varie equazioni aventi tutte la forma della equazione (2) della nota antecedente, e nelle quali le A, B, C, od hanno valori numerici determinati, o sono eguali a determinate funzioni del modulo k. Indicando con λ il modulo dell' integrale elittico trasformato, con λ', k' i moduli di complemento, con x il moltiplicatore nella trasformazione del quinto ordine; ponendo

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k}}, \quad \rho' = \sqrt[4]{\frac{\lambda'}{k'}},$$

se supponesi nell' equazione (2) della nota precedente:

$$z = x(\rho^2 + \rho'^2),$$

si ha:

$$A = 0, \quad B = -\frac{16}{k^2k'^2}, \quad C = 64\frac{1-16\,k^2k'^2}{k^4k'^4} \quad (*).$$

Supponiamo ora di avere trasformata la medesima equazione (2) in un'altra, le radici della quale godano della stessa proprietà caratteristica delle radici della (2), di modo che la equazione trasformata abbia la forma di quella equazione. Indicando con Z una radice qualunque di questa trasformata, con A', B', C' le quantità che in essa corrispondono ordinatamente alle A, B, C nella (2), supponiamo inoltre sia $A' = 0$, e quindi la trasformata risulti della forma:

$$Z^6 + 10B'Z^3 - 4C'Z + 5B'^2 = 0.$$

Se in quest'ultima equazione poniamo $Z = Y\sqrt[3]{B'}$, si ottiene la seguente:

$$Y^6 + 10\,Y^3 - 4\frac{C'\sqrt[3]{B'}}{B'^2}Y + 5 = 0,$$

(*) Vedi la mia Nota: *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, nel volume primo degli Atti dell' Istituto Lombardo.

nella quale vi ha un solo coefficiente non numerico, e siccome una equazione della stessa forma si ottiene ponendo $z = y\sqrt[3]{B}$ nella equazione particolare citata più sopra, eguagliando i due coefficienti non numerici, si avrà l'equazione:

$$C'\sqrt[3]{4B'k^2k'^2} = (16k^2k'^2 - 1)B'^2,$$

dalla quale si dedurrà il valore del modulo k, che sostituito nel secondo membro della equazione:

$$Z = z\sqrt[3]{\frac{B'}{B}} = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{4B'k^2k'^2}.\ x(\rho^2 + \rho'^2),$$

darà i sei valori delle radici della trasformata in Z, corrispondenti ai sei valori di x e di λ.

Accenneremo ora brevemente in qual modo si possa giungere ad una trasformata in Z, dotata delle proprietà suddette. Questa ricerca dipende dallo studio delle proprietà di una classe di equazioni, le quali hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore, o seguendo la denominazione del signor Kronecker, hanno la *affezione* (Affect) delle equazioni modulari. Lo studio di questa classe di equazioni conduce a risultati della più grande importanza tanto nella teorica delle funzioni elittiche, quanto in quelle delle equazioni, e delle forme (*); noi ci proponiamo di esporre una teorica delle medesime in un prossimo lavoro, nel quale saranno anche dimostrate alcune loro proprietà enunciate dal signor Kronecker in una comunicazione fatta da questo illustre geometra alla R. Accademia delle Scienze di Berlino nel giugno 1861; per il che ci limiteremo ora ad esporre alcuni risultati, i quali hanno un diretto legame colla ricerca che abbiamo di mira.

Supponendo che le quantità $z_1, z_2, \dots z_6$ abbiano lo stesso significato che nella Nota II, si ponno determinare *tre* funzioni intiere di $\sqrt{z}$, i sei valori di ciascuna delle quali, corrispondenti ai sei valori di z, soddisfanno a tre relazioni analoghe alle (3) della Nota II, e quindi sono radici di equazioni aventi la forma della (2). Le tre funzioni suddette sono le seguenti:

$$\sqrt{z}, \qquad \left(z^4 - 9Az^3 + 27A^2z^2 - 3\,(13A^3 - 3B)\,z\right)\sqrt{z} = \varphi(\sqrt{z})$$

(1)

$$(z^5 - 10Az^4 + 35A^2z^3 - 61A^3z^2 + 11Bz^2 + 60A^4z - 35ABz)\sqrt{z} = \psi(\sqrt{z})$$

o funzioni lineari delle medesime. Si ponno anche trovare altre tre funzioni intiere di $\sqrt{z}$, le quali soddisfanno alle tre relazioni che ottengonsi dalle (3) della Nota II,

(*) Vedi nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences — 13 Luglio 1863 la mia nota — Sur une classe d'équations du quatrième degré.

supponendo negativo il secondo membro della prima, e cambiando α in α^2 nella seconda e nella terza; e queste pure sono radici di equazioni aventi la forma della (2). Le dette funzioni sono le seguenti:

$$(z-3A)\sqrt{z}\,,\qquad \left(z^3-7Az^2+7\,(4A^3+B)\right)\sqrt{z}\,,$$

(2)

$$(z^5-10Az^4+35A^2z^3-59A^3z^2+9Bz^2+48A^4z-23ABz-15A^5+$$
$$+19A^2B-4C)\sqrt{z}$$

o funzioni lineari delle medesime.

Notisi che quest' ultima espressione per l'equazione (2) della nota II. può scriversi:

$$(A^3-B)\left(z^2-7Az+11A^2-5\,\frac{A^3-B}{z}\right)\sqrt{z}$$

e questa quadrata, dopo alcune riduzioni, dà:

$$4\,(A^3-B)^2\Big(-z^5+9Az^4-26A^2z^3+34A^3z^2-10Bz^2-21A^4z+20ABz+5A^5-$$
$$-10A^2B+5C\Big),$$

quindi indicando con p una quantità indeterminata, e ponendo la terza delle espressioni (2) eguale a $p\sqrt{z'}$ si ha:

$$p^2z'=4\,(A^3-B)^2\left(-(z-A)^5+4A\,(z-A)^4-10B\,(z-A)^2+5C\right)$$

o per la equazione (2) della Nota II^a.

$$p^2z'=4\,(A^3-B)^2\left(\frac{5B^2-4AC}{z-A}+C\right)$$

cioè ponendo:

$$p=2\,(A^3-B)\sqrt{(5B^2-4AC)},\qquad A'=\frac{C}{5B^2-4AC}$$

si avrà la relazione:

$$z'-A'=\frac{1}{z-A}\;.$$

Ma evidentemente dalla stessa equazione (2) della Nota II^a. dividendo per $(z-A)^6\ (5B^2-4AC)$ ponendo:

$$B'=\frac{B}{5B^2-4AC}\,,\qquad C'=\frac{A}{5B^2-4\,AC}$$

ed osservando essere:

$$(5B^2-4AC)\,(5B'^2-4A'C')=1$$

si ha per la relazione superiore:

$$(z'-A')^6-4A'(z'-A')^5+10B'(z'-A')^3-4C'(z'-A')+5B'^2-4A'C'=0$$

equazione di forma identica a quella della (2) della Nota II^a. la quale sarà il tipo delle equazioni della seconda specie.

Inoltre siccome supponendo:

$$p'=2(A'^3-B')\sqrt{(5B'^2-4A'C')}$$

si ha:

$$p'\sqrt{2z}=(z'^5-10A'z'^4+35A'^2z'^3-59A'^3z'^2+9B'z'^2+48A'^4z'-23A'B'z'-15A'^5$$
$$+19A'^2B'-4C')\sqrt{z'}$$

se si indicano con:

$$\sqrt{z}, \qquad \varphi(\sqrt{z}, A, B, C), \qquad \psi(\sqrt{z}, A, B, C)$$

le tre espressioni (1) della prima specie, le (2) della seconda specie si potranno porre sotto la forma:

$$\sqrt{z'}, \qquad \varphi(\sqrt{z'}, A', B', C'), \qquad \psi(\sqrt{z'}, A', B', C',).$$

Nella mia nota. — Intorno ad alcune formole per la risoluzione delle equazioni algebriche — pubblicata negli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche del Professor Tortolini (Novembre 1854) ho dimostrato che le radici di una equazione algebrica di grado n soddisfano ad n equazioni alle derivate parziali lineari del primo ordine. Applicando quelle formole alle equazioni (2) della Nota II^a. ed osservando che in questo caso i coefficienti della equazione sono funzioni di tre sole quantità A, B, C si trovano le equazioni:

$$2\left(A\frac{d\sqrt{z}}{dA}+3B\frac{d\sqrt{z}}{dB}+5C\frac{d\sqrt{z}}{dC}\right)=\sqrt{z}$$

$$4\left\{(C-10A^5+4A^2B)\frac{d\sqrt{z}}{dA}+A(3AC-38A^3B+20B^2)\frac{d\sqrt{z}}{dB}\right.$$
$$\left.+5(11ABC+A^3B^2-3B^3-14A^4C)\frac{d\sqrt{z}}{dC}\right\}=\varphi(\sqrt{z})$$

$$2\left\{(25A^6-23A^3B-6B^2+4AC\frac{d\sqrt{z}}{dA}+(91A^6B-103A^2B^2+2A^3C+10BC)\frac{d\sqrt{z}}{dB}\right.$$
$$\left.+5(33A^5C-2A^4B^2+2AB^3-37A^2BC+4C^2)\frac{d\sqrt{z}}{dC}\right\}=\psi(\sqrt{z})$$

e da queste si deducono i valori di $\frac{d\sqrt{z}}{dA}$, $\frac{d\sqrt{z}}{dB}$, $\frac{d\sqrt{z}}{dC}$, espressi linearmente mediante funzioni della specie delle (1).

Indicando con $\sqrt{Z'}$, $\sqrt{Z''}$, $\sqrt{Z'''}$ tre funzioni della specie (1), e supponendo essere a, b, c tre quantità indeterminate, poniamo:

$$\sqrt{Z} = a\sqrt{Z'} + b\sqrt{Z''} + c\sqrt{Z'''};$$

l'equazione del sesto grado in Z, le radici della quale sono date dalla relazione superiore, sostituendo z_1, z_2, ... in luogo di z, sarà, per quanto si è detto, della forma della (2) della Nota precedente, ed i coefficienti A', B', C' della medesima saranno funzioni delle A, B, C e delle tre indeterminate a, b, c. Supponiamo ora di aver sostituito nel secondo membro della equazione superiore Z in luogo di z, e le A', B', C' al posto delle A, B, G; quindi per Z il suo valore dato dalla equazione stessa, e per A', B', C' i loro valori in funzione di A, B, C; a, b, c. Il risultato sarà della forma:

$$a_1\sqrt{Z'} + b_1\sqrt{Z''} + c_1\sqrt{Z'''},$$

cioè sarà una funzione lineare di tre delle funzioni (1). Una analoga proprietà si verifica per le derivate seconde di $\sqrt{z}$ rispetto ad A, B, C, e quindi per le derivate d'ordine superiore. Ne deriva che, supponendo A, B, C funzioni di una stessa k, le derivate di $\sqrt{Z}$ rispetto a k sono esprimibili in funzioni lineari di tre delle funzioni (1), e quindi fra quattro di queste derivate sussiste una relazione lineare. Questi due teoremi sono generali a tutte le equazioni di questa classe.

Noi vediamo ora come facilmente si possa risolvere la questione che abbiamo di mira, cioè trasformare nuovamente la ottenuta trasformata della risolvente di Malfatti, in modo che nella nuova trasformata sia $A' = 0$. Si prendano due qualsivogliano delle funzioni (1), le quali indicherò con $\sqrt{Z'}$, $\sqrt{Z''}$, e si calcoli l'equazione, di cui le radici sono date dalla:

$$\sqrt{Z} = a\sqrt{Z'} + b\sqrt{Z''},$$

essendo a, b due indeterminate. Evidentemente il valore di A' sarà del secondo grado in $a:b$; quindi potremo dedurre un valore del rapporto $a:b$, in funzione di A, B, C, il quale annulli A'. Supponendo, p. e.:

$$\sqrt{Z} = \left[a + b\,(z^2 - 5Az + 5\frac{A^3 - B}{z}\right]\sqrt{z},$$

si ha facilmente:

$$A' = Aa^2 + 2ab\,(A^3 - 6B) + b^2\,(A^5 + 20A^2B + 4C).$$

La teorica delle funzioni elittiche conduce anche ad equazioni, per le quali è $B = 0$, (p. e., quella del moltiplicatore); ora, osservando le equazioni (1) della Nota precedente, si ha che, supponendo $a = 0$ nella equazione del quinto grado proposta, sarà $B = 0$, quindi ponendo $z - A = yA$ nella equazione (2) della Nota II^a, si avrà:

$$y^6 - 4y^5 - 4\frac{C}{A^5}(y + 1) = 0,$$

e questa, posta a confronto, per esempio, colla equazione del moltiplicatore x, darà la:

$$C + 64A^5k^2k'^2 = 0,$$

o la:

$$k^2k'^2d^4 + 16c^5\,(1 - 4k^2k'^2)^2 = 0,$$

per determinare il valore del modulo k da sostituirsi nella equazione:

$$y = cx,$$

onde avere le radici della trasformata della risolvente del Malfatti.

Ma quest' ultimo modo di soluzione del problema suppone eseguita, sulla equazione del quinto grado proposta, la trasformazione di Jerrard, mediante la quale ridurla alla forma trinomia:

$$x^5 - 5cx + d = 0,$$

mentre pel metodo precedente non si ha che a supporre $b = 0$, cioè l' equazione del quinto grado ridotta alla forma:

$$x^5 - 5ax^3 - 5cx + d = 0;$$

ed un bellissimo esempio di una riduzione di questa specie fu dato dal sig. Hermite in una Nota, pubblicata nel giornale del signor Borchardt, *Sur l'invariant du* 18e *ordre, etc.*, vol. 59. In quella riduzione i coefficienti a, c, d sono funzioni intere, razionali degli invarianti delle forme del quinto grado, e della radice quadrata del discriminante della forma stessa.



INTORNO AD UN PROBLEMA

DI MECCANICA APPLICATA

MEMORIA

DEL DOTTOR

DOMENICO CIPOLLETTI

Allievo della scuola tecnica nell'Università Romana: Corrispondente degl' Annali di Matem. del Prof. Tortolini: del giorn. dell'Architetto ingegnere ed agronomo del giorn. Arcadico: della corrispondenza scientifica di Roma ec. ec.

Il Ch. Professor D'Andrea nei suoi elementi di Meccanica applicata pag. 124, num. 160. si propone la risoluzione del seguente problema.

Determinare l'equilibrio di un solido appoggiato orizzontalmente nelle sue estremità A, A_1, *caricato nel mezzo* C *di un peso* 2Π, *e delle pressioni* Π_1 *applicate ai punti* B, B_1, *ugualmente distanti dagli estremi* A, A_1, *ed ugualmente inclinate alla orizzontale che passa per i detti punti, e dirette in modo che ambedue tendano o a comprimere o a stendere la parte del solido compresa* BB_1.

Quantunque la deduzione delle formule non sia molto difficile; pure queste si presentano si lunghe e complesse, che difficilmente si potrebbero adattare alla generalità degli usi pratici; e perciò il Sig. D'Andrea ha esibito delle formule approssimate trascurando alcune quantità inerenti al problema, e ritenendo due e tre termini dello sviluppo in serie di alcune altre, considerandole come molto piccole: pure potendoci essere in pratica qualche caso particolare che esiga una rigorosa accuratezza, in questa breve memoria mi propongo di sciogliere il problema esattamente, e nella massima generalità.

Le forze Π_1 equivalgono a due forze orizzontali $\Pi_1 \cos. \theta$ uguali e contrarie, e a due verticali $\Pi \text{ sen: } \theta = Q$, essendo θ l'angolo che quelle formano coll'orizzontale. Perciò ciascuno appoggio sostiene lo sforzo.

$$N = \Pi + \Pi_1 \text{ sen: } \theta$$

Essendo il sistema del solido di lunghezza $2a$, e delle forze applicate simmetrico intorno la verticale che passa per C, ciascuna metà di esso è nello stato di un pezzo CA, incastrato in C, caricato in A del peso N, in B della forza verticale O, che agisce da sotto in sopra, e dell'orizzontale P che agisce da B in C: si chia-

*

mino a_1 l' ascisse delle forze Π_1, e b_1 le loro ordinate; l' equazioni dei due rami CB, BA, saranno

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -Q(a_1 - x) + P(b_1 - x) + N(a - x)$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = N(a - x)$$

fatto

$$\frac{Q}{\varepsilon} = q^2, \frac{P}{\varepsilon} = p^2, \frac{N}{\varepsilon} = n^2,$$

le due equazioni differenziali proposte divengono

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = n^2(a - x) - q^2(a_1 - x) + p^2 b_1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2(a - x)$$

Gl' integrali completi sono

$$y = A \text{ sen: } px + B \cos: px + \frac{n^2}{p^2}(a - x) - \frac{q^2}{p^2}(a_1 - x) + b_1) \tag{1}$$

$$y = \frac{1}{6} n^2 (3ax^2 - x^3) + Cx + D \tag{2}$$

Per $x = 0$, la (1) deve dare $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; per $x = a_1$, i valori di y e $\frac{dy}{dx}$ della (1) e (2) devono essere eguali; per $x = a$, dalla (2) $x = f$, $\frac{dy}{dx} = \text{tang: } \varphi$, essendo f l' ordinata massima, e φ l' angolo d' inclinazione del solido ai punti d'appoggio; e perciò si avranno le otto condizioni, detto φ_1 l'angolo d' inclinazione in B_1

$$0 = B + \frac{n^2 a - a_1 q^2}{p^2} + b_1 \tag{3}$$

$$0 = Ap - \frac{n^2 - q^2}{p^2} \tag{4}$$

$$0 = A \text{ sen: } pa_1 + B \cos: pa_1 + \frac{n^2}{q^2}(a - a_1) \tag{5}$$

$$0 = \frac{1}{6}(3a - a_1) a_1^2 n^2 + Ca_1 + D - b_1 \tag{6}$$

$$\text{tang: } \varphi_1 = p A \cos: pa_1 - p B \text{ sen: } pa_1 - \frac{n^2 - q^2}{p^2} \tag{7}$$

$$\text{tang: } \varphi_1 = \frac{1}{2} a_1 n^2 (2a - a_1) + C \tag{8}$$

$$f = \frac{1}{3} a^3 n^2 + Ca + D \qquad (9)$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{1}{2} a^3 n^2 + C \qquad (10)$$

che servono per determinare le costanti

$$A, B, b_1, \text{tang: } \varphi_1, C, P, f, \text{tang: } \varphi$$

Secondo il metodo approssimato dell'Illustre Professore, trascurando nella (3) b_1 a confronto di

$$\frac{n^2 a - a_1 q^2}{p^2}$$

Si ottiene dalle (4) e (3)

$$A = \frac{n^2 - q^2}{p^3} \qquad (11)$$

$$B = -\frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2} \qquad (12)$$

uguagliando la (5) colla (6), la (7) colla (8), ed eliminando prima C, e poi D si ottiene per i valori trovati di A e B

$$D = \frac{a_1 (n^2 - q^2)}{p^2} \left(\frac{\text{sen: } pa_1}{pa_1} - \text{cos: } pa_1 \right) + \frac{a_1 q^2 - an^2}{p^2} (\text{cos: } pa_1 - pa^1 \text{ sen: } pa_1 - 1)$$
$$- \frac{1}{6} a_1 n^2 (3a - 2a_1)$$

$$C = \frac{n^2 - q^2}{p^2} (\text{cos: } pa_1 - 1) - \frac{a_1 q^2 - an^2}{p^2} \text{ sen: } pa_1 - \frac{1}{2} a_1 n^2 (2a - a_1)$$

Essendo pa_1 una quantità ordinariamente piccolissima, sviluppando sen: pa_1, cos: pa_1 si potranno trascurare le potenze di pa_1 superiori alla seconda, e ritenere

$$D = \frac{1}{6} a_1^2 q^2 \qquad C = -\frac{1}{2} a_1^2 n^2 \qquad (13)$$

Sostituendo questi valori nell' equazioni (6), (9), (10) si ha

$$b_1 = \frac{1}{6} a_1^2 n^2 (3a - 4a_1) + \frac{1}{6} a_1^2 n^2 \qquad (14)$$

$$f = \frac{1}{6} a^2 n^2 (2a^2 - 3a_1^2) + \frac{1}{6} a_1^3 q^2 \qquad (15)$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{1}{2} n^2 (a^2 - a_1^2) \qquad (16)$$

Per i valori di A, B, C, D, b_1, tratti dalle (11), (12), (13), (14), le (1) e (2)

divengono

$$y=-\frac{n^2-q^2}{p^3}(px-\text{sen}:px)+\frac{an^2-a_1q^2}{p^2}(1-\text{cas}:px)+\frac{1}{6}a_1^2[n^2(3a-4a_1)+a_1q^2] \quad (17)$$

$$y=\frac{1}{6}n^2(-3a_1^2x+3ax^2-x^3)+\frac{1}{6}a_1^3q^2 \quad (18)$$

e sviluppando sen: px, ed apprezzando soltanto le quantità che sono dell'istesso ordine dell'ultimo termine; in vece della (17) si può prendere la

$$y=\frac{1}{6}n^2(3ax^2-x^3)-\frac{1}{6}q^2(3a_1x^2-x^3)+\frac{1}{6}a_1^2[n^2(3a-4a_1)+a_1q^2] \quad (19)$$

Esprimendo R la resistenza alla rottura dell'unità superficiale, E il coefficiente di elasticità, w la sezione, P una forza che agisce secondo la lunghezza del solido, ρ il raggio osculatore, v^1 l'ordinata della sezione corrispondente al punto in cui vi passa l'asse d'equilibrio, l'equazione da cui si ricavano le dimensioni del solido, è la

$$\frac{\text{R}}{\text{E}}=\frac{\text{P}}{\text{E}w}+\text{massimo di }\frac{v^1}{\rho}$$

ritenendo $\rho=\frac{d^2y}{dx^2}$; ora il massimo di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ricavato dalla (17) corrrisponde ad $x=0$, ed è $an^2-a_1q^2$: quindi l'equazione da cui si devono determinare le dimenzioni del solido è

$$\frac{\text{R}}{\text{E}}=\frac{\text{P}}{\text{E}w}+v'(an^2-a_1q^2)=\frac{\text{P}}{\text{E}w}+\frac{v^1}{\varepsilon}(a\text{N}-a_1\text{Q}) \quad (20)$$

In virtù della ricerca di valori approssimati per le costanti, la equazione (17) non soddisfa alle condizioni cui deve adempire, e di fatti per $x=0$, esibisce

$$y=\frac{1}{6}a_1^2[n^2(3a-4a_1)+a_1q^2]$$

in vece di $y=0$; quindi è che la (20) non può servire che per casi che non richieggano una scrupolosa esattezza: volendo avere una formola precisa da cui ricavare le dimensioni del solido essendo date le forze Π, Π_1; eseguendo l'eliminazione nell'equazioni (3), (4), (5), ... (10), come il calcolo le ha date; si ottiene

$$\text{A}=\frac{n^2-q^2}{p^3}$$

$$\text{B}=-\left(\frac{n^2-q^2}{p^3}\right)\text{tang}:pa_1-\frac{n^2(a-a_1)}{p^2}\text{sec}:pa_1$$

$$b_1=\frac{n^2-q^2}{p^3}\text{tang}:pa_1+\frac{n^2(a-a_1)}{p^2}\text{sec}:pa_1-\frac{n^2a-q^2a_1}{p^2}$$

$$\text{tang}:\varphi_1=\frac{n^2-q^2}{p^2}(\text{tang}:pa_1\ \text{sec}:pa_1+\text{cos}:pa_1-1)+\frac{n^2(a-a_1)}{p}\text{tang}:pa_1$$

$$\text{C}=\frac{n^2-q^2}{p^2}(\text{tang}:pa_1.\ \text{sec}:pa_1+\text{cos}:pa_1-1)+\frac{n^2(a-a_1)}{p}\text{tang}:px_1-\frac{1}{2}n^2a_1(2a-a_1)$$

$$D = \frac{n^2 - q^2}{p^3}\left[\text{tang: } pa_1 - pa_1 (\text{sen: } pa_1 \text{ tang: } pa_1 + \cos: pa_1 - 1)\right] + \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2} (\sec: pa_1$$
$$- pa_1 \text{ tang: } pa_1) - \frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2} - \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1) + \frac{1}{2} n^2 a_1^2 (2a - a_1$$

$$f = \frac{n^2 - q^2}{p^3}\left[\text{tang:} pa_1 + p(a - a_1)(\text{sen:} pa_1 \text{ tang:} pa_1 + \cos: pa_1 - 1)\right] + \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2}[\sec: pa_1 + p$$
$$(a - a_1) \text{ tang:} pa_1] - \frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2} - \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1) + \frac{1}{2} n^2 a_1^2 (2a - a_1) - \frac{1}{2} n^2 a a_1 (2a - a_1) + \frac{1}{3} n^2 a^3$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{n^2 - q^2}{p^2} (\text{tang: } pa_1 \sec: pa_1 + \cos: pa_1 - 1) + \frac{n^2 (a - a_1)}{p} \text{ tang: } pa_1 - \frac{1}{2} n^2 a_1$$
$$(2a - a_1) + \frac{1}{2} n^2 a_1^2 (2a - a_1)$$

In virtù di questi valori la (1) diviene

$$\varepsilon y = \frac{n^2 - q^2}{p^2}[\text{sen:} px - px - \text{tang:} pa_1 (\cos. px - 1)] - \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2} \sec: pa_1 (\cos: px - 1) \qquad (21)$$

dalla quale $\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{n^2 - q^2}{p} \text{ tang: } pa_1 \cos: px - \text{sen: } px) + n^2 (a - a_1) \sec: pa_1 \cos: px$

il cui massimo è $\qquad \frac{n^2 - q^2}{p} \text{ tang: } pa_1 + n^2 (a - a_1) \sec: pa_1$

e quindi l'equazione accurata da cui si devono ricavare le dimensioni del solido è

$$\frac{R}{E} = \frac{P}{Ew} + v^1 \left[\frac{n^2 - q^2}{p} \text{ tang: } pa_1 + n^2 (a - a_1) \sec: pa_1\right]$$

Supponendo pa_1 piccolissimo, e fatto in questa

$$\text{tang: } pa_1 = pa_1 , \quad \sec: pa_1 = 1$$

ritorna la (20)

Siano ora le forze Π_1 dirette in modo, che invece di comprimere la porzion del solido BB_1, tendano ad allungarla: allora l'equazioni differenziali dei due rami CB, BA, sono

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - p^2 q = n^2 (a - x) - q^2 (a_1 - x) - p^2 b_1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2 (a - x)$$

e gl'integrali completi

$$y = Ae^{px} + Be^{-px} - \frac{n^2 (a - x)}{p^2} + \frac{q^2 (a_1 - x)}{p^2} + b_1 \qquad (22)$$

$$y = \frac{n^2}{6} (3ax^2 - x^3) + Cx + D \qquad (23)$$

le quali come nel primo caso somministrano le otto condizioni

$$A + B = -\frac{q^2 a_1 - a n^2}{p^2} - b_1$$

$$A - B = -\frac{n^2 - q^2}{p^3}$$

$$A e^{p a_1} + B e^{-p a_1} = \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2}$$

$$p A e^{p a_1} - p B e^{-p a_1} = \text{tang: } \varphi - \frac{n^2 - q^2}{p^2}$$

$$b_1 = \frac{n^2 a_1^2}{6} (3a - a_1) + C a_1 + D$$

$$\text{tang: } \varphi_1 = \frac{n^2 a_1}{2} (2a - a_1) + C$$

$$f = \frac{n a^3}{3} + C a + D, \qquad \text{tang } \varphi = \frac{1}{2} n^2 c^2 + C$$

dalle quali eseguendo l' eliminazione

$$A = \frac{p n^2 (a - a_1) - (n^2 - q^2) e^{-p a_1}}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1}}$$

$$B = \frac{p n^2 (a - a_1) + (n^2 - q^2) e^{-p a_1}}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1}}$$

$$b_1 = \frac{-2 n^2 p (a - a_1) - (n^2 q^2) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} - \frac{q^2 a_1 - c n^2}{p^2}$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{-2 (n^2 - q^2) + a - a_1) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} + \frac{n^2 - q^2}{p^2}$$

$$C = \frac{-2 (n^2 - q^2) + p n^2 (a - a_1) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} + \frac{n^2 - q^2}{p^2} - \frac{n^2 a^1}{2} (2a - a_1)$$

$$D = b_1 + \frac{2 a_1 (n^2 - q^2) - p n^2 a_1 (a - a_1) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} - \frac{n^2 - q^2}{p^2} a_1 - \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1)$$

$$f = b_1 - \frac{2 (a - a_1) (n^2 - q^2) - p n^2 (a - a_1)^2 (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} + \frac{n^2 - q^2}{p^2} (a - a_1)$$

$$- \frac{n^2 a a_1}{2} (2a - a_1) + \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1)$$

ed $$y = \frac{p n^2 (a - a_1) (e^{px} + e^{-px} - 2) - (n^2 - q^2) \left[e^{p a_1} (1 - e^{-px}) - e^{-p a_1} (1 - e^{px}) \right]}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})}$$

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

LES SIGNES NUMÉRAUX ET L'ARITHMÉTIQUE

CHEZ LES PEUPLES DE L'ANTIQUITÉ ET DU MOYEN-ÂGE.

EXAMEN

de l'ouvrage allemand intitulé: *Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker* von Dr. MORITZ CANTOR (Halle, 1863, in-8.). 1)

Au mois de juillet 1863, M. le Prince Boncompagni, toujours aussi empressé à susciter qu'à accomplir lui-même des recherches sur l'histoire des sciences mathématiques, m'invitait à prendre l'engagement de lui envoyer, avant la fin de l'année 1863, pour les *Annales des sciences mathématiques et physiques* publiées à Rome par M. B. Tortolini, un examen détaillé de l'ouvrage important que M. Moritz Cantor venait de faire paraître en Allemagne sous le titre que je viens de transcrire.

Malgré de grands et nombreux travaux qu'il ne m'était pas possible d'interrompre, je n'ai pu résister ni à cette invitation si honorable pour moi, ni à l'attrait que je trouvais à revenir, à la suite de M. Cantor, sur une question très vaste, dont j'avais abordé quelques points seulement dans un mémoire 2) publié en 1857.

Je ne comprenais pas toute l'étendue de la tâche dont je me chargeais, et surtout je ne prévoyais pas à quels développements je me laisserais entraîner. Mais je ne regrette pas cette illusion, puisqu'à force de travail et sans négliger mes autres occupations, j'ai pu finir à temps et accomplir exactement ma promesse.

Frappé de l'importance des questions traitées par M. Cantor, je me suis appliqué à faire connaître sommairement tout le contenu de son livre, et à signaler, dans ses recherches sur l'histoire de la numération, les vues vraies et neuves, ou du moins exposées avec un nouveau degré de clarté et de probabilité, les faits nouveaux qu'on y rencontre quelquefois, et l'enchaînement nouveau qui souvent y donne une nouvelle valeur à des faits déjà connus. Mais je me suis appliqué aussi à noter les lacunes, les défauts, les erreurs, ou les hypothèses hasardées, que j'ai cru remarquer dans ce livre si estimable. En outre, j'ai pris à tâche de fortifier les preuves ou les inductions présentées par M. Cantor à l'appui de propositions dont j'admets comme lui la certitude ou la probabilité; de combler les lacunes de son travail, autant que j'ai pu le faire; de rectifier ce qui m'a paru inexact; de combattre ce qui m'a semblé erroné, et de dire nettement mon opinion sur les détails et sur l'ensemble. Pour cela j'ai mis à profit, outre mon travail d'autrefois et mes réflexions plus récentes, les lumières qui m'ont été fournies tant par mes recherches personnelles que par l'ouvrage même de M. Cantor, par des ouvrages qu'il a consultés, et par d'autres qui auraient pu lui être d'une grande utilité, s'il avait eu, comme moi, l'avantage de les connaître. En un mot, dans cet examen, pour lequel je réclame l'indulgence des lecteurs en considération de la hâte que j'ai dû apporter dans la rédaction, j'ai fait tout ce que j'ai pu pour rendre quelques services à l'his-

1) XII et 432 pages in-8, avec 51 figures distribuées en 4 planches. — 2) *Recherches nouvelles concernant les origines de notre système de numération écrite.* Paris, 1857, in-8., 57 pages (Extrait de la *Révue Archéologique*).

toire des mathématiques, et en cela j'ai suivi, selon la mesure de mes forces et du temps dont je pouvais disposer, l'honorable exemple de l'auteur du livre dont j'ai à rendre compte.

Mathématicien aussi savant que modeste, M. Cantor a été porté par l'amour de la science à en étudier l'histoire. Étranger à cet esprit de polémique et de dénigrement si commun en Allemagne comme ailleurs, il aime à citer ses devanciers, pour dire franchement ce qu'il croit leur devoir, ou bien en quoi et pourquoi il s'écarte de leurs traces, et non pour relever aigrement leus fautes réelles ou prétendues.

Envers un auteur de ce caractère, la critique doit être non-seulement juste, mais bienveillante. Pourtant s'adressant à un ami sincère de la verité, elle doit s'efforcer de la lui dire toute entière, telle qu'elle croit la voir, sur les défauts comme sur les mérites de son œuvre.

Je vais suivre pas à pas la marche du livre de M. Cantor, l'analyser et l'apprécier en détail, et je donnerai pour titre à chaque partie de cet examen la traduction du titre même de la partie correspondante dans l'ouvrage allemand.

Introduction [1].

Le titre trop général et trop peu précis de cet ouvrage peut se traduire ainsi: *Matériaux mathématiques pour servir à l'histoire de la vie intellectuelle des peuples.* Mais, comme l'auteur l'explique lui-même dans son *Introduction*, l'objet spécial et réel de l'ouvrage est d'étudier l'histoire des signes figurés de numération, et de marquer les rapports qui existent entre cette histoire et celle des peuples qui ont fait usage de ces signes.

Déjà antérieurement M. Cantor avait donné sur ce même sujet quelques dissertations détachées, dans la *Feuille périodique de mathématiques et de physique* qu'il publie de concert avec M. le professeur Schlœmilch et avec M. le docteur Kahl. Puis une dissertation publiée en 1859 par M. Joseph Krist *Sur les systêmes de numération et leur histoire* [2], et surtout une dissertation publiée en 1861 par M. Friedlein sur *Gerbert, la Géométrie de Boèce et les chiffres indiens* [3], ont inspiré à M. Cantor la pensée de reprendre ce sujet, pour le traiter d'une manière plus étendue.

Partant des signes numéraux de Gerbert pour en chercher l'origine, M. Friedlein se trouve conduit a remonter jusqu'à l'Inde. Suivant une autre méthode, qu'il considère comme plus naturelle et plus sûre. M. Cantor commence par étudier les signes de numération des plus anciens peuples, puis il en suit, dans des temps plus récents, les transformations diverses, à travers lesquelles il arrive à expliquer l'origine et la constitution de notre système de chiffres. Cette méthode est plus longue; mais, fidèlement et complètement suivie, elle aurait l'avantage d'embrasser plus sûrement tous les faits qui devraient concourir à la solution de ce dernier problème. D'ailleurs, les faits qu'on rencontre dans cette vaste investigation possèdent, outre cette utilité spéciale, un intérêt plus général pour l'histoire des connaissances mathématiques chez les différents peuples, et pour l'histoire des rapports des peuples entre eux. C'est ainsi que M. Cantor s'est proposé de rattacher à l'histoire universelle de l'espèce humaine l'étude des signes de numération.

Pour accomplir cette tâche si largement comprise, un mathématicien devait avoir besoin, soit d'entreprendre d'immenses recherches historiques, soit d'emprunter les lumières d'autrui. M. Cantor a pris franchement ce dernier parti, et il n'y aurait qu'à l'en féliciter, s'il avait été toujours suffisamment éclairé dans le choix de ses guides en ce qui concerne l'histoire générale des nations, et s'il s'était suffisamment enquis de tous les documents relatifs à l'histoire de l'arithmétique et de la numération. Mais, comme nous le verrons, il a donné trop de confiance à quelques autorités peu sûres, et il a ignoré ou négligé des publications qui auraient pu lui fournir de grandes lumières.

---

1) *Einleitung*, p. 1-8 du livre de M. Cantor. — 2) *Ueber Zahlensysteme und desen Geschichte*, dans le 4. Rapport annuel de l'École pratique *(Realschule)* supérieure de Bude *(Ofen)*. — 3) *Gerbert, die Geometrie des Boëthius und die indischen Ziffern, ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik.* Erlangen, 1861, in-8., 60 pages et 6 planches.

Par exemple pour l'histoire de quelques anciens peuples et des quelques anciens philosophes, il s'en est tenu trop facilement aux hypothèses de M. Rœth. Pour l'histoire des mathématiques pures, considérée dans ses rapports avec le développement de l'esprit humain, il paraît n'avoir pas connu l'ouvrage court et substanciel de M. Arneth 4), qui, à côté d'hypothèses très contestables, lui aurait fourni, sur un point important, quelques vues capables de rectifier les siennes. J'ose ajouter qu'un mémoire 5) publié par moi en 1854, et que M. Cantor ne paraît pas avoir connu, aurait pu lui offrir quelques notions utiles sur les rapports de la géométrie grecque avec celle des Egyptiens et avec celle des Indiens. L'étude des systèmes de chiffres chez tous les peuples se lie étroitement 1° à l'étude de leurs systèmes de numération parlée, 2° à l'étude des noms de nombre employés dans leurs langues. Sur le premiers point, le livre de M. Arneth aurait pu offrir à M. Cantor quelques indications précieuses malgré leur brièveté, et sur les deux points il aurait pu consulter avec fruit les recherces de M. Lepsius 6), et de M. Benlœv 7); sans donner une confiance exagérée à certaines conjectures qui s'y rencontrent. Sur l'histoire des chiffres en particulier, M. Cantor signale le malheur que MM. Krist et Friedlein ont eu de ne pas connaître les résultats importants de travaux français, parmi lesquels, à côté de ceux de M. Chasles et de M. Vincent, il me fait l'honneur de citer avec éloge la dissertation que j'ai publiée en 1857 sur les origines de notre système de numération écrite. Mais M. Cantor lui-même a eu le malheur de ne pas connaître ou de négliger d'autres travaux publiés sur la même question en France et en Italie. Il paraît avoir ignoré les recherches de Cossali, publiées en 1857 par M. le prince Boncompagni 8), sur les origines de nos chiffres et de la valeur de position. Sur les chiffres des peuples orientaux, il n'a pas connu un ouvrage important publié en 1860 par M. Pihan 9). Il n'a pas connu davantage un Mémoire de M. Woepcke, publié à Rome en 1859, sur l'*Introduction de l'arithmétique indienne en occident* 10). M. Cantor, comme on l'aperçoit trop à l'insuffisance de ses connaissances sur les chiffres *gobâr* des Arabes occidentaux, n'a pas connu davantage la traduction donnée à Rome en 1859 par M. Woepcke, d'un traité arabe sur le calcul *gobâr* 11), non plus que la traduction, que le même savant a donnée à Rome en 1861, d'un traité mathématique composé par un arabe d'orient 12). Il a cité 13), sur l'arithmétique arabe, un article de M. Woepcke, inséré en 1854 dans le n. XIII du *Journal asiatique* de Paris; mais il a ignoré ou négligé d'autres articles du même savant, insérés dans le même Journal en 1852, en 1860 et en 1862 14), et, ce qui est très facile à concevoir, mais très regrettable en même temps, il n'a pas connu le *Mémoire* que M. Woepcke a publié, au commencement de 1863, *sur la propagation des chiffres indiens en occident* 15), œuvre capitale, dont je profiterai largement et avec une juste reconnaissance.

Les recherches de M. Woepcke ne font nullement double emploi avec celles de M. Cantor. Le premier traite à fond un sujet beaucoup plus restreint, sur lequel il jette une nouvelle et vive lumière. Le second laisse à désirer sur plusieurs parties du champ immense qu'il a parcouru, et principalement sur celles que le premier a heureusement approfondies. Mais sur des points nombreux, M. Cantor ajoute beaucoup à la

---

4) *Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Entwickelung des menschlichen Geistes.* Stuttgart, 1852, in-8., 291 pages. — 5) *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie et sur tous les ouvrages mathématiques grecs, conservées ou perdus, publiés ou inédits, qui ont été attribués à un auteur nommé Héron.* Paris, 1854, in-4., 488 pages (t. IV, 1 série des Mém. présentés par divers savants à l'académie des inscriptions et belles-lettres). Voyez III. partie ch., 1, §. 3, p. 163-173, et surtout p. 173-176. Comparez *Conclusion*, p. 366-398. — 6) *Zwei Sprachvergleichende Abhandlungen, II Ueber den Ursprung und die Werwandschaft der Zahlenwœrter in der indogermanischen, semitischen und der koptischen Sprache.* Berlin, 1836, in-8. p. 81-150. — 7) *Recherches sur l'origine des noms de nombre japhétiques et sémitiques.* Giessen, 1861, in-8, 108 pages. — 8) *Lezioni sull'aritmetica (Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni*, Roma, 1857, in-4. p. 317-350, et *Memorie storico-scientifiche sulla origine dell' odierna aritmetica e dell' algebra, loro trasporto dall' oriente in Italia, e primi progressi nelle contrade di questa. (Scritti ined., p. 351-397.)* . — 9) *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes.* Paris, 1860, in-8, 271 pages. — 10) 72 pages, in-4. — 11) *Atti dell' accademia pontificia dei Nuovi Lincei*, t. XII, p 230-275 et p. 399-438 — 12) *Atti dell' accad. pontif.* t. XIV. — 13) Note 518, p. 420, et note 640, p. 431. — 14) 1852, n. 12; 1860, n. de février-mars, et 1862, n. de février-mars. — 15) Paris, 1863, in-8., 196 pages, Extrait du n. 1 de l'année 1863 du *Journal asiatique.*

*

somme des notions historiques répandues parmi les savants; de plus, il a le mérite de rapprocher et de réunir ces notions en un ensemble qui les fait valoir et qui appelle de nouvaux progrès. Dans l'œuvre de ce savant, l'ensemble présente des défauts et des lacunes. Mais l'auteur n'a promis que des *matériaux* utiles et non un travail définitif. Certes, il a tenu grandement cette promesse de son titre. En rapprochant le volume de M. Woepcke de celui de M. Cantor, on a vraiment une somme considérable de connaissances sur l'histoire de la numération chez tous les peuples, et l'on est bien près d'entrevoir la solution des difficultés que tous deux laissent subsister et la conciliation des divergences qui les séparent.

Cependant il y a un point que M. Woepcke a laissé entièrement dans l'ombre, point que M. Cantor a touché en me citant, mais qu'il a ensuite oublié, et dans lequel je crois trouver un élément essentiel et décisif de la solution d'une des difficultés principales: ce sont les cinq chiffres ordinaux de la vieille écriture hiératique des Egyptiens pour les nombres au dessous de dix dans l'indication des jours du mois. Sur ce point j'exposerai mes vues personnelles, et j'en ferai valoir les conséquences.

Mais, voulant avant tout faire connaître ce qu'il y a de bon et d'utile dans l'ouvrage de M. Cantor, j'étudierai successivement, après son *Introduction*, les 24 chapitres dont cet ouvrage se compose et les *considérations finales* qui le terminent. Je ne me propose nullement de dispenser de le lire, mais, au contraire, de faire comprendre combien cette lecture est importante, et de la rendre plus profitable. C'est dans les 363 pages du texte de M. Cantor et dans les 69 pages de ses notes, qu'il faut chercher les détails des preuves qu'il donne, et l'indication des documents nombreux auxquels il renvoie. Mais j'aurai grand soin de citer d'une part les documents qu'il a ignorés, d'autre part ceux qu'il a regretté de n'avoir pas à sa disposition, et parmi lesquels on remarque avec quelque surprise des livres importants et peu rares, tels que l'*Arithmétique* de Nicomaque, le *Commentaire* de Jamblique sur cet ouvrage, et l'*Astronomie élémentaire* de Geminus.

Dans tout le cours de son ouvrage, M. Cantor a été dirigé par une pensée qu'il exprime au commencement de son Introduction. Suivant lui, les ressemblances qui se rencontrent entre diverses populations en ce qui concerne tel ou tel domaine du développement intellectuel, par exemple en ce qui concerne les procédés mathématiques, et notamment les signes de numération, ne son pas dues au hasard *la plupart du temps*, mais viennent ordinairement d'influences réciproques ou bien d'une communauté d'origine. Cette proposition attribue avec raison à l'étude historique des connaissances humaines en général, et des connaissances mathématiques en particulier, une grande importance pour éclairer les origines et les relations antiques des peuples, et pour combler ainsi des lacunes de l'histoire politique et de l'ethnographie. Telle qu'elle est formulée par l'auteur, cette proposition peut se justifier par la restriction qu'elle exprime en faveur des *ressemblances dues quelquefois au hasard*, et par d'autres restrictions nécessaires, que M. Cantor peut avoir sous-entendues, mais qu'il aurait été bon d'énoncer et d'expliquer, et sur lesquelles je vais dire ici ma pensée.

Parmi les ressemblances qu'on remarque dans les produits de l'activité intellectuelle des nations, celles qui sont superficielles et isolées peuvent être dues au hasard, c'est à dire à la rencontre, en un même point, d'événements qui appartiennent à des séries de causes et d'effets indépendantes les unes des autres dans tous les autres termes dont ces séries se composent 16). Quant aux ressemblances profondes, multipliées et liées entre elles, il s'agit encore de faire la part des différentes causes qui peuvent les avoir produites. Ces causes possibles me paraissent être: 1° l'identité de nature entre les objets étudiés par des peuples différents; 2° l'identité naturelle des procédés fondamentaux de l'esprit humain, identité spécifique qui subsiste sous la diversité d'aptitudes des races humaines; 3° une tradition remontant à l'origine commune de plusieurs peuples; 4° une transmission opérée postérieurement par l'influence d'un peuple sur un autre.

---

16) Sur cette notion philosophique du hasard, voyez M. Cournot, *Essai sur les fondéments de nos connaissances*, t. 1, chap. 3, p. 49-57. (Paris, 1851. in-8.).

De ces quatre causes possibles, les deux premières n'ont pas été mentionnées par M. Cantor dans son Introduction : elles expliquent certaines ressemblances nécessaires, ou presque inévitables, dans des circonstances où l'esprit humain n'avait qu'une voie à suivre, ou bien n'avait à choisir qu'entre un petit nombre de combinaisons possibles. Mais les deux dernières causes, soit séparées, soit réunies, sont les seules qui puissent expliquer, parmi les ressemblances profondes, multipliées et liées entre elles, celles qui s'étendent à des détails choisis entre beaucoup d'autres combinaisons possibles. Il faut prendre garde d'exagérer la part des deux dernières causes, en leur assignant des effets qui peuvent s'expliquer par la nature même des choses et par l'identité spécifique des procédés de l'esprit humain, ou bien par le hasard. Il faut prendre garde aussi d'attribuer à des influences réciproques, et comparativement récentes, des ressemblances dues à une communauté d'origine entre les peuples, ou de commettre l'erreur inverse. Nous verrons jusqu'à quel point M. Cantor, dans les diverses parties de son livre, a su faire ces distinctions si nécessaires et quelquefois si difficiles.

I. Les Egyptiens. 1)

Avant d'aborder l'analyse de ce chapitre, il me semble nécessaire de dire quelques mots sur une question préliminaire que M. Cantor n'aurait pas dû négliger. Voulant étudier l'histoire de l'arithmétique dans ses rapports avec celle de la culture intellectuelle, et commençant par l'Egypte, il aurait dû indiquer les grandes phases que la civilisation égyptienne a présentées. Grâce aux découvertes de Champollion, de Young et de leurs continuateurs, les antiquités de l'Egypte sont sorties, en partie, de leurs ténèbres mystérieuses. On connait maintenant la puissance de quelques unes des douze premières dynasties énumérées par Manéthon à partir de Ménès, et surtout de la XIIe; on sait que quelques unes des plus anciennes parmi ces douze dynasties toutes indigènes, mais dont plusieurs ont été simultanées, comprennent les rois fondateurs des grandes pyramides; on sait qu'après la XIIe dynastie est venue une décadence, suivie de l'invasion sémitique et de la domination, d'abord oppressive, des Hycsos, qui pourtant acceptèrent peu à peu les arts, les croyances et la réligion des vaincus, et à côté desquels des dynasties indigènes subsistèrent en quelques contrées de l'Egypte 2). On connait l'expulsion des Hycsos, accomplie vers le XVIIIe siècle avant notre ère; la gloire de la XVIIIe dynastie et de la XIXe, qui étendirent leur domination jusqu'aux bords de l'Euphrate et y établirent l'influence Egyptienne pour cinq siècles. On sait qu'ensuite des troubles intérieurs firent perdre à l'Egypte ce vaste développement extérieur de sa puissance, et qu'au milieu de quelques alternatives de prospérité et de revers, elle en vint au point de tomber à son tour sous une domination étrangère, c'est-à-dire sous celle des Ethiopiens d'abord, puis sous celle des Perses, sous celle des Grecs et sous celle des Romains, mais non sans faire subir aux conquérants l'influence de ses idées et de ses croyances, et en devenant un foyer où s'opéra la fusion des idées de l'orient et de celles de l'occident. Ces faits, bien établis maintenant, sont de l'importance la plus haute pour l'histoire des sciences; car, par exemple, ils expliquent un antique échange de notions scientifiques entre les Egyptiens et les Babyloniens, fait indiqué par les anciens et confirmé par les recherches modernes.

Au lieu de tout cela, M. Cantor (p. 9-10) se contente de signaler, après M. Braun 3), l'antiquité et l'originalité des arts en Egypte, d'y faire remonter l'écriture au delà de 2000 ans avant notre ère (ce qui est bien au dessous de la réalité), de dire que Sésourtésen II, dont on admire le tombeau orné de peintures à Beni-Gassan, est du XXIIIe. siècle avant notre ère (date très contestable), et que Ramsès II, le grand Sésostris, dont le monument près de Thèbes est orné de peintures astronomiques, est du XVe siècle avant

---

1) *Die Ægypter*, p. 9-21 de M. Cantor.— 2) La XIVe et la XVIIe dynasties indigènes furent contemporaines de la XVe et de la XVIe, qui appartenaient aux Hycsos. — 3) *Geschichte der Kunst in ihrem Entwicklungsgang durch alle Vœlker der alten Welt.* Wiesbaden, 1856 et 1858, in-8., 2 volumes parus.

Jésus-Christ (ce qui est vrai). Et voila tout ce que M. Cantor trouve à nous dire sur l'histoire d'Egypte. C'est qu'il a négligé de consulter les travaux de M. de Rougé, de M. Mariette et d'autres savants français, et même les ouvrages de ses savants compatriotes MM. de Bunsen, Lepsius et Brugsch. Son guide principal, pour l'histoire d'Egypte, comme pour quelques autres parties de l'histoire ancienne, a été M. Rœth, dont la science, très grande sur quelques points, offre sur d'autres points les plus étranges lacunes, parceque, trop confiant dans ses hypothèses hasardées, il affecte d'ignorer les travaux de ses devanciers et de ses contemporains. C'est ainsi que, dans son volume publié en 1846, *sur les doctrines réligieuses de l'Egypte et de Zoroastre,* M. Rœth 4) déclare n'avoir pas consulté les volumes alors publiés de l'ouvrage de M. de Bunsen sur l'Egypte, et met en doute l'utilité de cette lecture, qui pourtant aurait pu lui épargner les erreurs énormes qu'il a commises dans son *Aperçu des anciens temps de l'histoire*, par exemple, en prenant 5) pour des rois Hycsos les indigènes de la IVe et de la Ve dynastie de Manéthon, fondateurs des grandes pyramides de Gyzeh.

Je ne m'arrêterai pas à l'aperçu rapide que M. Cantor présente sur les diverses formes de l'écriture égyptienne. Je remarquerai seulement, en passant, qu'il fait un contresens en voulant traduire une phrase grecque de Saint Clément d'Alexandrie sur le *scarabeus sacer* ou *pilularius* 6) symbole du soleil chez les Egyptiens. M. Cantor aurait dû remarquer ici que pour exprimer les noms de nombre par l'écriture, tantôt les Egyptiens employaient des signes numéraux idéographiques et arbitrairement choisis, c'est-à-dire des chiffres, tantôt, et plus souvent dans les inscriptions ils écrivaient les noms de nombre, comme les autres mots de leur langue, par des signes les uns phonétiques, les autres symboliques. Sur l'écriture égyptienne des noms de nombre, la somme des connaissances acquises a été augmentée par la savante explication de l'inscription d'Edfou, donnée en 1855 par M. Lepsius dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, et que M. Cantor aurait dû citer. On y voit qu'au lieu d'employer une fraction dont le numérateur aurait été plus ou moins fort, les Egyptiens, comme Ptolémée et d'autres Grecs, la décomposaient en une suite de fractions ayant toutes pour numérateur l'unité. Du reste, la notation Egyptienne des fractions en chiffres, notation que M. Cantor a eu le tort d'omettre, procédait de même.

Arrivons aux chiffres des Egyptiens. Les renseignements donnés sur ces signes numéraux par M. Cantor, et accompagnés de figures 7), sont exacts et presque suffisants en ce qui concerne les signes *hiéroglyphiques* et les signes *hiératiques* des nombres tant cardinaux qu'ordinaux. Il a fort bien remarqué que chacun des neuf premiers nombres s'exprime dans l'écriture hiéroglyphique par la répétition du signe de l'unité, et que ces signes ainsi répétés se divisent par groupes de 4 au plus; que dans l'écriture hiératique les 10 premiers nombres cardinaux s'expriment par dix signes distincts, et qu'au contraire parmi les neuf premiers nombres ordinaux des jours du mois dans cette même écriture hiératique, les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 sont les seuls qui s'expriment chacun par un signe unique, tandis que les nombres 5, 6, 7 et 8 s'expriment par l'union deux à deux des signes de 2, de 3 et de 4. De cette double remarque M. Cantor aurait pu conclure avec vraisemblance que parmi les signes hiératiques ceux des

---

4) *Geschichte unserer abendlændischen Philosophie*, I Band, *Die Ægyptische und die Zoroastrische Glaubenslehre*, Préface, p. VIII. Mannheim, 1846, gr. in-8.— 5) Même volume, *Uebersicht der ælteslen Geschichte*, p. 85.— 6) Il est faux que ce scarabée *tourne les dos* à la boule de fiente de bœuf qu'il a l'habitude de rouler devant lui, et jamais le mot grec *ἀντιπρόσωπος* n'a signifié *tournant les dos:* ce mot veut dire, au contraire, *tourné en face.* Si le scarabée, comme le veut M. Cantor, était comparé par Saint Clément à un homme qui détournait les yeux, parcequ'il ne pourrait pas supporter l'éclat du globe solaire, ce serait le globe de fiente de bœuf, et non le scarabée, qui serait le symbole du soleil. Suivant Saint Clément et d'autres auteurs anciens qui complètent son explication de ce symbole, les Egyptiens considéraient le soleil, représenté par le scarabée, comme le moteur qui produit le mouvement diurne du globe céleste d'orient en occident autour de la terre, tandis que le soleil lui-même, exécutant annuellement une révolution en sens contraire autour du ciel, marche en face de la direction qu'il lui imprime. C'est ainsi qu'un homme ou un animal, courant dans une roue mobile sur un axe fixe, le fait tourner en sens contraire Voyez mes *Etudes sur le Timée de Platon*, t. 2, p. 111-112. (Paris, 1841, in-8.). — 7) Voyez M. Cantor, p. 15-19, et figures 2, 3, 4, 5, 6 et 7 des planches.

nombres ordinaux des jours du mois sont plus anciens que ceux des nombres cardinaux, puisque les premiers seuls portent la trace de la période quaternaire, reconnaissable aussi dans le système hiéroglyphique de la notation égyptienne des nombres. Il aurait dû ajouter que la notation hiératique ordinale des jours du mois a passé dans l'écriture *démotique* des Egyptiens.

Au dessus du nombre 9, l'écriture hiéroglyphique a des signes particuliers pour 10, pour 100, pour 1000 et pour 10000, et elle exprime les nombres de dixaines, de centaines et de milliers par la répétition du signe; tandis que l'écriture hiératique a de plus des signes particuliers pour les 9 nombres cardinaux tant de dixaines que de centaines et de milliers. Mais ces signes offrent diverses combinaisons du signe de 100 ou de 1000 avec les signes des nombres d'unités simples pris pour multiplicateur, mais avec l'aide du procédé additif. M. Pihan montre que les seuls multiplicateurs ainsi employés sont 2, 3, 4, rarement 7, et 3 et 4 placés en haut avec valeur double.

Là s'arrête M. Cantor. Voici ce qu'il aurait dû ajouter 8). Ces deux écritures procèdent par répétition pour les nombres de myriades. Cependant les nombres de myriades, depuis 5 jusqu'à 9, se trouvent aussi exprimés par les signes de ces nombres placés au dessus du signe de la myriade. Pour les centaines de mille et les millions, dans l'écriture hiéroglyphique on mettait le signe de 1000 au dessous des signes qui exprimaient le nombre de milliers; dans l'écriture hiératique, le signe du nombre 100, placé au dessous des signes des nombres 1000, ou 2000, ou 3000, ou 10000, etc., servait de multiplicateur à ces nombres. Enfin l'écriture hiéroglyphique avait aussi des signes particuliers pour les centaines de mille, les millions et les dixaines de millions.

Voici des omissions plus graves. M. Cantor a négligé de faire connaître les signes *démotiques* des nombres: cette notation est parfaitement exposée dans la *Grammaire démotique* de M. Brugsch. Le même ouvrage, s'il l'avait consulté, lui aurait fourni les signes des fractions, et les signes de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, objets sur lesquels il n'a donné que des renseignements insuffisants. Tout cela se trouve réuni et très bien expliqué dans l'ouvrage de M. Pihan 9). Mais M. Cantor s'est contenté de suivre le tableau de M. Seyffarth.

Il a reproduit avec trop de confiance la fausse hypothèse de M. Seyffarth sur l'étoile à cinq rayons, considérée par cet égyptologue comme symbole de Mars, cinquième planète, tandis que suivant Horopollon 10), elle signifie le nombre 5, et qu'en effet, dans l'inscription de Rosette, l'étoile à 5 rayons, placée au dessus d'un globe solaire, signifie cinq jours solaires, comme le texte grec de cette inscription le prouve 11). D'ailleurs l'inscription d'Edfou, expliquée par M. Lepsius 12), prouve que cette étoile était bien certainement, non pas, il est vrai, un chiffre, mais un caractère symbolique exprimant le nombre 5 dans l'écriture hiéroglyphique, du moins à l'époque des Ptolémées. M. Cantor a reproduit de même, mais sans y adhérer, l'hypothèse de M. Seyffarth sur la valeur alphabétique des chiffres des Egyptiens: C'est là une des mille rêveries de cet égyptologue peu digne d'être cité 13).

M. Cantor aurait mieux fait d'examiner un savant mémoire de M. Lepsius 14), dont voici les conclusions sur la numération *parlée* des Egyptiens. Nous avons vu que, dans le système des signes numéraux hiéroglyphi-

---

8) Voyez les tableaux de M. Pihan, p. 25-41, et M. Devéria, *Notation des centaines de mille et des millions dans le syst. hiérogl. des anc. Egypt.* (Extrait de la Révue archéol. 1862.). — 9) P. 33 et p. 35-40. — 10) *Hiérogl.*, 1, 13, p. 20, ed. Leemans. — 11) Voyez M. Jomard, dans la *Description de l'Egypte*, *Antiquités*, *Mémoires*, t. 2, p. 62 (Paris, 1818, in-fol.), et M. Pihan, p. 33-35. — 12) *Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, *philos. hist. Klasse*, 1855, p. 76. — 13) Voulant voir partout des symboles scientifiques, M. Seyffarth lit sur les monuments égyptiens des dates imaginaires, de même qu'il lit, dans l'ordre des lettres de ce qu'il appelle l'*alphabet sémitique*, la date précise du déluge. Comparez mon Mémoire intitulé: *Opinion de Manéthon sur la durée totale de ses 30 dynasties*, note 32 (Extrait de la *Revue Archéologique*, année 1860). Les rêves chronologiques et astronomiques de M. Seyffarth sont, ou du moins *étaient*, suivant l'expression dure, mais juste, de M. de Bunsen, *une honte pour l'Allemagne* (*Egyptus Stelle in der Weltgeschichte*, t. 4, p. 40, et t. 5, 2 partie, Préface, p. XVII). Je dis *étaient*; car M. Seyffarth, desespérant de faire école en Allemagne, est allé professer en langue anglaise ses doctrines à Saint Louis dans l'état de Missouri. Voyez la préface de son livre intitulé: *Chiliasm critically examined by* Gustav Seyffarth. New-York, 1861, in-8.— 14) Cité ci-dessus, *Introd.*, note 3. Voyez surtout, §§ 6, 22-24, 26, 29-32 et 44; p. 88-90, 104-106, 109-110, 114-115, et 136-137.

ques et dans le système des signes hyéroglyphiques pour les nombres ordinaux des jours du mois, les Egyptiens procédaient par addition audessus du nombre 4 jusqu'au nombre 9, et que pour les dixaines ils procédaient aussi par addition au dessus de 40 jusqu'au 90. De même, cette habitude de procéder par addition au dessus de 4 se retrouve dans la formation des noms de nombre dans la langue copte, issue de la langue égyptienne. Cette habitude de s'arrêter au nombre 4, nombre égal à celui des mois de chacune des trois saisons dans l'année égyptienne de 12 mois, pourrait faire supposer chez ce peuple l'existence antique d'un système de numération quaternaire d'abord, puis duodécimal, que le système décimal aurait remplacé plus tard, sans en effacer la trace. En effet, le nom copte qui signifie 8 est le duel de celui qui signifie 4. Ainsi le système décimal ne se sérait introduit qu'après coup dans la numération égyptienne, tandis qu'il est primitif dans la numération indo-européen. Sans accorder une confiance entière à cette hypothèse de M. Lepsius, on doit tenir compte des faits sur lesquels elle s'appuie.

M. Cantor aurait dû aussi, dès ce chapitre et sauf a y revenir plus tard, signaler la ressemblance frappante qui existe entre les chiffres hiératiques ordinaux 1, 2, 3, 4 et 9 pour les jours du mois, tels que ces chiffres se trouvent dans des documents égyptiens très antiques, et les figures des chiffres correspondants dans le système de Boèce, dans le système des Arabes occidentaux et orientaux, dans le système indien et dans notre système moderne. J'avais signalé cette ressemblance 15), notée aussi depuis par M. Pihan (p. 41.). M. Cantor, qui la mentionne, en me citant, dans son chapitre XVI (p. 239), l'oublie ensuite entièrement, quand il s'agit de remonter à l'origine de nos chiffres. Je me garderai bien d'imiter cet oubli dans la suite de cet Examen.

En terminant ce chapitre M. Cantor rappelle les textes d'Hérodote et de Platon sur la culture de l'arithmétique chez les Égyptiens, et le texte important de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne sur l'emploi des figures géométriques dans l'astronomie égyptienne. Sur cette astronomie elle-même, il ne dit qu'un seul mot, pour reproduire, après M. Rœth, une ancienne hypothèse de M. Biot, abandonnée depuis par ce savant lui-même et réfutée par la découverte, que M. Lepsius a faite, des *cinq jours épagomènes* sur des monuments très antérieurs à l'an 1780 avant notre ère, époque prétendue de la transformation d'une année égyptienne de 360 jours en une année de 365 jours.

Sur la géométrie des Egyptiens, qu'il se représente comme très savante, M. Cantor promet de revenir (chapitre VI) à propos de Thalès et de Pythagore, leurs disciples. Quand cette appréciation, beaucoup trop favorable à la géométrie des Égyptiens, se représentera, il sera temps de la combattre.

M. Cantor omet ici les Phéniciens, les Palmyréniens 16), et les Syriens 17). Ces trois peuples avaient chacun deux systèmes de notation numérale, l'un alphabétique, comme celui des Hébreux 18) et des Grecs, l'autre analogue d'une part à la notation hiéroglyphique des Egyptiens, d'autre part à la notation cunéiforme des Babyloniens. M. Cantor saisira plus tard une occasion moins naturelle de parler des deux notations des Syriens et des Palmyréniens et de la notation des Hébreux 19); mais les Phéniciens seront définitivement omis. Ici, de l'Egypte, il passe immédiatement à la Babylonie.

II. Les Babyloniens. 1)

Après un bon et court résumé 2) sur l'écriture cunéiforme, et sur les trois langues auxquelles elle a été appliquée, langue *perse*, langue *assyrienne*, et langue *scytique* de la Susiane 3), nommée aussi langue *tou-*

---

15) *Rech. nouv. sur l'origine de notre système de numération écrite* (*Revue archéol.* 1857), § 6 et 8, p. 36 et 55 du tirage a part. — 16) Sur la numération écrite des Phéniciens et des Palmyréniens, voyez M. Pihan, p. 162-168.—17) Voyez M. Rœdiger, *Die Syrischen Zahlzeichen*, dans la Revue de la Société orientale allemande, t. 16, p, 577 et suiv., et M. Cantor, ch. XVII, p. 256 et figure 49. — 18) Sur la notation hébraïque des nombres, voyez M. Pihan, p. 169-170. — 19) Voyez M. Cantor, chap. XVII, p. 253-256, et figures 46, 47 et 48.—1) *Die Babylonier*, p. 22-38 de M. Cantor. — 2) M. Cantor a consulté surtout M. Spiegel, *Die altpersiscken Inschriften* (Leipzig, 1862), et M. Mordtmann, *Erklærung der Keilinschriften der zweiten Gattung* (Leipzig, 1862). Il aurait pu consulter aussi MM. Rawlinson, de Sauley, Oppert, et Ménant.— 3) Suivant l'opinion de M. Mordtmann, adoptée par M. Cantor, les peuples scytiques, auxquels s'adressait le second texte de l'inscription triligue de Béhistoun, étaient ceux de la Susiane.

ranienne ou *anarienne*, M. Cantor se hâte d'arriver aux signes numéraux conéiformes des Assyriens, signes qui, étant idéographiques, étaient employés également, avec de légères différences, par les Perses et par les Scythes, malgré la différence complète des trois langues. Sur cette notation cunéiforme des nombres, M. Cantor donne des renseignements auxquels, pour être aussi complets que ceux qui avaient été fournis à M. Pihan par M. de Saulcy d'après l'inscription cunéiforme trilingue de Béhistoun 4), il ne manque qu'une indication, mais bien importante, celle de la notation cunéiforme des fractions. Le numérateur de la fraction s'exprime seul à la suite des nombres entiers, et le dénominateur sous-entendu est toujours 60. Si M. Cantor avait connu ce fait, il n'aurait pas hésité, sans doute, à placer en Babylonie l'origine tant de la division sexagésimale du cercle et du jour, que de la division sexagésimale, restée plus usuelle, du degré et de l'heure. Dans ses *Conclusions finales* (p. 361-362), M. Cantor arrive tardivement à cette pensée; mais il ne trouve, pour l'appuyer, que les remarques de M. Oncken sur l'emploi fréquent du nombre 60 et de ses multiples, comme nombres ronds, dans les récits qui viennent de la Babylonie. M. Cantor aurait pu remarquer aussi que 60, produit de 5 par 12, est le nombre des années d'un cycle chinois; que 5, 12 et 60 sont les nombres des années de trois cycles indiens, et que 60 est la base des grands nombres de la chronologie fabuleuse des Indiens et de celle des Babyloniens et des périodes de temps de ces deux peuples. Ces remarques sont importantes par l'appui qu'elles apportent à l'hypothèse si probable de MM. Lassen et Weber, d'après laquelle les chaldéens, par leurs rapports avec les Egyptiens et les Phéniciens d'une part, et avec les Indiens d'autre part, ont servi d'intermédiaires entre l'extrême orient et l'occident.

Voilà donc une lacune regrettable dans ce chapitre de M. Cantor. En revanche, si l'on compare, sur la notation cunéiforme des nombres entiers, ses tableaux (figures 9, 10 et 11) avec ceux de M. Pihan (p. 42-44), on remarque qu'ils les complètent sur un point important. Dans les uns comme dans les autres, le coin vertical avec la pointe en bas représente l'unité simple; le coin horizontal plus ou moins évidé à droite, et avec la pointe à gauche, représente la dixaine; le coin horizontal avec la pointe à droite représente la centaine, et chaque nombre au dessous de 10 et représenté par ce même nombre de coins verticaux diversement groupés. Mais, d'après une variante donnée par M. Cantor (Figure 11 et p. 31), et appuyée par l'autorité de MM. Hincks et Grotefend, dans les figures des nombres depuis 6 jusqu'à 9, cinq des unités sont quelquefois représentées par un seul coin vertical plus grand et placé à gauche des autres: ce qui constitue une *valeur de position* quintuple. D'un autre côté, dans les tableaux de M. Pihan, outre que les quatre ou cinq coins horizontaux représentant 40 ou 50 sont plus petits et d'une autre forme que le coin unique ou les deux ou trois coins horizontaux qui expriment 10, 20 et 30, les signes cunéiformes des nombres supérieurs de dixaines depuis 60 jusqu'à 90 représentent 50 par un grand coin vertical placé à gauche du coin ou des coins horizontaux qui expriment les dixaines simples ajoutées a 50, et ce grand coin vertical est pareil à celui qui exprime 5 quand il est placé à gauche des coins verticaux plus petits qui expriment les unités simples. Voilà donc une *valeur de position* cinquante fois égale à la valeur simple. Cette manière d'exprimer 60, 70, 80 et 90 est la seule que M. Pihan donne. M. Cantor (figure 11) la donne aussi, mais à titre de variante: dans son tableau principal (figure 9), chaque nombre de dixaines au dessous de 100 est représenté par ce même nombre de coins horizontaux ayant la pointe à gauche.

Ainsi suivant la remarque de M. Cantor (p. 31-32), la numération cunéiforme offre un signe qui a une valeur de position quintuple lorsqu'il est placé à gauche de signes d'unités simples, et une valeur de position égale 50 fois à sa valeur simple, lorsqu'il est placé à gauche de signes de dixaines. Il aurait été bon d'ajouter que la valeur de position des chiffres, entièrement étrangère à l'Egypte, se montre en Babylonie, où elle procède par 5 et par 50, et qu'elle a reçu tout son développement dans l'Inde, où elle procède par 10 et par les puissances de 10. Il aurait été bon de remarquer aussi que, suivant M. Lepsius 5), comme suivant M. Benlœw 6), le mot *cinq* dans les langues indo-européennes remonte à une racine qui signifie *main*.

---

4) Voyez M. Pihan, p. 42. — 5) Num. 33-38, p. 115-127, de la Dissertation citée ci-dessus, Introd., note 6. — 6) P. 19 de la Dissertation citée ci-dessus, Introd., note 7.

Ainsi, suivant M. Lepsius 7), de même que le nombre 4 avait été la première base du système duodécimal primitif des Egyptiens, auquel le système décimal était venu se substituer sans l'effacer entièrement 8), de même le nombre 5, qui est celui des doigts de chacune des deux mains, a été la première base du système décimal des peuples indo-européens. En effet, par exemple, dans la numération romaine par lettres, outre l'unité, les seuls nombres exprimés par une seule lettre sont, d'une part 5, 50 et 500, d'autre part 10 et quelques puissances de 10, et il en est de même dans la vieille notation numérale des Grecs par lettres majuscules initiales, telle qu'on la trouve sur les plus anciennes inscriptions grecques 9). M. Lepsius (p. 129) ajoute avec raison qu'en grec un verbe dérivé de la racine qui signifie *cinq*, le verbe πεμπάζειν, signifie *compter*.

Si M. Cantor avait connu et reproduit ces remarques, il aurait eu l'occasion toute naturelle d'y joindre la mention, qu'il a donnée avec moins d'àpropos dans son chapitre III (p. 44), non-seulement sur des systèmes de numération procédant par 5, par 10, ou par 20, mais sur d'autres systèmes procédant par 7, par 12, par 16 et par 18.

Sur la notation cunéiforme des nombres supérieurs à 99, M. Cantor (p. 29-31) présente quelques observations justes et importantes, qui manquent aux tableaux de M. Pihan. Le coin horizontal avec la pointe à droite et avec un coin vertical à gauche signifie 100; s'il y a plusieurs centaines, le nombre de ces centaines est exprimé par celui des coins verticaux, qui, placé à gauche de ce signe, ont la valeur d'un multiplicateur. De même, si le coin horizontal qui signifie 10 est placé à gauche des deux coins, l'un vertical, l'autre horizontal, qui signifient 100, ce groupe représente 10×100, c'est-à-dire 1000, et l'on met à gauche autant de coins verticaux qu'il y a de milliers. Si le coin horizontal qui signifie 10 est placé à gauche du groupe de coins signifiant 1000, le nombre représenté est 10000. En général, suivant la remarque de M. Cantor, dans la notation numérale cunéiforme, quand le signe d'un nombre d'ordre décimal inférieur est mis à droite d'un signe d'ordre décimal supérieur, la valeur du premier s'additionne avec celle du second; mais, si le premier est mis à gauche du second, il le multiplie. M. Cantor aurait dû rappeler qu'il y a une exception pour le coin vertical plus grand, qui à gauche de petits coins verticaux signifie 5, et à gauche de petits coins horizontaux ayant la pointe à gauche, signifie 50, et dont la valeur de position s'additionne avec la valeur des signes placés à droite. Du reste, M. Cantor a raison de conclure que les Babyloniens semblent avoir eu à un bien plus haut degré que les Egyptiens le sentiment des unités de différents ordres. En effet, nous avons vu que dans les signes numéraux des Egyptiens il n'y a pas de *valeur de position*, que l'*addition* domine surtout dans la notation numérale hiéroglyphique, et que la *multiplication* ne commence à s'y montrer que pour les nombres supérieurs à 10000. Mais, dans la notation hiératique et démotique des Egyptiens, la multiplication se montre déjà, concurremment avec l'addition, dans les signes des nombres de centaines, et de milliers.

M. Cantor dit ensuite que probablement la Babylonie, centre de commerce le plus important des temps antiques, devait avoir la *tablette à compter*, si répandue en orient et en occident, le *suan-pan* des Chinois, l'ἄβαξ des Grecs, l'*abacus* des Romains. Cette hypothèse est très probable, pourvu qu'il ne s'agisse que de l'abacus à boules ou à jetons 10). Mais nous verrons (chap. X), que M. Cantor prétend attribuer aux Babyloniens, soit les *apices* de Boèce avec les 9 chiffres, soit l'abacus dessiné pour recevoir dans ses colonnes les chiffres écrits: c'est là une hypothèse que rien n'autorise.

M. Cantor remarque que, suivant M. Layard, outre l'écriture cunéiforme, qui allait de gauche à droite, les Assyriens avaient une écriture cursive qui allait de droite à gauche, et dans laquelle pour exprimer les nombres, ils paraissent avoir employé des chiffres analogues à ceux des Egyptiens. C'est là un fait à vérifier, mais vraisemblable d'après ce que nous avons dit (chap. I) et ce que M. Cantor aurait bien fait de dire, sur la longue domination des Egyptiens aux bords de l'Euphrate.

---

7) P. 183-184 de la Dissertation citée. — 8) Voyez dans le chapitre précédant le rapport de ce nombre 4 avec les mois des saisons égyptiennes. — 9) Voyez ci-après, chap. VIII et XI. — 10) Voyez ci-après, chap. IX.

S'emparant d'une tradition d'après laquelle la théorie du nombre *moyen proportionnel armonique* aurait eté inventée en Babylonie, d'où Pythagore l'aurait apportée en Grèce 11), M. Cantor incline à penser que les Babyloniens avaient fourni au moins les éléments des spéculations sur les nombres développées par Nicomaque de Gérase. Mais c'est là une pure conjecture, fondée sur une tradition bien douteuse.

Sur l'importance de la Métrologie babylonienne, M. Cantor se réfère aux savantes recherches de M. Bœckh, à côté desquelles il aurait pu citer l'ouvrage plus récent et beaucoup plus étendu de M. Vazquez Queipo.

M. Cantor fait une simple allusion à l'astronomie des Chaldéens et à l'application qu'ils y faisaient de l'arithmétique comme les Egyptiens y appliquaient la géométrie, suivant un texte de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne.

III. Les Chinois. 1)

Après avoir résumé brièvement le caractères et l'histoire de la langue monosyllabique si pauvre des Chinois et de leur écriture idéographique si riche, M. Cantor remarque avec raison que, ne pouvant représenter phonétiquement les noms de nombre, ce peuple dut dès l'origine les représenter par des chiffres, et que ces chiffres dûrent lui appartenir en propre, à moins qu'ils ne lui vinssent de quelques peuples dépourvus, comme lui, d'alphabet, tels que les Aztèques et les Muyscas du nouveau continent. Mais il incline à croire, avec M. Alexandre de Humboldt, qu'au contraire ces peuples américains devaient leurs chiffres aux Chinois.

Quoique la langue des Chinois et leur écriture soient indépendantes l'une de l'autre, cependant, comme le montre M. Cantor, leur ancien système de numération écrite répondait exactement à leur système de numération parlée. Tous deux sont exactement décimaux. Les dix premiers nombres sont exprimés chacun par un mot et par un chiffre, et il en est de même des puissances de 10. Quand le nom ou le chiffre d'un des dix premiers nombres est placé avant le nom ou le chiffre de 10 ou d'une de ses puissances, il le multiplie; quand il est placé à la suite, il s'additionne avec lui. L'écriture chinoise, pour les anciens chiffres comme pour les autres caractères, procède par colonnes verticales, qui se lisent de haut en bas, et qui se succèdent de gauche à droite. Ce système offre plusieurs variétés, omises par M. Cantor 2), mais données par M. Pihan 3).

De plus, il y a deux systèmes de nouveaux chiffres chinois, qui se lisent horizontalement, en mettant à gauche les unités de l'ordre le plus élevé, comme dans l'écriture cunéiforme. Le premier système est celui des chiffres de commerce, qui ne s'impriment jamais: ils s'écrivent de telle sorte qu'à gauche ou au dessus des chiffres exprimant 10, 100, 1000 et les autres puissances de 10, se trouve le chiffre exprimant le nombre de dixaines, de centaines, de milliers, etc., et que le zéro, sous la forme d'un cercle, remplace les ordres d'unités décimales qui manquent dans le nombre total. Jusqu'ici M. Cantor et M. Pihan sont d'accord sur ce système chinois des chiffres de commerce 4). Mais M. Cantor ajoute que, si les unités simples manquent, on est libre de ne pas exprimer 10, et le chiffre marquant le nombre des dixaines est reconnu pour tel, par cela seul qu'il est couché sur le côte et que le zéro ne s'interpose pas entre lui et le chiffre des centaines. On voit donc poindre ici la valeur de position, puisque le chiffre qui signifie 2, par exemple, est pris pour 20, lorsque, couché sur le côté, il vient immédiatement, de gauche à droite, après le chiffre des centaines, au lieu d'en être séparé par les dixaines ou par un zéro. M. Cantor con-

---

11) Voyez Jamblique, *Commentaire sur l'arithmétique de Nicomaque*, p. 168, ed. Tennulius (Arnheim, 1648, in-4.) Comparez Théon de Smyrne, *Astronomie*, chap. 30, p. 272 de mon édition (Paris, 1849, in-8.). — 1) *Die Chinesen*, p. 39-52 de M. Cantor. — 2) Voyez les figures 12 et 13 de M. Cantor.— 3) Les chiffres ordinaires de ce système, ceux qu'on trouve habituellement dans les ouvrages imprimés, sont les chiffres *Kiäi-Chóu*, que M. Pihan (p.2-3) donne sous deux formes, et M. Cantor (figure 12) sous la première forme seulement. M. Pihan donne de plus les chiffres cursifs *Tsao* (p.2), et les vieux chiffres *Tchhouan* sous leurs deux variétés (p.9-14). — 4) Voyez M. Cantor, p. 45-46 et figure 14, et M. Pihan p. 5-7.

*

sidère ce système usuel comme une transition entre l'ancien système et le nouveau système à l'usage des savants. Mais c'est plutôt une sorte de compromis populaire entre l'ancien système et le système nouveau, venu de l'étranger.

Ce dernier système, que M. Cantor décrit d'après MM. Edouard Biot et Biernatzki, est celui des *barres numérales* 5). Les cinq premiers nombres y sont exprimés par 1, 2, 3, 4 et 5 barres toutes verticales ou toutes horizontales, et les quatre nombres suivants sont exprimés par une barre horizontale ou verticale, qui vaut 5, et qui est superposée à 1, 2, 3 ou 4 barres toutes verticales ou toutes horizontales, dont chacune vaut une unité. Ensuite ces 9 chiffres, formés chacun d'un groupe de barres, s'emploient avec le zéro et avec une valeur de position toute pareille à celle des chiffres indiens et des nôtres.

Il y a évidemment dans ce système deux éléments, bien distincts: 1° pour les nombres jusqu'à 9 inclusivement, les combinaisons des barres numérales sont analogues à celles de la notation numérale hiéroglyphique des Egyptiens et de la notation numérale cunéiforme des Babyloniens 6); 2° pour le nombres au dessus de 9, tout se réduit à l'emploi des 9 groupes de barres, avec valeur de position pour chaque groupe et avec le zéro. Le premier élément n'offre qu'une extension du procédé appliqué à l'expression des trois premiers nombres dans les anciens systèmes *Kiâï-Chôu* et *Tchouan* des Chinois 7) et dans le vieux système indien de Guzarate 8), et à l'expression des neuf premiers nombres dans le système hiéroglyphique des Egyptiens et dans le système cunéiforme des Babyloniens. Ce premier élément ne s'adapte que difficilement avec la valeur de position, qui s'arrangerait beaucoup mieux d'un signe unique pour chacun des neuf premiers nombres. Quant au second élément, qui consiste précisément dans la valeur de position et dans le zéro, M. Reinaud 9) a établi que c'est un emprunt fait aux Indiens par les Chinois.

En vain Biernatzki, combattu trop faiblement par M. Cantor, insinue que, pour la numération écrite avec valeur de position, les Chinois ont la priorité sur tous les autres peuples, parce qu'ils l'ont sur les Arabes. Les exemples qu'on cite de ce système chez les Chinois ne remontent pas au delà du VIIe siècle de notre ère, tandis que les exemples du système indien remontent, comme nous le verrons, jusqu'au V$_e$. On objecte que l'existence du signe compliqué *ling* signifiant zéro 10) dans l'ancien système *Kiâï-Chôu* des Chinois prouve l'usage de la valeur de position, même dans cet antique système. Mais il est certain que les puissances de 10 y étaient exprimées par des signes particuliers sans valeur de position, et M. Cantor a raison de répondre que le signe *ling* y pouvait servir à exprimer isolément une quantité nulle, comme en grec l'ο, lettre initiale du mot οὐδέν 11).

Ensuite M. Cantor fait justice d'une fausse hypothèse, qu'il avait autrefois acceptée lui-même. Leibniz, ce grand génie, qui avait ses chimères, considérait non-seulement comme un symbole de la *création ex nihilo,* mais comme une preuve irrécusable de ce grand acte de Dieu, le système binaire, qui, avec l'unité, le zéro et la valeur de position, peut exprimer tous les nombres imaginables. Les Chinois nomment *Kouas* des symboles composés de deux éléments, qui sont une ligne droite continue et une ligne droite interrompue au milieu. Or, dans ces deux éléments des *Kouas* attribués à Fohi, c'est-à-dire à l'un des plus anciens rois de la Chine, le P. Bouvet, correspondant de Leibniz, prétendait reconnaître l'unité et le zéro du système binaire. Mais cette hypothèse, accréditée par Leibniz parmi les mathématiciens, est depuis longtemps et à bon droit rejetée par les sinologues, qui savent que les *huit Kouas,* formés de deux éléments contraires, étaient un symbole physique et non un système de chiffres 12).

Quant au *Suan-pan* des Chinois, instrument de calcul, composé de boules enfilées, dont chaque rangée avait une valeur de position, M. Cantor en parlera plus loin (chapitre IX).

---

5) Voyez M. Cantor, p. 46-48 et figures 15-16, et M. Pihan, p. 7-9. — 6) Comparez ce que nous avons dit ci-dessus, chapitres I et II. — 7) Voyez M. Pihan, p. 2 et 10, et M. Cantor, figure 12. — 8) Voyez le tableau dressé d'après M. Thomas par M. Pihan, p. 65. — 9) *Académie des inscriptions*, t. 18, 2 partie, p. 301.— 10) Figure 12 de M. Cantor, qui a suivi Abel Rémusat. — 11) Voyez ci-après, chap. VIII. — 12) Voyez Visdelov, *Notice sur l'Y-King*, dans les *Livres sacrés de l'Orient* publiés par M. Pauthier, p.137-146 (Paris, 1840, gr. in-8. à deux colonnes et Windischmann. *die Philosophie im Fortgang der Weltgeschichte*, 1 partie (seule parue): *Die Grundlagen der Philosophie in Morgenland*, livre I, p. 135-173, 181-182, 306, 317, etc., (Bonn, 1827-1834, in-8.).

M. Cantor termine ce chapitre d'une manière malheureuse, en citant la découverte de porcelaines avec inscriptions chinoises, trouvées dans les antiques tombeaux de l'Egypte et en Babylonie: avec M. Wilkinson, il croit à la haute antiquité de ces porcelaines. C'est là une pierre d'attente que M. Cantor pose, pour bâtir plus tard son hypothèse de communications directes et très antiques de la Chine avec la Babylonie et avec l'Egypte. Mais M. Layard avait déjà remarqué que ces porcelaines ressemblent trop aux porcelaines modernes des Chinois. Elles ont été sans doute apportées en Egypte et en Babylonie par les Arabes mahométans; car, dans une note lue à l'Académie des inscriptions et belles-lettres en 1854, M. Stanislas Julien a prouvé que l'invention de la porcelaine chez les Chinois est postérieure au commencement de l'ère chrétienne 13).

IV. Les Indiens. 1)

Arrivant a l'Inde antique, M. Cantor commence par déclarer qu'il ne veut pas s'occuper des populations dravidiennes, mais seulement des Aryas, qui, arrivés dans l'Inde 1400 ans environ avant notre ère, parlaient la langue sanskrite. Sur cette langue, dont la forme la plus ancienne est la langue védique, M. Cantor donne un aperçu historique, qu'il aurait pu rendre plus exact et plus complet, s'il avait consulté la savant ouvrage de M. Max Müller 2) sur la partie réligieuse de la vieille littérature indienne.

Comme sources de l'histoire de la numération écrite des Indiens, M. Cantor indique, d'une part les inscriptions, dont les plus anciennes remontent dit-il, à deux siècles et demi avant notre ère, d'autre part les ouvrages mathématiques écrits dans la langue sanskrite, devenue langue savante et non usuelle vers le IIIe siècle de notre ère.

Suivant M. Cantor, le plus ancien des écrivains indiens sur les mathématiques serait Aryabhatta, auquel il croit pouvoir assigner pour époque, d'après un renseignement fourni par M. Wish, le commencement du VIe siècle de notre ère. Mais l'astronome indien Varaha-Mihira écrivait vers l'an 500, comme des textes de ses ouvrages le prouvent, et il est certain qu'Aryabhatta lui est antérieur. Aryabhatta n'est donc pas postérieur au Ve siècle. D'un autre côté Aryabhatta est postérieur à la rédaction du *Sourya-Siddhânta,* sur lequel il y a laissé un commentaire. Or, des raisons qu'il serait trop long de développer ici, prouvent que ce célèbre traité astronomique, dont il nous reste une rédaction un peu altérée 3), ne peut guère être antérieur au Ve siècle de notre ère. C'est donc au Ve siècle, ni avant, ni après, qu'Aryabhatta doit être placé. Mais le *Sourya-Siddhânta* existait avant lui, puisqu'il l'a commenté. Il n'est donc pas le plus ancien écrivain indien sur les mathématiques, mais seulement le plus ancien dont on sache le nom.

Ensuite M. Cantor aurait dû dire que *Sourya-Siddhânta* et les autres *Siddhântas* anonymes, qu'on disait révélés par les dieux, et les œuvres d'Aryabhatta au Ve siècle, de même que celles de Brahmagupta au VIIe siècle et de Bhascara Acharya au XIIe 4), portent les traces irrécusables d'emprunts faits à la langue grecque et à la science grecque d'Alexandrie. C'est là un fait important, qui ne peut plus être contesté, et que M. Albrecht Weber, entre autres, a mis dans tout son jour 5). Un seul des traités scientifiques in-

---

13) Voyez l'*Athenæum* français, n. du 24 juin 1854. — 1) *Die Inder*, p. 59-69 de M. Cantor. — 2) *History of ancient sanskrit literature, so far as it illustratis the primitive religion of the brahmans.* Second ed. revised. 1860, in-8, 607 pages. — 3) Le texte du *Sourya-Siddhânta,* avec un ancien commentaire sanskrit, a été publié à Calcutta par M. Fitz Edward Hall, dans les nn. 79, 105, 115 et 146 de la *Bibliotheca indica.* J'ai sous les yeux deux traductions anglaises complètes du *Sourya-Siddhânta:* l'une faite par M. Burgess et imprimée avec un ample commentaire de M. Whitney, à New-Haven dans le Connecticut, 1860, in-8. de 354 pages; l'autre faite par le pandit Bapu Deva Sastri et publiée dans la *Bibliotheca indica,* new series, n. 1, Calcutta, 1860, in-8. de 99 pages. — 4) J'ai sous les yeux la traduction anglaise du *Siddhânta Siromani* de Bhascara, faite par M. Lancelot Wilkinson et par le pandit Bapu Deva Sastri, et publiée dans la *Bibliotheca indica,* new series, nn. 13 et 28, Calcutta, 1862, in-8., p. 101-269, faisant suite au *Sourya-Siddhânta.* — 5) *Academische Vorlesungen über die indische Literaturgeschichte*, p. 220-234 (Berlin, 1852, in-8.).

diens qui nous restent est étranger à l'influence grecque: c'est le *Calendrier des Védas* 6). Mais il porte la trace certaine d'une influence babylonienne, et c'est encore là un fait important que M.Weber 7) a constaté et que nous rappellerons plus tard.

Mais revenons à M. Cantor et à la numération indienne. Dans cette numération, il y a deux choses à considérer, savoir: 1° les figures représentant les nombres; 2° la valeur de position attribuée à ces figures. Or les Indiens avaient un système de dix chiffres (y compris le zéro), qui, avec la valeur de position, leur servaient à exprimer tous les nombres, et au VIIIe siècle ils ont communiqué ce système aux Arabes orientaux. Quelle est, chez les Indiens l'origine de ces chiffres, et en sont-ils les inventeurs? Voilà une première question à résoudre. Puis une seconde question toute semblable se présente pour la valeur de position. M. Cantor a traité ces deux questions suivant cet ordre, mais en les mêlant un peu ensemble. Pour montrer qu'elles sont bien distinctes, et que la solution de l'une n'entraine pas celle de l'autre, je vais présenter ici quelques considérations préliminaires.

M. Alexandre de Humboldt 8) a remarqué que la numération indienne par neuf chiffres avec le zéro et la valeur de position n'a pas été apportée de l'Iran sur le sol de Inde par les Aryas orientaux parlant la langue sanskrite, puisqu'on n'en trouve pas de traces chez les Aryas occidentaux parlant la langue zende. En outre, M. Max Müller 9) a prouvé que jusqu'à l'époque des conquêtes d'Alexandre l'écriture n'était pas employée dans l'Inde pour les œuvres littéraires, et que les Védas, les brahmanas, de grands poèmes didactiques, des traités de grammaire, etc., étaient transmis uniquement par la mémoire des brahmanes et par leur prodigieuse éducation mnémonique, dont la description nous a été conservée. Le même savant a montré que pourtant l'écriture sur pierre, sur métal et sur papier de coton, pour certains usages de la vie civile et domestique, existait dans l'Inde avant l'époque d'Alexandre, mais que probablement elle n'y remontait pas au delà du commencement de la période littéraire des *Soutras,* qui avait succédé, vers 600 ans avant notre ère, à celle des *brahmanas,* postérieure elle-même à celle des *Mantras* ou recueils védiques, qui, comprise à peu près entre l'an 1000 et l'an 800 avant notre ère, avait été précédée de celle des *Chandas,* c'est-à-dire de la composition successive des hymnes antiques du *Véda.* Ainsi, trois siècles avant notre ère, l'usage de l'écriture était encore très restreint dans l'Inde, et six siècles avant notre ère il y était probablement inconnu. Cependant les Indiens, comme certains peuples de l'Amérique, pouvaient avoir des chiffres, avant des posséder l'usage de l'écriture.

D'ailleurs, sans employer des chiffres, les Indiens pouvaient calculer à l'aide de l'*abacus* à boules, que nous avons rencontré en Chine sous le nom de *Suan-pan,* dont l'existence à Babylone est au moins vraisemblable, et dont nous constaterons bientôt l'usage en occident 10). Or, dans cet instrument, chacune des boules enfilées représentait une unité, mais ces unités étaient de différents ordres décimaux suivant les rangées auxquelles les boules appartenaient. Il est donc possible que la notion de la valeur de position ait été plus ancienne dans l'Inde que l'emploi des chiffres et de l'écriture. Cette notion aurait donc pu être appliquée par les Indiens aux chiffres dès l'époque où ils auraient commencé d'en avoir, s'ils avaient eu tout de suite la pensée d'en fixer le nombre à 9, et d'y joindre le zéro. Mais nous verrons qu'ils paraissent avoir eu d'abord des chiffres plus nombreux, auxquels la valeur de position et le zéro étaient étranger.

Réciproquement les neuf chiffres indiens, avec des figures à peu près semblables et comme représentant les neuf premiers nombres, auraient pu appartenir d'abord chez les Indiens à un système de chiffres

---

6) J'ai sous les yeux le texte et la traduction allemande du *Calendrier des Védas*, publiés avec un ample commentaire par M. A. Weber (Extrait des Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1862, in-4., 130 pages). — 7) *Ueber den Vedakalender*, p. 14, 15, 28, 29 et 30. Comparez le même auteur, *Ueber die vedischen Naxatra,* 1 Theil (Ac. des sciences de Berlin, 1861), p. 286, 302, 307 et 308. — 8) *Ueber die bei verschieden Vœlkern üblichen Systeme von zahlzeichen und über den Vrsprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen* (dans le Journal de mathématiques de Crelle, 1826, t. 4, p. 205 et suiv.), et *Cosmos*, t. 2, II partie, ch. 5, note 19, p. 153 de la traduction française. — 9) *History of ancient sanskrit literature,* second ed., chap. 3, p. 497-524. Voyez aussi M. Westergaard, *Ueber den œltesten Zeitraum der indischen Geschichte*, p. 30-44, traduction du danois en allemand. Breslau, 1862, in-8. — 10) Voyez ci-dessus, chap. II et III, et ci-après, chap. IX et X.

plus nombreux et sans zéro ni valeur de position, et les autres chiffres du même système auraient pu disparaître, quand l'invention du zéro et de la valeur de position serait venue les rendre inutiles. Mais nous verrons que les neuf chiffres indiens auxquels la valeur de position est attachée n'appartenaient au système des chiffres employés par eux sans valeur de position.

Un système de chiffres avec valeur de position et un autre sans valeur de position peuvent coëxister chez un même peuple. Ainsi chez nous les chiffres romains sont restés pour certains usages, malgré l'emploi plus commode de ceux qu'on appele *arabes*. De même, dans l'Inde, pour exprimer les nombres, Aryabhatta employait des combinaisons des lettres dans lesquelles les voyelles jouaient le rôle de multiplicateur, sans valeur de position 11), et cependant la valeur de position était bien connue d'Aryabhatta; car il avait commenté le *Sourya-Siddhânta* 12): or, dans ce poème astronomique, la valeur de position est appliquée à des mots symboliques qui y sont toujours employés pour remplacer les neuf chiffres et le zéro 13); et ces chiffres eux-mêmes étaient en usage à l'époque de la rédaction du *Sourya-Siddhânta;* car le mot symbolique *anka*, dont le sens propre est *signe numéral,* s'y trouve mis 14) pour exprimer le nombre 9, parcequ'il a neuf signes numéraux 15).

Après ces réflexions, utiles pour diriger notre marche et pour suppléer à des omissions de M. Cantor, abordons avec lui la question de l'origine des neuf chiffres indiens et du zéro. M. Cantor remarque, après M. Rask, que les savants de Ceylan ont 20 chiffres, savoir: un pour chacun des neuf nombres au dessus de 10, un pour chacun des neuf nombres de dixaines, un pour 100 et un pour 1000, et qu'ils n'emploient ni la valeur de position ni le zéro, mais que les neuf signes des unités simples leur servent comme multiplicateur pour exprimer les nombres de centaines et de milliers 16). M. Cantor suppose que ces chiffres et ce système de numération ont été portés de l'Inde à Ceylan avec le bouddhisme, et il est tenté d'en conclure que l'invention de la valeur de position dans l'Inde doit être plus récente que l'introduction du bouddhisme à Ceylan, c'est-à-dire que le milieu du IIIe siècle avant notre ère 17). Mais, quand bien même le fait de cette importation de chiffres indiens serait vrai, cette conclusion ne serait pas légitime, puisqu'un autre système de chiffres aurait pu coëxister dans l'Inde. D'ailleurs, un fait dont M. Cantor aurait dû s'enquérir, prouve que ces chiffres de Ceylan n'ont pas été importés dans cette île par les bouddhistes indiens: ces chiffres, employés dans les livres en langue singhalaise, ne le sont jamais en pali, c'est-à-dire précisément dans la langue sacrée du bouddhisme, langue que les bouddhistes indiens ont importée dans l'île 18).

En pali, les noms de nombre sont souvent écrits tout au long, ou bien ils sont exprimés quelquefois par des mots symboliques qui remplacent les chiffres avec valeur de position. Mais surtout, comme M. Prinsep 19) le dit fort bien, dans le pali, de même que dans le sanskrit et dans les autres langues qui en dérivent, le mode prédominant et les plus ancien d'exprimer les nombres consistait, comme en grec et en latin, dans l'emploi de lettres rangées suivant un ordre alphabétique.

---

11) Voyez M. Lassen, *Indische Alterthumskunde*, t. 2, p. 1138-1141.— 12) Voyez Wilson, cité par M. Lassen, *Ind. Alt.*, p. 1137. — 13) Voyez la traduction anglaise de M. Burgess, *Introductory note*, p. III, et pour plus de détails M. Vœpcke, *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 113-115 (Paris, 1863, in-8), et M. Guérin, *Astronomie indienne*, chap. XII, p. 138-140 (Paris, 1847, in-8.). — 14) *Sourya-Siddhânta*, I, 30, 31, 37, 38, 43; II, 17, 20, 25; III, 43; XII, 85, 87 et 89.— 15) Voyez M. Wœpcke, *Mém. sur la prop. des chiffres ind.*, p. 113-115, et comparez l'explication de ce mot *anka* dans Albirouni cité par M. Wœpcke, p. 94.— 16) Voyez M. Pihan, p. 138-141. — 17) M. Cantor (p.59), à l'exemple de M. Brockaus, place cet événement au V. siècle avant notre ère. Mais M. Benfey (art. *Indien* dans l'Encyclopédie d'Ersch et Gruber) le place avec raison deux siècles plus tard. En effet, l'introduction du bouddhisme à Ceylan eut lieu l'année qui suivit celle du concile bouddhique de Patalipoutra. Or, le roi Açoka, sous lequel fut tenu ce concile, était contemporain d'Antiochus (Théos), roi de Syrie, de Ptolémée (Philadelphe), roi d'Egypte, d'Antigone (Gonatas), roi de Macédoine, de Magos, roi de Cyrène, et d'Alexandre (II), roi d'Epire. Voyez l'inscription de Kapour-di-Giri, expliquée par le savant danois M. Westergaard, *Ueber Buddha's Todesjahr*, traduction allemande (Breslau, 1862, in-8). — 18) Voyez M. Pihan, p. 141-144. — 19) *Examination of the inscriptions of Girnar in Gujerate and Dhauli in luttack (Journal of the asiatic society of Bengal*, avril 1838, p. 348). Voyez le passage traduit par M. Wœpcke, *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 44-45 (Paris, 1863, in-8).

Nous allons voir que vers le nord de l'Inde, dans le Guzarate, des chiffres sans valeur de position étaient employés jusqu'au IV[e] siècle de notre ère. Mais ce fait ne prouve pas que, pour d'autres usages, une numération par neuf chiffres, avec la valeur de position et le zéro, ne fût pas connue alors dans le Guzarate même, ni surtout qu'une telle numération fût inconnue dans l'Inde entière.

Revenons à M. Cantor. Sur des monnaies et des plaques de cuivre gravées par ordre des satrapes de Sourachtra dans le Guzarate au IV[e] siècle de notre ère, M. Prinsep avait cru découvrir un système composé de 9 chiffres et du zéro, mais avec des variantes pour chaque chiffre 20), et il avait trouvé une ressemblance entre ces figures et les lettres initiales sanskrites des noms des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, et du zéro (*Çounya*), telles que ces lettres étaient formées dans des alphabets indiens des premiers siècles de notre ère 21). M. Cantor (p. 64-65) veut que MM. Thomas et Stevenson aient confirmé, mais complété, l'œuvre de M. Prinsep, en trouvant de plus, sur ces mêmes plaques et monnaies, des chiffres pour les neuf nombres de dixaines, pour des nombres de centaines et pour le nombre 1000, et en y reconnaissant de même les initiales des noms de nombre correspondants. Il y a du vrai et du faux dans cet exposé de M. Cantor sur les découvertes de MM. Thomas et Stevenson. Il est vrai que ces deux savants ont cru pouvoir confirmer le fait général de la ressemblance de ces chiffres avec les lettres initiales des noms de nombre correspondants. Mais, comme nous le verrons tout-à-l'heure, ils ont changé la plupart des valeurs numérales assignées par M. Prinsep aux figures qu'il avait recueillies, et là où M. Prinsep avait cru trouver un système de 9 chiffres avec le zéro, MM. Thomas et Stevenson ont montré qu'il y avait un système de chiffres beaucoup plus nombreux, sans zéro et sans valeur de position 22). M. Cantor (p. 64-65) reconnaît que tel est le caractère de cette vieille notation numérale du Guzarate, et il conclut (p. 59) que ces vieux chiffres indiens devaient être identiques aux chiffres singhalais dépourvus de valeur de position, dont l'importation à Ceylan a été attribué faussement par lui aux bouddhistes indiens. Mais la comparaison que, faute de documents, M. Cantor n'avait pas pu établir entre les figures des deux systèmes des chiffres, en montre la différence complète 23).

Mieux renseigné que M. Cantor sur tous ces systèmes de chiffres, M. Wœpcke 24) arrive pourtant, si je ne me trompe, à une conclusion beaucoup plus erronée. Il veut que le neuf chiffres indiens modernes, avec valeur de position, soient nés d'une transformation des neuf premiers chiffres des satrapes de Sourachtra, et que ceux-ci étant dérivés des lettres de l'alphabet sanskrit, les figures des neuf chiffres indiens empruntés à l'Inde par les Arabes orientaux soient certainement toutes originaires de l'Inde. Mais comment s'y prend-il pour établir l'identité des neuf vieux chiffres de Sourachtra, d'une part avec les initiales prises dans les vieux alphabets sanskrits, d'autre part avec les neuf chiffres du système indien lié au zéro et à la valeur de position? Voilà ce qu'il s'agit d'examiner.

M. Wœpcke (p. 45-47) prend son point de départ dans le tableau dressé par M. Prinsep, qui avait cru trouver sur des monnaies et des plaques gravées de Sourachtra un système de neuf chiffres avec le zéro et la valeur de position. Cependant il est forcé d'avouer (p. 46, note 1) que le savant M. Edward Thomas, dans son édition des œuvres de M. Prinsep, a nié avec raison la valeur de position de ces chiffres et l'existence du zéro dans ces inscriptions de Sourachtra. Mais M. Wœpcke prétend que les conclusions de M. Prinsep sur le rapport de ses neuf chiffres avec les initiales sanskites subsistent dans toute leur force. Il me semble que c'est beaucoup trop dire. Car il suffit de jeter un coup d'œil sur les tableaux comparatifs que M. Pihan (p. 63-65) a reproduits, des chiffres de Sourachtra tant d'après M. Prinsep que

---

20) Voyez M. Pihan, *Exposé* etc., Introd., p. XVIII-XIX, note 2 de la p. XVIII. — 21) Voyez M. Prinsep, dans l'article cité (note 19), *Journal of the asiat. soc. of Bengal*, avril, 1838, p. 348-354; les OEuvres de M. Prinsep publiées par M. Edward Thomas (*Essays on indian antiquities, historic, numismatic and palæographic*, of the late James Prinsep, to wich are added his *Useful* tables, etc. London, 1858, 2 vol. in-8), t. 2, p. 72-84, et planches XL et XL *a;* et la reproduction de ces deux planches par M. Pihan, Introd., p. XIX, note 2 de la p. XVIII, et p. 63-65. — 22) Voyez M. Pihan, p. 63-65. — 23) Voyez M. Pihan, p. 65 et p. 141. — 24) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 45-67 (Paris, 1863, in-8.).

d'après MM. Thomas et Stevenson, pour voir que, par suite des rectifications apportées par ces deux savants, la plupart des neuf chiffres de M. Prinsep changent de signification. Ainsi non-seulement on voit que des chiffres pris par M. Prinsep pour 2, pour 7, pour 8 et pour 9, signifient 20, 70, 80 et 90, et qu'un chiffre pris par lui pour 3 signifie 300; mais, de plus, on voit que le chiffre pris par lui pour 1 vaut 30, que l'une des deux formes attribuées par lui au 2 est une variante du chiffre signifiant 30, que l'une de ses deux formes du 4 est un 8, que sa forme unique du 6 vaut 10, que l'une de ses deux formes du 9 vaut 60, et qu'il n'a rencontré tout-à-fait juste que pour trois chiffres signifiant 4, 5 et 10. D'un autre côté, on voit que, dans le tableau des chiffres expliqués par M. Thomas, le 1, le 2 et le 3 sont figurés par une, deux et trois barres parallèles, comme dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens et comme dans le système des barres numérales des Chinois, et il me paraît difficile de trouver un rapport marqué entre les figures des chiffres de MM. Thomas et Stevenson pour les six nombres suivants, et les initiales des noms de nombre correspondants dans tel alphabet sanskrit qu'on voudra choisir. Si donc MM. Thomas et Stevenson ont raison, les lettres sanskrites auxquelles certains vieux chiffres de Sourachtra ressembleraient suivant M. Prinsep 25), ne sont pas les initiales des nombres exprimés réellement par ces chiffres: si, par exemple, le chiffre qui vaut 6 suivant M. Prinsep, mais qui vaut 10 suivant M. Thomas, ressemble à la fois aux vieilles lettres initiales sanskrites des mots *shash* (six) et *daçan* (dix), il faut que ces ressemblances soient d'un élasticité bien complaisante.

Supposons pourtant que les vieux chiffres de Sourachtra pour les neuf premiers nombres soient des initiales sanskrites plus ou moins altérées: il resterait à prouver l'identité de ces vieux chiffres dépourvus de valeur de position avec les neuf chiffres indiens auxquels la valeur de position est attachée, et, pour établir cette identité, il faudrait pouvoir montrer entre ces deux systèmes de neuf chiffres une ressemblance qui, j'ose le dire, n'existe pas. M. Wœpcke (p. 47) n'a pas même essayé cette démonstration impossible.

Pour arriver au même but, il a pris un autre chemin (p. 47-53), dans lequel nous allons le suivre. D'après une remarque incontestable de ce savant (p. 53-67), les chiffres *gobâr* des Arabes occidentaux sont bien plus semblables aux nôtres que les chiffres indiens empruntés par les Arabes orientaux du VIIIe siècle, et surtout que les chiffres indiens d'une époque plus récente. Le même savant pense, comme nous le verrons (chap. XVII), que les chiffres *gobâr* sont les chiffres indiens sous la forme qu'ils avaient au IIe siècle de notre ère, et que ces chiffres, transmis alors de l'Inde aux Néopythagoriciens d'Alexandrie, ont passé de là aux peuples latins de l'occident et de ceux-ci aux conquérants arabes. Or M. Wœpcke (p. 49) réunit en un tableau synoptique: 1° les initiales sanskrites du IIIe siècle pour les noms des neuf premiers nombres et du zéro; 2° les formes les plus anciennes de nos chiffres d'après un manuscrit de Boèce du XIe siècle; 3° les chiffres gobâr des Arabes occidentaux; 4° les chiffres indiens des Arabes orientaux du Xe siècle. Entre la seconde ligne de ce tableau et la troisième, il y a presque identité; entre ces deux lignes et la quatrième, il y a ressemblance évidente pour les chiffres 1, 2, 3, 4, 9 et 0, mais pour ceux-là seulement; et non pour les chiffres 5, 6, 7 et 8. Entre la première ligne et les trois autres, il y a très peu de ressemblance. Il faut donc conclure que vraisemblablement ni les chiffres indiens pour les nombres 1, 2, 3, 4, 9 et pour le zéro, chiffres identiques aux chiffres *gobâr* correspondants, ni les chiffres indiens pour les nombres 5, 6, 7 et 8, chiffres très différents des chiffres gobâr, ne viennent des lettres sanskrites initiales des noms de nombre. Ainsi cette comparaison tourne contre l'hypothèse qu'elle devait confirmer. Mais il y a contre cette hypothèse quelque chose de plus décisif. Nous allons prouver que, bien loin d'être tous des lettres de l'alphabet sanskrit plus ou moins modifiées, les neuf chiffres indiens, ou du moins cinq d'entre eux, ont une origine étrangère aux populations qui parlaient la langue sanskrite.

Rappelons-nous que chez les Egyptiens, parmi les neuf premiers nombres ordinaux des jours du mois, il n'y a en a que cinq qui soient exprimés chacun par un signe unique dans l'écriture hiératique, savoir,

---

25) La plupart des ressemblances sont loin de me paraitre frappantes. Voyez le tableau comparatif, figure 23 des planches de M. Cantor.

les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, chacun des quatre autres nombres ordinaux de jours étant exprimé par la réunion de deux quatre premiers signes 26). Or nous venons de voir que les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 sont précisément ceux pour lesquels les chiffres indiens des Arabes orientaux du X[e] siècle, et même les chiffres sanskrits modernes, sont très semblables à ceux des manuscrits de Boèce et à ceux du système gobâr des Arabes occidentaux. Pour les figures hiératiques des nombres ordinaux 2 et 3 la ressemblance avec les chiffres indiens et avec les nôtres va presque jusqu'à l'identité; il en est de même pour une des deux formes hiératiques du chiffre ordinal 4; pour le nombre 9, il y aurait de même presque identité, si la queue du chiffre égyptien n'allait pas de gauche à droite, au lieu d'aller de droite à gauche; pour le chiffre 1, la ressemblance est grande 27). Dans la notation hiératique des cinq mêmes nombres pris comme cardinaux, les formes sont un peu altérées, et quelques unes des ressemblances sont moindres 28).

Or il est impossible d'attribuer au hasard cette ressemblance si grande que ces cinq chiffres ordinaux pour les jours du mois, les seuls chiffres employés dans la notation hiératique égyptienne pour les nombres de jours au dessous de 10, présentent tous avec les chiffres correspondants chez les Indiens. D'un autre côté, ces cinq figures étant arbitraires, leur invention par deux peuples différents ne pourrait s'expliquer ni par l'identité des procédés naturels de l'esprit humain, ni par la nature même de ces figures et de ces nombres. Ainsi, d'après les principes que nous avons posés dans l'*Introduction*, il faut reconnaître que ces cinq chiffres ont dû être inventés par un seul peuple, et s'être transmis de ce peuple aux autres chez lesquels on les rencontre. Or nous avons montré (chapitre I.) que ces chiffres hiératiques ordinaux des jours du mois sont très anciens en Egypte, et qu'ils se rattachent aux principes primitifs de la notation hiéroglyphique des nombres, principes déjà effacés dans la notation hiératique, pourtant bien ancienne, des nombres cardinaux. Ces cinq chiffres remontent donc en Egypte jusqu'à une époque où certainement les Aryas orientaux n'étaient pas encore arrivés sur le sol indien. Ainsi ce qui reste à savoir, c'est comment et par quelle voie les peuples Aryas de l'Inde ont reçu ces cinq chiffres égyptiens. Mais c'est là une question que nous réservons, pour la traiter plus tard dans la suite de ce travail.

Considérons maintenant la valeur de position, indépendamment des figures des neuf chiffres et du zéro. M. Wœpcke 29) dit fort bien que les Indiens, avec leur génie peu propre aux sciences d'observation, mais très porté vers les spéculations tant mathématiques que métaphysiques, s'étaient adonnés de bonne heure à l'arithmétique, avec une notion très nette et très étendue des divers ordres décimaux d'unités, comme le prouvent les grands nombres, puissances de dix, exprimés chacun par un nom dès l'époque védique, et comme le prouve mieux encore un calcul prodigieux qu'on rencontre dans le *Lalitavistara*, ouvrage bouddhique écrit au III[e] siècle avant notre ère, c'est-à-dire vers l'époque d'Archimède, et dans lequel ce calcul est cité comme anciennement connu dans l'Inde. Or, le calcul du *Lalitavistara* ressemble presque de point en point à celui de l'*Arénaire* du grand mathématicien grec, avec cette différence, que le livre indien exprime par un seul mot chacune des grandes puissances de 10 prises pour unités nouvelles, tandis qu'Archimède emploie pour le même usage les expressions de *premiers nombres, seconds nombres, troisièmes nombres*, et ainsi de suite. Je pense, avec M. Wœpcke (p. 66-129) que les Indiens, étant aussi avancés que ce calcul le prouve en matière d'arithmétique décimale, étaient heureusement prédisposés pour inventer l'art d'exprimer tous les nombres par l'écriture au moyen de dix figures quelconques, douées d'une valeur de position décimale, et dont une, prise isolément, aurait un valeur nulle. Or nous venons de constater qu'au moins dès le V[e] siècle de notre ère, époque du *Sourya-Siddhânta*, les Indiens possédaient cet art, dont nous ne trouvons de traces aussi anciennes chez aucun autre peuple. Il est donc naturel de leur attribuer cette invention, comme l'ont fait les Arabes, qui la leur ont empruntée et qui nous l'ont transmise.

M. Cantor (p. 67-69) n'est pas éloigné de partager cette opinion; mais il n'en comprend pas assez toute la probabilité, et il a le tort de diminuer l'antiquité constatée de la valeur de position des chiffres

26) Voyez ci-dessus, chapitre I. — 27) Voyez le tableau de M. Pihan, p. 41. — 28) Par exemple, les chiffres 2 et 3 sont couchées sur le côté. Voyez le tableau de M. Pihan, p. 26, colonne 2. — 29) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 68-92.

dans l'Inde. Il dit d'abord quelques mots sur la notation des nombres par les lettres de l'alphabet sanskrit sans valeur de position, telle que cette notation se trouve chez Aryabhatta et chez d'autres poètes didactiques 30); puis il explique deux notations avec valeur de position, usitées chez des écrivains de la même classe, notations dans lesquelles les neuf chiffres et le zéro sont remplacés soit par des lettres de l'alphabet 31), soit par des mots symboliques 32). Jusque là, c'est fort bien. Mais, à en croire M. Cantor, il ne serait pas prouvé que l'usage de la valeur de position remontât au delà du commencement du VIIe siècle de notre ère, et la première preuve certaine de l'existence du zéro dans l'Inde se trouverait chez Brahmagupta au VIIe siècle, de sorte qu'entre les Indiens et les Chinois la question de priorité resterait indécise. Il est malheureux que M. Cantor n'ait pas porté son attention sur les considérations par lesquelles M. Reinaud a établi que le zéro a été emprunté par les Chinois aux Indiens 33). Il est plus malheureux encore que M. Cantor semble ignorer jusqu'au nom d'un célèbre ouvrage astronomique sanskrit du Ve siècle de notre ère, dont le texte et deux traductions ont été publiées, c'est-à-dire du *Sourya-Siddhânta*, dans lequel on a signalé depuis longtemps l'emploi perpétuel d'une notation représentant par des mots symboliques le zéro et les neuf chiffres avec valeur de position, et dans lequel une locution symbolique prouve, comme nous l'avons constaté plus haut après M. Wœpcke, que les neuf chiffres eux-mêmes étaient connus de l'auteur de ce poème. Mais les neuf chiffres et le zéro, ou bien les noms de nombre qu'ils remplacent, n'auraient pas pu entrer dans le rhythme poétique commun à tous ces ouvrages didactiques en langue sanskrite, et voilà pourquoi *Sourya-Siddhânta*, Aryabhatta, Varaha-Mihira, Brahmagupta et les autres poètes didactiques indiens ont employé les divers modes de notation dont il vient d'être question.

Ainsi il est prouvé que les neuf chiffres, le zéro et la valeur de position étaient connus dans l'Inde au Ve siècle de notre ère. Il n'est pas prouvé que tout cela ne soit pas aussi ancien dans l'Inde que l'usage de l'écriture; et il n'est pas prouvé que la valeur de position appliquée à des mots symboliques pour les neuf premiers nombres et le zéro ne soit pas plus ancienne encore. Enfin, il est certain que cinq des neuf chiffres ont existé en Egypte, avant d'être employés par les Indiens. Mais la valeur de position était inconnue aux Egyptiens, et c'est probablement aux Indiens qu'en est due l'invention, avec celle de l'usage du zéro, sans lequel la valeur de position n'est que peu commodément applicable.

V. La Vie de Pythagore. 1)

Passant de l'Inde à la Grèce M. Cantor reprend pour guide M. Rœth. Nous avons dit (chap. I) combien légèrement ce guide peu sûr avait traité l'histoire d'Egypte. Quant à l'Inde, il s'était dispensé d'en parler dans ses recherches sur les origines antiques de *notre philosophie occidentale* 2), sous le prétexte qu'on ne sait rien de précis sur la philosophie indienne et qu'elle a été sans influence sur l'occident. Ainsi M. Rœth a ignoré ou dédaigné les travaux de Colebrooke, de Schlegel, de Windischmann, de Burnouf, de M. Lassen et d'autres savants sur la philosophie indienne, et il a méconnu l'influence, parfaitement démontrée par M. Lassen 3), de cette philosophie et du bouddhisme sur l'école grecque d'Alexandrie et sur quelques sectes chrétiennes des premiers siècles de notre ère. Pour la Perse et Zoroastre, M. Rœth 4) s'en est tenu aux travaux d'Anquetil Duperron et de Kleucker, sur lesquels il a bâti ses hypothèses. S'il avait daigné consulter les savantes recherches d'Eugène Burnouf et de M. Lassen, confirmées par celles de M. Spie-

---

30) Comparez M. Pihan, *Exposé des signes de numération*, p. 59-61. — 31) Comparez M. Pihan, p. 61-62, et M. Jacquet, dans le Nouveau *Journal asiatique* (Paris, août, 1835). — 32) Voyez Albirouni, passage traduit par M. Wœpcke, *Mém. sur la prop. des chiffres ind.*, p. 102-109, et le Mémoire de M. E. Jacquet sur le *Mode d'expression symbolique des nombres employé par les Indiens, les Thibétains et les Javanais* (Nouv. *Journ. asiat.*, Paris, juillet, 1835). — 33) *Acad. des inscr.*, t. XVIII, 2 partie, p. 301. — 1) *Das Leben des Pythagoras*, p. 70-82 de M. Cantor. — 2) *Geschichte unserer abendlændischen Philosophie*, I Band, *Die Ægyptische und die Zoroastrische Glaubenslehre*, Einleitung, p. 25. — 3) *Indische Alterthumskunde*, t. 3, p. 376-442. — 4) T. 1, p. 347-455, et notes 555-760, p. 255-291 à la fin du volume.

*

gel 5), il n'aurait pas fait 6) de l'antique Zoroastre un contemporain d'Hystaspe père de Darius et un maître dont Pythagore aurait suivi les leçons à Babylone.

Pour la biographie de Pythagore et des plus anciens philosophes de la Grèce, on dirait vraiment que M. Rœth aurait retrouvé des mémoires intimes de ces philosophes, tant il raconte avec assurance les détails de leur vie. Dans le chapitre que nous analysons, et dans ses *Conclusions* finales 7), M. Cantor prétend que la restitution de la vie de Pythagore par M. Rœth est un *chef-d'œuvre de critique*, et que les points principaux de cette histoire s'appuient sur des témoignages incontestables, savoir: sur ceux des péripatéticiens Aristoxène et Dicéarque, suivis toujours fidèlement par Porphyre et par Jamblique, lors même qu'ils ne les citent pas. Mais, au contraire, Porphyre et Jamblique citent fort peu Aristoxène et Dicéarque, et citent fréquemment des auteurs beaucoup plus récents. M. Chassany 8) a montré que de bonne heure la fable s'était emparée de la vie de Pythagore, mais que surtout les néoplatoniciens Porphyre et Jamblique ont traité cette vie en compilateurs de fables de toutes les époques 9). Quant à M. Rœth, il semble vraiment avoir cru que, sur la vie des anciens philosophes de la Grèce, les narrations les plus récentes et les plus circonstanciées étaient les plus dignes de foi 10), et qu'au lieu de les contrôler en les comparant avec les témoignages les plus anciens et les plus sûrs, il n'y avait qu'à imaginer des moyens de les concilier entre elles, et qu'à les ramener à une sorte de vraisemblance par la suppression de quelques traits trop incroyables. Comme le dit le savant et judicieux M. Brandis 11), dont je traduis ici les expressions, le procédé de M. Rœth a consisté à *réunir, sans triage ni critique, toutes les données fournies par les conteurs de tous les âges, de manière à en faire sortir des récits presque romanesques.*

M. Cantor, qui reproduit avec une confiance trop docile ces récits de M. Rœth, appelle lui-même 12) *romanesques* les aventures qui remplissent la première moitié de sa biographie de Pythagore, c'est-à-dire l'histoire de ses lointains voyages, arrangée par l'imagination des rhéteurs grecs, puis par celle des Néoplatoniciens et enfin par celle de M. Rœth. Ce roman ne soutient pas l'examen. Par exemple, il paraît certain que Pythagore est mort au moins octogénaire peu de temps après l'an 509 avant notre ère, date de la destruction de Sybaris 13). Il est donc faux que, jeune encore et longtemps avant de venir fonder son école en Italie, il ait été fait prisonnier à Memphis par Cambyse, dont l'expédition en Egypte est de l'an 526 av. J.-C., que de Memphis il ait été transporté à Babylone, et qu'il y ait conversé pendant douze ans, non-seulement avec les mages, mais avec Zoroastre 14), mort bien de siècles auparavant. De même, en Italie, suivant une tradition très répandue dans l'antiquité 15) malgré les protestations des chronologistes 16), Pythagore aurait eu pour disciple le roi Numa, mort un siècle avant sa naissance.

Il n'est pas invraisemblale que du temps d'Amasis, roi ami des Grecs, Pythagore ait fait un voyage en Egypte, comme le rétheur Isocrate 17) le disait déjà; mais le voyage de Babylone est bien plus suspect. Sur ce voyage, comme sur bien d'autres points de la vie de Pythagore, il y a un désaccord com-

---

5) Voyez les textes cités par Eug. Burnouf, *Comm. sur le Yaçna*, p. 424 et suiv., p. 428 et p. 442, et par M. Lassen. *Ind. Alterth.*, t. I, p. 12 et suiv., p. 40 et suiv. p. 751-754; t. 2, p. 207 et suiv. Comparez M. Spiegel, *Avesta*, traduction allemande, t. II, p. VIII, et t. 3, p. LXV. — 6) *Gesch. unserer abendl. Philos.* t. 1, *Ægypt. u. Zor. Glaub.*, p. 348-353, et t. 2, *Gesch. der Griechischen Philosophie* (jusqu'à Pythagore inclusivement), p. 341-346. — 7) P. 83-85 et p. 357-361. — 8) *Histoire du roman dans l'antiquité grecque et latine*, p. 232-234 (Paris, 1862, in-8). — 9) Pour juger de l'esprit critique de Néoplatoniciens, il faut lire dans la *Bibliothèque* de Photius, l'analyse de la biographie du philosophe Isidore, écrite par son contemporain le philosophe Damascius. — 10) Comparez M. Chassany, p. 203-213. — 11) *Geschichte der Enwickelung der griechischen Philosophie*, t. 1, p. 158 (Berlin, 1862, in-8). Comparez p. 12-14. — 12) Page 78, ligne 4. — 13) Voyez M. Brandis, à l'endroit cité, et *Handbuch der Geschicte der griechischen und der rœmischen Philosophie*, t. 1, p. 422-426 (Berlin, 1835, in-8). — 14) Voyez M. Rœth, t. 2, p. 331-346, et M. Cantor, p. 75-78. — 15) Voyez Cicéron, *Tusc.* IV, 1; Tite-Live, I, 18, et XL, 29; Denys d'Halicarnasse, *Antiq. rom.*, II, 59; Ovide, *Métam.*, XV, 1-481, et Plutarque, *Numa*, chap. 1 et 8. — 16) Cicéron, Tite-Live et Denys d'Halicarnasse combattent cette tradition; Ovide l'accepte; Plutarque est tenté de l'accepter dans le chapitre VIII de sa Vie de *Numa*, après avoir indiqué dans le chapitre I la raison chronologique qui la repousse. — 17) *Busiris*, chap. XI. Sur ce voyage et sur celui de Babylone, voyez aussi Diogène de Laërte, VIII, 3, et Jamblique, *Sur la science mathém.* (*Anecd. græc.* de Villoison, t. II, p. 211-212).

plet entre Porphyre et Jamblique, ces deux grandes autorités de MM. Rœth et Cantor. Jamblique 18), sans citer ses auteurs, raconte qu'après être allé de Milet à Sidon et s'être fait instruire par les hiérophantes des Phéniciens, Pythagore se rendit en Egypte, où, pendant 22 ans, il étudia toutes les sciences des prêtres Egyptiens, et que, pris par les soldats de Cambyse, il fut emmené captif à Babylone, où il s'instruisit dans toute la sagesse des mages. Telle est la fable que MM. Rœth et Cantor ont suivie. Au contraire, Porphyre 19) raconte d'abord les voyages de Pythagore sans le faire aller à Babylone. Il cite (p. 3-4) le récit de Cléanthe, d'après lequel, dans son traité *Des choses fabuleuses*, ce fut à Tyr que, tout jeune encore, Pythagore rencontra des Chaldéens et fut initié par eux à leurs doctrines. Plus loin (p. 9-12), Porphyre, s'appuyant sur Antiphon, raconte que de Samos Pythagore se rendit en Egypte près du roi Amasis, et qu'après avoir éte initié aux mystères des prêtres de Diospolis, il revint tranquillement en Jonie, au lieu d'être emmené captif aux bords de l'Euphrate. Ensuite, à titre d'appendice, Porphyre (p. 13-15) ajoute la narration toute différente, insérée par Antonius Diogénès dans son roman des *Merveilles incroyables qu'on voit au delà de Thalé*, et c'est là qu'il est question non-seulement du séjour de Pythagore en Egypte et de son voyage volontaire à Babylone, où, suivant ce romancier et suivant le romancier latin Apulée 20), de même que suivant MM. Rœth et Cantor, il aurait recontré Zoroastre, mais aussi de ses voyages chez les Arabes et les Hébreux. Apulée 21) ajoute même un voyage de Pythagore chez les brahmanes de l'Inde.

Dans ses *Conclusions finales* (p. 358-359), pour maintenir contre toutes les objections la vérité historique du voyage de Pythagore à Babylone, M. Cantor dit qu'une légende peut bien ajouter des circonstances fabuleuses à un voyage réel, mais, qu'une fable rattachée au séjour d'un personnage dans un lieu déterminé prouve qu'il y a séjourné réellement. En faveur de cet étrange principe de critique historique, M. Cantor allègue l'exemple de Gerbert, qui, dit-il, était allé réellement en Espagne et en Italie, mais sans y rencontrer les aventures que la crédulité lui attribuait. Cet exemple est choisi d'une manière bien malheureuse. Ainsi que nous le verrons (chapitre XXI), le voyage de Gerbert chez les Chrétiens de Catalogne est vrai, comme les voyages de Pythagore sur les côtes grecques de l'Asie mineure. Mais le voyage de Gerbert chez les Musulmans de Cordoue est purement fabuleux, comme le voyage de Pythagore à Babylone, et comme les voyages de Pythagore en Arabie, en Palestine et dans l'Inde.

La seconde partie de la vie de Pythagore, c'est-à-dire celle qui comprend son arrivée en Italie, l'établissement de son école, la fondation et la destruction violente de son institut, soulève des difficultés moins importantes pour l'histoire des sciences: nous ne nous y arrèterons pas. L'histoire de Phérécyde, de Thalès 22) et d'Anaximandre, maîtres prétendus de Pythagore, n'est guères moins fabuleuse que celle de Pythagore lui-même dans le récit arrangé par M. Rœth 23) et accepté par M. Cantor (p. 72-73). Je m'arrête à un seul point de ce récit. Nous verrons tout à l'heure (chap. VI et VII) s'il est vrai que ces philosophes grecs aient emprunté aux Egyptiens et aux orientaux des sciences toutes faites et très avancées. Le fait serait indubitable, si, comme le dit M. Cantor (p. 73), les Egyptiens avaient enseigné à Thalès à calculer les éclipses du soleil pour un lieu donné. Mais j'ai dit ailleurs 24), et je m'engage à prouver dans une dissertation spéciale: 1° par la discussion des textes historiques, qu'il n'est pas suffisamment attesté que jamais Thalès ait essayé de prédire une éclipse de soleil pour un jour et un lieu donnés; 2° par l'histoire de l'astronomie, qu'avant Hipparque le calcul d'une éclipse de soleil pour un lieu donné aurait été impossible aux Egyptiens aussi bien qu'à Thalès. Seulement Thalès avait pu dire qu'une éclipse de soleil phénomène naturel, qui n'est pas même rare, et une éclipse de soleil ayant eu lieu à Milet, il a pu en

---

18) *Vie de Pythagore*, éd. gr. lat. de Küster (Amst., 1707, in-4), ch. 3 et 4, p. 10-15. — 19) *Vie de Pythagore*, même éd. — 20) *Florides*, II, 15, t. 2, p. 56, éd. Oudendorp et Bosscha (Leyde, 1786-1823, 3 vol. in-4). — 21) P. 56-57. — 22) Thalès n'avait rien écrit. C'est à tort que M. Cantor lui prête un poème sur les solstices et les équinoxes. Voyez Diogène de Laërte, I, 23; mais comparez Themistius, *Discours* XXVI, p. 317 BC (Paris, 1864, in-fol.); Simplicius, *Sur le traité de l'âme*, f. 8 (Ald.), et M. Brandis, *Handb. der Gesch. der griech. u. der rœm. Philosophie*, t. I, p. 111-112. — 23) Ouvrage cité, t. 2, p. 90-173. — 24) *Etudes sur le Timée de Platon*, t. 2, p. 109.

expliquer la cause physique, qui est l'interposition de la lune entre la terre et le soleil. En effet, voilà tout ce qui semble résulter de témoignages dignes de quelque créance.

VI. La Géométrie de Pythagore. 1)

M. Cantor se propose de prouver dans ce chapitre, par l'examen de la doctrine géométrique de Pythagore, la réalité de son voyage en Egypte, et dans le chapitre suivant, par l'examen de la doctrine arithmétique du même philosophe, la réalité de son voyage à Babylone, où il aurait connu non-seulement Zoroastre, mais aussi la science des Chinois.

Pour établir ces deux thèses, dont la seconde surtout est étrangement hasardée, M. Cantor aurait eu besoin de prouver d'abord qu'il aurait été impossible à Pythagore d'apprendre quelque chose des connaissances scientifiques des Egyptiens et des Babyloniens, sans visiter lui-même ces deux peuples: proposition qui ne me paraît ni démontrable ni vraie. Ensuite, pour établir la première thèse, M. Cantor aurait encore eu besoin de connaître lui-même et de faire connaître à ses lecteurs la géométrie égyptienne et celle de Pythagore, afin de faire voir que la seconde est calquée sur la première. Sans entreprendre cette tâche impossible, M. Cantor a cru y suppléer par les deux raisonnements suivants (p. 85-87 et p. 88-89): 1° de Pythagore à Euclide, il y a eu une succession de géomètres grecs, pythagoriciens pour la plupart; *donc les Eléments d'Euclide doivent être une reproduction plus ou moins arrangée de la géométrie de Pythagore;* 2° D'après les Néoplatoniciens, la méthode symbolique des leçons de Pythagore était empruntée à l'Egypte. De même que les Egyptiens, Pythagore exerçait beaucoup la mémoire de ses élèves, et c'était par la géométrie qu'il commençait son enseignement. D'ailleurs, Proclus dit, non sans vraisemblance, que la nécessité de reconnaître les propriétés territoriales de chacun après la retraite des eaux du Nil a forcé les Egyptiens à inventer, avant tous les autres peuples, la géométrie pratique. En outre, Théon de Smyrne, dans son *Astronomie*, dit que les Egyptiens traitaient cette science géométriquement. Ainsi les Egyptiens étaient géomètres. *Donc la géométrie de Pythagore, conservée dans les Eléments d'Euclide doit être, au moins en grande partie, une géométrie égyptienne.*

Pour réfuter ces deux raisonnements, on pourrait se dispenser d'en discuter les prémisses; car il pourrait suffire de remarquer que les deux conclusions, ne résultant pas nécessairement de ces prémisses, restent de pures hypothèses. Mais, au moins, ces prémisses insuffisantes donnent-elles à ces deux hypothèses quelque probabilité? Non, comme nous allons le montrer.

A l'appui de ces deux hypothèses, M. Cantor cite (p. 90-93) un fait incontestable, savoir, que le *Timée* de Platon suppose une théorie des cinq polyèdres réguliers, ou du moins de quatre d'entre eux, de la décomposition des faces du cube en triangles rectangles isoscèles, et de la décomposition des faces du tétraèdre régulier, de l'octaèdre et de l'icosaèdre en des triangles rectangles scalènes, tels que, réunis deux à deux ou six à six, ils donnent un triangle équilatéral, que des deux angles aigus l'un vaille un tiers et l'autre deux tiers d'angle droit, que l'hypoténuse soit double du petit côté, et que le carré du grand côté soit triple du carré du petit. Je m'empresse d'ajouter qu'en se référant aux explications que j'ai données sur ces polyèdres 2), M. Cantor (p. 92-93) y joint une remarque intéressante. La décomposition des faces pentagonales du dodécaèdre en triangles n'a pas été essayée par Platon; mais, si elle a occupé les Pythagoriciens, elle a pu les conduire à la découverte du *pentagone en étoile*, qu'on obtient en unissant deux à deux par des droites les sommets des angles opposés du pentagone régulier. En effet, un témoignage cité par M. Rœth 3) semble indiquer que ce polygone à angles rentrants était devenu un symbole

---

1) *Die Geometrie des Pythagoras*, p. 83-94 de M. Cantor.— 2) *Etudes sur le Timée de Platon*, Notes LXVI-LXVIII, t. 2, p. 234-245. — 3) Ouvrage cité, t. 2, note 843; p. 140-141. M. Rœth a eu tort de croire que le texte obscur qu'on lit vers la fin du premier livre de la *Géométrie* de Boèce sur le pentagone étoile, vient des *Eléments* d'Euclide. Voyez ci-près chap. XII.

important dans l'école pythagoricienne. Mais ce témoignage d'un Scholiaste 4) ne prouve pas que l'emploi de ce symbole remontât aux premiers temps de l'école, ni même au temps de Platon, qui néglige la décomposition du pentagone en triangles, décomposition indiquée par Alcinoüs et par Plutarque, mais d'une manière aussi erronée qu'étrangère au pentagone en étoile 5). Quant à la théorie des quatre autres polyèdres réguliers et de la décomposition de leurs faces en triangles, il est vrai qu'elle est supposée par le *Timée* de Platon; mais cela ne prouve pas qu'elle vienne du pythagoricien Timée 6), ni surtout qu'elle vienne de Pythagore lui-même, ni que par Pythagore elle vienne des Egyptiens, ni que pour apprendre cette théorie Pythagore ait été obligé d'aller se faire recevoir prêtre égyptien dans la Thébaïde.

En faveur de sa première hypothèse, qui rabaisse Euclide au profit de Pythagore, M. Cantor (p. 89-90) cite deux problèmes importants d'Euclide dont l'invention est attribuée par Proclus à Pythagore lui-même. Mais, sans révoquer en doute cette assertion de Proclus, il suffit de remarquer que, de ces deux problèmes isolés et de quelques autres qui sont attribués à d'anciens Pythagoriciens par Proclus et par Eudème, il y a loin à l'ensemble des théories contenues dans les *Eléments* d'Euclide. Si cette première hypothèse de M. Cantor était vraie, l'histoire de la géométrie grecque, depuis Thalès et Pythagore jusqu'à Euclide, devrait se réduire à l'histoire des remaniements d'une doctrine dont le fond aurait été donné dès le début. Au lieu de cela, l'histoire nous dit que depuis Thalès et Pythagore jusqu'à Euclide les Grecs ont créé la géométrie élémentaire par des progrès successifs.

Par sa seconde hypothèse, M. Cantor (p. 85-86, 87-88, 89-90, 93-94) veut que chez les anciens Egyptiens l'arpentage ait été l'application d'une géométrie savante, qui embrassait la théorie des angles et des parallèles, la théorie de l'égalité et de la similitude des triangles, toute la théorie géométrique des proportions et la théorie des figures planes équivalentes; et que l'astronomie des Egyptiens était l'application de cette même géométrie, qui devait embrasser de plus toute la théorie de la sphère et des cinq polyèdres réguliers: il suppose que tout cela devait se trouver chez les Egyptiens, parce que tout cela se trouvait, dit-il, chez les Pythagoriciens, qui, par le chef de leur école, tenaient ces notions de l'Egypte. Il y a là évidemment une *pétition de principe*, puisqu'il s'agit précisément de prouver que Pythagore a emprunté sa géométrie aux Egyptiens. D'ailleurs, les faits viennent contredire cette hypothèse. Car M. Cantor lui-même (p. 89-90) reconnaît que, d'après des témoignages qu'il accepte, Thalès, Pythagore, le pythagoricien Œnopide et d'autres Grecs avaient trouvé eux-mêmes, et non emprunté, la formule et la démonstration de plusieurs théorèmes fondamentaux de la géométrie élémentaire. Ainsi, tout en prétendant (p. 74-75), à l'exemple de M. Rœth 7) et sur la parole d'Antiphon 8), biographe inepte d'une époque inconnue 9), qu'après de vaines tentatives près des prêtres de Memphis et d'Héliopolis, Pythagore s'était fait admettre à Thèbes (Diospolis) dans le sacerdoce égyptien, et qu'il en avait recueilli toute la science mysterieuse, M. Cantor (p. 89-90) reconnaît que, longtemps après avoir quitté l'Egypte, ce même Pythagore, par ses propres méditations, avait découvert la valeur du carré de l'hypoténuse en fonction des deux autres côtés du triangle rectangle; mais cet aveu n'empêche pas M. Cantor de soutenir que les Grecs ont emprunté aux Egyptiens toute leur méthode géométrique et un grand nombre de théorèmes. Alors je demanderai comment il pourrait se faire que, possesseurs de cette excellente méthode depuis des siècles, les Egyptiens n'eussent pas été conduits par elle à ces théorèmes élémentaires sans lesquels il n'y a pas de géométrie digne de ce nom, et qu'ils eussent laissé aux Grecs, à ces *enfants*, comme ils les appelaient 10), le soin de les inventer les uns après les autres. C'est là une question à la quelle M. Cantor aurait dû répondre, avant de formuler sa seconde hypothèse, d'après laquelle la géométrie d'Euclide viendrait des Egyptiens par l'intermédiaire de Pythagore.

---

4) Sur Aristophane, *Nuées*, v. 611. Rien ne prouve qu'un passage de Jamblique (*Vie de Pythagore*, chap. 33, p. 191-192 de Küster) ait trait au même symbole. — 5) Voyez mes *Etudes sur le Timée*, Note LXIX, t. 2, p. 245-247. — 6) Le traité *De l'âme du monde et De la nature*, attribué à Timée, est un mauvais extrait du dialogue de Platon. — 7) Ouvrage cité, t. 2, p. 312-313. — 8) Dans Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 9-12 de Küster, et dans Diogène de Laërte, VIII, 3. — 9) Voyez Meiners, *Hist. des sciences dans la Grèce*, trad. franç. III, 1, t. 1, p. 138, et note 76, p. 351-352. — 10) Voyez le *Timée* de Platon, p. 22 B.

Tout en repoussant cette hypothèse, je reconnais que, d'après des témoignages antiques, l'origine, de la géométrie grecque est en Egypte. Qu'est-ce donc que les plus anciens géomètres de la Grèce ont pu emprunter aux Egyptiens, puisque ce n'est ni la méthode scientifique, ni la démonstration des théorèmes fondamentaux ?

La réponse à cette question peut nous être suggérée par un mot attribué à Platon 11), grand admirateur pourtant des Egyptiens et des orientaux : « Tout enseignement emprunté aux barbares par les Grecs et surtout par les Athéniens fait bientôt entre leurs mains de rapides progrès.» Les Grecs avaient, en effet, à un degré éminent, quelque chose qui manquait plus ou moins aux autres peuples de l'antiquité : c'était l'esprit scientifique, l'esprit d'investigation, d'examen et de démonstration rigoureuse. Ce fut cet esprit qu'ils appliquèrent aux connaissances traditionnelles de l'Egypte et de l'Orient. L'Egypte avait fourni à Thalès, à Pythagore et à d'autres Grecs certaines notions pratiques d'arpentage: ces notions étaient fondées sur des formules empiriques, quelquefois inexactes et toujours dépourvues de démonstrations 12). L'esprit philosophique des Grecs, méditant sur ces formules pour en vérifier la légitimité et pour en chercher la raison, a trouvé la méthode géométrique, et par elle l'enchaînement des démonstrations de la science, tel qu'il se montre, par exemple, dans les *Eléments* d'Euclide. M. Arneth 13) avait exprimé cette pensée. Je l'ai développée, en l'appuyant de faits nombreux et des considérations nouvelles, dans mes *Récherches sur Héron d'Alexandrie* 14). Dans une dissertation plus récente 15), j'ai résumé cette même pensée, dans laquelle je persiste, et qui me paraît offrir la seule conciliation possible des témoignages antiques sur l'origine égyptienne de la géométrie et sur la formation successive de cette science par les Grecs.

Ajoutons que, pour connaître les procédés d'arpentage usités en Egypte, Pythagore n'a pas eu, comme MM. Rœth et Cantor le supposent, un besoin indispensable de se faire recevoir membre de la caste sacerdotale égyptienne, ni d'aller passer 22 ans dans les sanctuaires de la Haute Egypte. Il n'est pas même nécessaire qu'il ait touché le sol égyptien : assez de Grecs intelligents allaient alors en Egypte pour leurs affaires, et Amasis les y attirait; ils pouvaient se faire expliquer les procédés qu'ils voyaient employer pour le mésurage des terres, et ils pouvaient rapporter en Grèce ces explications insuffisantes, mais bien capables d'exciter le génie d'investigation scientifique d'un Pythagore ou d'un Thalès.

VII. L'Arithmétique de Pythagore. 1)

A côté d'hypothèses hasardées sur un voyage prétendu de Pythagore à Babylone et sur sa connaissance prétendue de l'arithmétique chinoise, ce chapitre de M. Cantor présente des faits importants bien exposés, ingénieusement rapprochés, dont il faut voir les détails dans l'ouvrage même, dont j'indiquerai les points principaux, en y joignant mes observations et mes réserves.

M. Cantor (p. 95-96) pose une distinction, bien connue des Grecs, entre l'arithmétique spéculative ou théorie des nombres, qu'ils nommaient ἀριθμητική, et l'arithmétique pratique, ou art des calculs usuels, qu'il nommaient λογιστική. Il est évident que cet art de calculs a appartenu plus ou moins à tous les peuples de l'antiquité, et spécialement aux peuples commerçants, par exemple aux Babyloniens, auxquels Théon de Smyrne 2) attribue en effet des méthodes arithmétiques en astronomie, et auxquels, suivant

---

11) Voyez une *Vie* anonyme *de Pythagore*, dans la *Bibliothèque* de Photius, cod. 249, p. 441 *a* (éd. Bekker).— 12) L'inscription d'Edfou, savamment expliqué par M. Lepsius (Mém. cité ci-dessus, chap. I), prouve que sous Ptolémée XI, après les progrès de la science alexandrine, les Egyptiens, pour évaluer la superficie de terrains de forme irrégulière, les divisaient autant qu'ils pouvaient en rectangles, ou bien en trapèzes ayant deux angles droits, et qu'ils estimaient, quelquefois peu exactement, l'aire des parcelles, par la demi-somme de deux lignes multipliée par la demi-somme de deux autres lignes. — 13) *Geschichte der reinen Mathematik*, p. 74-75, 78-79, 142-149, 155-156, 175-176, et 177-179 (Stuttgart, 1852, in-8). — 14) III partie, chap. 4, § 3, p. 163-176 (Paris, 1854, in-4). — 15) *Examen d'un Mémoire posthume de M. Letronne* (*Revue Archéol.* 1854), p. 137 du tirage à part. — 1) *Die Arithmetik des Pythagoras*, p. 95-110. — 2) *Astron.*, chap. XXXIII, p. 272.

Jamblique 3), Pythagore aurait emprunté la notion de la *proportion harmonique,* qui devint la base de son arithmétique musicale 4). Mais le fait de cet emprunt me paraît très douteux, et lors même qu'il serait avéré, il n'offrirait pas, comme M. Cantor (p. 96) paraît le croire, une raison suffisante d'attribuer aux Babyloniens l'invention de théories purement arithmétiques, mais équivalentes à toute cette arithmétique géométrique que, suivant lui, Pythagore aurait rapportée d'Egypte et qui remplit les livres VII, VIII et IX des *Eléments* d'Euclide.

L'art des calculs doit avoir appartenu plus encore aux Phéniciens, commerçants par excellence, auxquels Porphyre et Proclus en attribuent l'invention, et nous n'aurions pas même besoin des témoignages d'Hérodote et de Platon, pour croire que dès la plus haute antiquité un peuple aussi avancé que l'étaient les Egyptiens n'était pas étranger à cet art, comme l'indiquent d'ailleurs les dénombrements qui figurent dans des inscriptions très antiques des Pharaons.

L'arithmétique, comme art, conduit à une sorte d'algèbre pour la solution des problèmes numériques. Cet art algébrique élémentaire avait été cultivé par un certain pythagoricien nommé Thymaridas, et Diophante y a excellé dans l'école grecque d'Alexandrie 5); mais rien n'indique que les Babyloniens, les Phéniciens ou les Egyptiens l'eussent transmis aux Grecs.

Quant à l'arithmétique spéculative, qui étudie les propriétés nécessaires des nombres, indépendamment de toute application pratique, et même indépendamment de tout système particulier de numération, Pythagore avait posé les principes qui furent développés par son école. Mais M. Cantor (p. 98 et p. 100-101) n'aurait pas dû attribuer à Pythagore lui-même presque tout ce qui a appartenu aux Pythagoriciens soit avant, soit même depuis l'époque d'Aristote, et faire remonter aux Babyloniens toutes les théories mathématiques attribuées à Pythagore, par exemple la théorie des *nombres linéaires,* des *nombres plans* et des *nombres solides*, telle qu'on la trouve développée chez Théon de Smyrne, chez Nicomaque et chez Jamblique 6). Seulement une des conséquences de l'hypothèse fondamentale sur laquelle repose cette théorie, est employée par Platon dans son *Timée* 7), dialogue où quelques idées des Pythagoriciens sont mêlées à celles de l'auteur, mais qui est la source de l'opuscule faussement attribué au pythagoricien Timée, bien loin d'en être le développement 8). La notion de cette hypothèse était attribuée, à tort ou à raison par Jamblique à un certain Thymaridas 9), qui, au lieu d'être, comme M. Cantor le suppose, Thymaridas de Tarante, disciple immédiat de Pythagore 10), pourrait tout aussi bien être Thymaridas de Paros, autre pythagoricien dont l'époque est inconnue 11). Supposons pour un instant que toutes ces notions arithmétiques viennent de Pythagore lui-même: de quel droit en peut-on conclure qu'il les ait toutes empruntées aux Babyloniens?

Il est invraisemblable, dit M. Cantor (p. 100), que Pythagore, qui a tant fait pour la musique, pour l'astronomie et pour d'autres sciences, ait pu encore inventer toute une arithmétique spéculative. Je réponds que, si les premières notions très élémentaires de l'arithmétique, de la géométrie, de l'acoustique musicale formulée en nombres, de l'astronomie, de la physique, de la métaphysique et de la morale des Pythagoriciens peuvent venir de Pythagore lui-même, il est très probable que les développements ap-

---

3) *Comm. sur Nicomaque,* p. 168 (ed. Tennulius).— 4) Voyez Théon de Smyrne, *Arithm.*, chap. 65, 82, 89, 93 (*Mus.* chap. 33, 50, 57, 61), p. 133-134, 166-167, 180-181 et 186-188 de la seule édition complète (Paris, 1644, in-4); Nicomaque, *Arithm.*, II, 25 et suiv., p. 144 et suiv. (éd. Ast), et Jamblique, *sur Nicomaque,* p. 151 et suiv. M. Cantor (note 17, p. 380) exprime le regret de n'avoir eu à sa disposition et par conséquent de n'avoir pu citer ni l'*Arithmétique* de Nicomaque, ni le *Commentaire* de Jamblique. — 5) Voyez M. Cantor p. 96-97. — 6) Voyez Théon de Smyrne, *Arithm.*, chap. 18-20, 23, et 25-28. Nicomaque, *Arithm.*, II, 7-12, et Jamblique, *Comm. sur Nicomaque,* p. 82-87. Comparez ma traduction annotée des chap. 9 et 20 du II livre de Nicomaque (Rome, 1858, in-4, Extrait des *Annali di Scienze matematiche e fisiche,* t. 8, nov. 1857). — 7) Voyez M. Cantor (p. 98-100), qui renvoie à mes *Etudes sur le Timée,* t. 1, p. 91, et p. 337-345. — 8) Voyez mes *Etudes sur le Timée,* t. 2, p. 390-393.— 9) Voyez Jamblique, *Comm. sur Nicom.*, p. 36. Comparez p. 11, 88, 91 et 95. M. Nesselmann (*Algebra der Griechen,* p. 232) croit que ce Thymaridas doit être postérieur à l'ère chrétienne. — 10) Voyez Jamblique, *Vie de Pythagore,* chap. 23, p. 87 de Küster. — 11) Voyez Jamblique, *Vie de Pythagore,* chap. 23, p. 87 de Küster.

partiennent aux disciples, et non au maître, qui n'avait rien écrit, et sur les doctrines propres duquel nous savons peu de chose et avec peu de certitude. Nous savons même que, sur l'application de l'arithmétique aux sphères célestes, les disciples avaient créé une théorie toute différente de celle du maître 12). Ainsi, parmi les doctrines arithmétiques des Pythagoriciens de diverses époques, il peut y en avoir qui ne viennent pas de Pythagore, et encore moins des Babyloniens, dont l'arithmétique spéculative est pour nous lettre close, et que nous n'avons aucun motif suffisant de considérer comme les maîtres de Pythagore en quoi que ce soit.

L'arithmétique des Chinois ne nous est pas aussi inconnue que celle des Babyloniens. Or, entre les théories symboliques des Chinois sur les nombres et celles des Pythagoriciens, M. Cantor (p. 101-107) trouve des ressemblances qui ne lui paraissent pas pouvoir être fortuites. Il a puisé ces rapprochements dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla 13), sans pouvoir recourir aux textes que cet auteur a negligé d'indiquer. Il aurait fallu remonter à la source où Montucla avait puisé, c'est-à-dire aux publications du P. Amiot et d'autres missionnaires; ou bien il aurait fallu consulter les travaux d'Abel Rémusat, et le savant ouvrage de Windischmann 14), qui a mis en œuvre, avec un haute intelligence, quelquefois emportée par l'imagination, ces documents et d'autres sur les sciences chinoises. M. Cantor aurait pu d'ailleurs trouver presque toutes les indications désirables pour lui, dans un ouvrage où précisément la thèse qu'il soutient avait été développée avec plus d'étendue, c'est-à-dire dans l'ouvrage allemand de M. Gladisch sur *Les anciens Chinois et les Pythagoriciens* 15). Quelques uns des rapprochements établis par M. Gladisch sont forcés 16) et ont été justement contestés 17). Mais quelques uns sont bien réels, et leur ensemble reste frappant, d'autant plus que beaucoup d'entre eux portent sur des spéculations méthaphysiques très arbitraires, et sur un symbolisme de nombres plus arbitraire encore. Les Chinois, suivant leur habitude, font remonter à leurs plus anciens rois toutes ces spéculations sur les nombres. Mais l'existence de ces spéculations en Chine n'est démontrée que pour une époque très postérieure à celle de Pythagore.

Cependant comment se fait-il qu'elles se trouvent à la fois en Grèce et en Chine? M. Gladisch, qui prétend faire venir de la Chine non-seulement les théories des Pythagoriciens sur les nombres 18), mais aussi toute la morale et toute la discipline de Pythagore 19), veut que les Chinois, sous le nom d'*hyperboréens*, aient été en relation avec les Grecs dès la plus haute antiquité, à travers les steppes de l'Asie, celles de la Mer noire et les montagnes de la Thrace, et que l'hyperboréen Abaris, ami de Pythagore, soit un chinois venu en Grèce par ce chemin. Trop sensé pour bâtir de telles hypothèses, M. Cantor suppose (p. 101-103 et p. 50-52) qu'une même doctrine sur les nombres, apportée de Babylone en Grèce par Pythagore, était née soit à Babylone, soit en Chine, et avait été transmise de l'une de ces contrées à l'autre par des relations directes entre les Babyloniens et les Chinois. Je ne crois pas que cette hypothèse soit la seule possible, comme M. Cantor (p. 101) l'insinue pour forcer ses lecteurs à l'adopter. Car, d'abord, il est très douteux que Pythagore ait emprunté quelque chose aux Babyloniens; ensuite, entre les Grecs et les Babyloniens, la Phénicie aurait pu servir d'intermédiaire, sans que Pythagore fût allé à Babylone, et en effet c'est à Tyr qu'une tradition grecque 20) conduit Pythagore, pour l'y mettre en relation avec des savants chaldéens; enfin, les relations directes que M. Cantor suppose entre la Chine

---

12) Voyez mes *Etudes sur le Timée*, t. 2, p. 92-119, et M. Brandis, *Handb. der Gesch. der griech. unde der rœm. Philos.*, t. 2, p. 370-371. — 13) T. 1, p. 224 (Paris, an VII, in-4). — 14) *Die Philosophie im Fortgang der Weltgeschichte*, 1 partie (seule parue), 1 division: *Die Grundlagen der Philosophie im Morgenland*, livre I, p. 293-318 et p. 135-173 (Bonn, 1827-1834, in-8). — 15) *Die alten Schinesen und die Pythagorœer* (Posen, 1841, in-8, 216 pages). Voyez aussi, du méme auteur, *Die religion und die Philosophie*, p. 7-23, et p. 130-139 (Breslau, 1852, in-8, 235 pages). — 16) Par exemple, les Chinois, comme les Pythagoriciens, ont cru à une musique cosmique; mais celle des Chinois, reposant sur une série de 12 demi-tons, était très différente de celle des Pythagoriciens. — 17) Voyez M. Brandis, *Geschichte der Entwickelung der griechischen Philosophie*, p. 12-14 (Berlin, 1862, in-8). — 18) *Die alten Schinesen und die Pythagorœer*, p. 50-104. — 19) Même ouvrage, p. 108-201. — 20) Voyez Cléanthe dans Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 3-4 de Küster.

d'une part et d'autre part la Babylonie et l'Egypte, sont mal prouvées par la découverte de porcelaines chinoises en ces deux derniers pays, puisqu'étant, comme nous l'avons vu (chapitre III), d'une époque peu ancienne, ces porcelaines ont dû être apportées là par les Arabes mahométans. Quand le cycle de Méton est arrivé en Chine, c'est en passant par l'Inde. C'est de même en passant par l'Inde, qu'est arrivé en Chine le zodiaque lunaire, né, selon toute vraisemblance, à une époque très ancienne, dans l'Asie occidentale, peut-être en Babylonie, et dont le caractère lunaire a été effacé par les Chinois 21). De même, certaines théories arithmétiques ont pu passer soit de Babylonie, soit de Grèce, en Chine, par l'intermédiaire de l'Inde. Il n'est donc pas impossible que les spéculations symboliques sur les nombres aient passé dans l'Inde par l'influence que les sciences grecques obtinrent dans ce pays après l'expédition d'Alexandre, et que de l'Inde ces spéculations arithmétiques aient passé en Chine.

Outre les spéculations symboliques sur les nombres, M. Cantor a remarqué une proposition arithmétique enseignée d'une manière presque identique en Chine et dans l'école pythagoricienne: il suppose (p. 103 et 110) que Pythagore l'avait apprise à Babylone, où les Chinois avaient dû, suivant lui, en apporter la donnée première, développée ensuite par les Babyloniens. L'indication de cette proposition se trouve dans le *Tcheou-pey*. Or, cet ouvrage chinois, considéré par Biernatzki et par M. Cantor (p.103) comme œuvre du prince chinois Tcheou-Kong, qui vivait vers 1100 ans avant notre ère, se divise en deux livres égaux, et contient deux dialogues très inégaux, dont le premier, entre le prince Tcheou-Kong et un savant, renferme le passage que M. Cantor invoque. Mais il n'est nullement prouvé que l'un des deux personnages de ce dialogue en soit en même temps l'auteur. Les Chinois avouent que le premier livre de l'ouvrage existait seul autrefois: ils disent que le premier dialogue, qui forme à peu près le cinquième du premier livre, est beaucoup plus ancien que le second dialogue; mais tout ce qu'on sait sur l'antiquité du *Tcheou-pey*, c'est que le second dialogue n'est pas postérieur à la dynastie des Han, qui a fini en l'an 223 de notre ère, et que le premier dialogue est plus ancien que le second 22). Dans ce premier dialogue, on trouve une méthode d'arpentage, dans laquelle les seuls angles qu'on mesure sont des angles droits. On y lit que l'art de calculer se ramène au cercle et au quadrilatère, c'est-à-dire au rectangle, et que, dans un triangle rectangle dont la base est 3 et la hauteur 4, la ligne qui unit les extrémités de ces deux côtés est 5. Or ce triangle portait en Grèce le nom de *triangle de Pythagore* 23), et Vitruve 24) dit que, pour faire un angle droit, Pythagore avait imaginé de réunir en un triangle trois perches de 3, 4 et 5 pieds de longueur. Ce rapport, le plus simple qui puisse exister entre les côtés d'un triangle rectangle scalène, a pu être trouvé en deux contrées différentes, sans qu'il y ait eu communication entre les inventeurs. Si pourtant on veut que l'invention n'ait été faite que par l'un des deux peuples et qu'elle se soit transmise à l'autre, voici une hypothèse qui me paraît plus vraisemblable que celle de M. Cantor.

Les Grecs avait emprunté aux Egyptiens des procédés d'arpentage obtenus par tâtonnement et conservés par tradition. Cette méthode pratique, qui évitait toute misure d'angles variables et qui n'employait que des angles droits ou des angles égaux entre eux par construction, s'est conservée chez les arpenteurs grecs et romains, même après l'invention grecque de la trigonométrie, comme je l'ai montré ailleurs 25). Les Egyptiens avaient sans doute su, avant Pythagore, que pour faire un angle droit, il suffit de former le sommet d'un angle avec les extrémités de deux règles dont les longueurs soient 3 et 4, puis d'aug-

---

21) Voyez les deux Mémoires de M. Weber intitulés: *Die vedischen Nachrichten von den Naxatra* (Extraits des *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1860, p. 283-332, et 1861, p. 267-400).—22) Voyez M. Edouard Biot, *Journal asiatique* de Paris, juin 1841, p. 593 et suiv. — 23) Voyez la *Théologie arithmétique*, chap. 6 et 7, p. 38-39 et p. 42 (éd. Ast), et Proclus, *Commentaire sur le I livre des Eléments d'Euclide*, I, 47, p, 111 (éd. gr. de Bâle). Alexandre d'Aphrodisias (*Sur la Métaph. d'Aristote*, I, 8, p. 56, éd. Bonitz, Berlin, 1847, in-8) constate la vénération des Pythagoriciens pour ce triangle. Beaucoup d'autres auteurs parlent de ce triangle, mais sans l'attribuer spécialement à Pythagore ou à son école. — 24) *De architectura*, IX, Præf. sect. 6 et 7, p. 237, éd. Schneider.— 25) *Recherches sur Héron d'Alexandrie*, p. 94.

*

menter ou de diminuer l'ouverture de l'angle, jusqu'à ce qu'une troisième règle, dont la longueur soit 5, placée entre leurs extrémités, complète le triangle. La domination exercée pendant cinq siècles par les Egyptiens en Babylonie 26) a pu y introduire très anciennement cette connaissance usuelle, qui aura passé de là dans l'Inde, puis de l'Inde en Chine, avant l'époque de la rédaction du *Tchéou-pey*, époque probablement beaucoup moins ancienne que M. Cantor ne le suppose. D'un autre côté, les relations intimes de la Grèce avec l'Egypte sous Amasis ont pu facilement introduire en Grèce les procédés égyptiens d'arpentage, de sorte que, pour recueillir la notion du triangle rectangle dont les côtés sont 3, 4 et 5, Pythagore n'aurait eu besoin d'aller ni chez les Babyloniens, ni même chez les Egyptiens, à qui Plutarque 27) attribue la connaissance de ce triangle. Ajoutons que plus tard les méthodes grecques d'arpentage, avec leurs termes caractéristiques, ont été copiés par les Indiens et notamment par Brahmagupta 28).

Mais, pour Pythagore ou pour ses disciples, la notation de ce triangle rectangle scalène dont les côtés sont 3, 4 et 5 n'était pas restée stérile. Sans doute, ils avaient remarqué que le carré de 5 est égal à la somme des carrés de 3 et de 4; ils avaient cherché si cette propriété, d'avoir un côté dont le carré fût égal à la somme des carrés des deux autres, était commune à tous les triangles rectangles, et ils avaient trouvé la démonstration de cette vérité géométrique 29).

M. Cantor (p. 104-110) attribue à Pythagore, et aux Babyloniens avant lui, un procédé arithmétique qui a dû les conduire à la découverte de cette propriété des nombres 3, 4 et 5, d'avoir des carrés dont l'un est égal à la somme de deux autres, et de là à la considération des triangles rectangles en nombres rationnels. Cette explication est très ingénieuse, et il me paraît probable que cette méthode a été suivie, je ne dirai pas par les Babyloniens, ni même peut-être par Pythagore, mais par les Pythagoriciens, auxquels appartient certainement la théorie des *nombres* dits *polygonaux* et des *nombres* dits *polyèdriques*. Les Pythagoriciens donc avaient fait ces deux remarques, répétées par les Néopythagoriciens: 1° que l'addition des termes de la série des nombres impairs donne la série des nombres carrés 30); 2° que l'addition des termes de la série des nombres carrés donne la série des *nombres* dits *pyramidaux* 31). Ils avaient pu remarquer que, parmi les nombres carrés consécutifs pris deux à deux, il y en avait quelques uns, par exemple 9 et 16, qui, additionnés ensemble, donnaient le nombre carré suivant. En effet, l'école de Pythagore aimait ce qu'on peut appeler l'expérimentation arithmétique. Par exemple, c'est encore aux Pythagoriciens qu'appartient cette remarque, qne l'addition des termes de la série des nombres pairs donne les *nombres rectangulaires*, dits ἑτερομήκεις, c'est-à-dire dont chacun est le produit de deux facteurs entiers dont la différence n'est que d'une unité 32); et cette opposition des carrés et des ἑτερομήκεις était connue des Pythagoriciens dès avant Aristote, puisqu'elle figure parmi les catégories pythagoriciennes mentionnées par ce philosophe 33). De même encore, les Pythagoriciens savaient 34) que l'addition des termes de la série naturelle des nombres entiers donne la série des *nombres* dits *triangulaires*. De plus, on pouvait placer l'une sous l'autre la série des carrés en commençant par 1 et la série des impairs en commençant par 3, et, en additionnant les deux termes placés l'un sous l'autre, on devait retrouver la série des carrés, mais commençant par 4. Nicomaque 35) retrouvait cette même série de carrés à partir de 4, en posant de même l'une sous l'autre la série des *nombres triangulaires* commençant par 1 et cette même série commençant par 3, et en additionnant de même deux à deux les nombres super-

---

26) Voyez ci-dessus, chap. I. — 27) *Sur Isis et Osiris*, chap. LVI. — 28) Voyez mes *Rech. sur Héron d'Alex.*, p. 169-176. Comparez p. 139. — 29) Voyez Plutarque, *Questions de table*, VIII, 2, n. 4, p. 720, et *Qu'on ne peut vivre doucement suivant Epicure*, chap. XI, p. 1094; Diongène de Laërte, VIII, 12; Athénée, *Symp.*, X, 4, p. 418 F (Casaubon); Proclus, *Sur le livre I d'Euclide*, IV, p. 110-111 (éd. gr. de Bâle), et Porphyre, *Vie de Pythagore*, p. 39 (Küster). — 30) Voyez Nicomaque, *Arithm.*, II, 9, p. 119-120 (Ast); Théon de Smyrne, chap. XIX, p. 48 (Paris, 1640, in-4), et Jamblique, *Comm. sur Nicomaque*, p. 83 (Tennulius). — 31) Voyez Nicomaque, II, 14, p. 125-126, et Jamblique, *Comm.*, p. 134-135. — 32) Voyez Théon de Smyrne, chap. XIII, p. 39-40; Nicomaque, II, 17, p. 129-130, et Jamblique, p. 106. — 33) *Méthaphysique*, I, 5, p. 986*a*, l. 22-26 (éd. de Berlin). — 34) Voyez Théon de Smyrne, *Arithm.*, chap. XIX, p. 44; Nicomaque, II, 8, p. 118-119, et Jamblique, p. 82. — 35) II, 12, p. 122. Voyez aussi le *Commentaire* de Jamblique, p. 84.

posés. M. Cantor conclut qu'en opérant de même sur la série des carrés commençant par 1 sur la série des carrés commençant par 4, on a pu voir que la troisième des additions partielles, celle des nombres 9 et 16, donne le carré suivant, c'est-à-dire 25. Ensuite, sachant que les côtés de ces trois carrés sont ceux d'un triangle rectangle, et que tout triangle rectangle jouit de cette même propriété, les Pythagoriciens ont dû être conduits par cette méthode d'expérimentation arithmétique à la distinction des triangles rectangles en nombres rationnels et des triangles rectangles en nombres irrationnels. Les anciens n'ont pas connu la formule générale qui permet de trouver tous les triangles rectangles en nombres rationnels qu'on peut construire sur un côté donné. Mais Proclus 36) et les fragments d'Héron 37) nous ont conservé deux formules particulières, attribuées l'une à Pythagore et l'autre à Platon, et qui permettent toutes deux de trouver un triangle rectangle en nombres rationnels, savoir: l'une lorsque le côté donné est exprimé par un nombre pair, et l'autre lorsqu'il est exprimé par un nombre impair.

Ces vues de M. Cantor expliquent bien l'enchaînement des progrès de certaines théories arithmétiques et géométriques dans l'école pythagoricienne: en les résumant, je les ai appuyées par des autorités antiques dont M. Cantor n'avait cité qu'une très petite partie.

VIII. Les signes numéraux des Grecs. 1)

Au commencement de ce chapitre, M. Cantor rappelle ce qu'il croit avoir démontré, c'est-à-dire que Pythagore était allé s'initier aux sciences de l'Egypte et de la Babylonie, et que par conséquent il avait dû y connaître la numération et les signes numéraux des Egyptiens et des Babyloniens, et qu'il avait dû y trouver aussi la *tablette à calculer*, usitée partout en orient. Il sera question plus loin (chapitres IX et X) de la tablette à calculer, perfectionnée par les Pythagoriciens, et nous aurons aussi l'occasion de revenir (chapitre XVII) sur la ressemblance de certains chiffres égyptiens avec les chiffres pythagoriques de Boèce et avec les nôtres. Mais nous devons dire ici que les signes numéraux cunéiformes de la Babylonie ne paraissent avoir eu aucune influence sur la numération écrite des Grecs en général et des pythagoriciens en particulier.

Abordant son sujet, M. Cantor mentionne d'antiques inscriptions grecques où les noms de nombre sont écrits en toutes lettres, en commençant par les unités simples.

Puis il défend contre M. Nesselmann le témoignage de Jamblique 2), qui dit que primitivement les Grecs désignaient les nombres par autant de traits qu'il y avait d'unités: nous avons vu que telle était la notation hiéroglyphique des Egyptiens pour les nombres au dessous de 10. Ajoutons qu'il en était de même dans un système dont M. Cantor n'a pas fait mention, dans l'un des deux systêmes de notation numérale des Phéniciens, de ce peuple auquel les Grecs devaient leur alphabet et leur principal système de notation numérale. On trouve un exemple de ce mode rare de notation grecque dans une inscription de Tralles en Carie, datée du 7[e] mois de l'an 7 d'Artaxerce II, et qui doit être par conséquent de l'an 351 avant notre ère. Le mot *septième* y est exprimé par sept traits verticaux: ἔτεος IIIIIII. Cette vieille méthode de notation n'avait donc pas entièrement disparu, au IV[e] siècle avant notre ère, dans cette colonie des Pélasges d'Argos et des Thraces 3).

Ensuite M. Cantor expose les trois systêmes de chiffres alphabétiques usités chez les Grecs, savoir: 1° celui qui, limité aux nombres au dessous de 25, les exprimait par les 24 lettres de l'alphabet ionien prises suivant leur ordre; 2° celui qui exprimait 1 par la lettre I initiale de Ἴα pour μία, 5 par le Π de

---

36) *Comm. sur Euclide*, p. 47 (éd. gr. de Bâle). — 37) Voyez mes *Recherches sur Héron*, p. 126, et M. Biot, *Journal des savants*, mai 1849, p. 313 et suiv. — 1) *Die Zahlzeichen der Griechen*, p. 111-127 de M. Cantor. — 2) *Comm. sur Nicomaque*, p. 80 (Tennulius). Comparez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 202, note 43 (Berlin, 1842, in-8). — 3) Voyez le *Corpus inscriptionum græcarum*, t. 2, n. 2919, p. 583-584, et les notes de M. Bœch sur cette inscription. M. Cantor se fait cette objection peu sérieuse, que chaque trait vertical peut être la lettre grecque I signifiant 1. Pour la notation phénicienne, comparez M. Pihan, p. 164.

Πέντε, 10 par le Δ de δέκα, 100 par le H de Hέκατον, 1000 par le X de Χίλιοι, 10000 par le M de Μύριοι, et qui rapprochait ces lettres par addition, ou bien les combinait par multiplication; 3° celui qui, pour exprimer les neuf nombres d'unités simples, les 9 nombres de dixaines et les 9 nombres de centaines, ajoutait aux 24 lettres de l'alphabet ionien trois caractères antiques pour les nombres 6, 90 et 900, et qui mettait à gauche de chacun des neuf premiers chiffres alphabétiques un pétit trait incliné, pour les multiplier par 1000 et pour exprimer ainsi tous les nombres au dessous de 10000.

Malgré les doutes de MM. Nesselmann et Cantor, il est certain que dans les manuscrits et les éditions de l'ouvrage de Geminus de Rhodes, astronome grec du dernier siècle avant notre ère, le nombre 10000 et les nombres plus élevés sont exprimés par un petit trait incliné à gauche des chiffres alphabétiques ι, κ, λ, μ, etc. 4). Mais, en général, pour exprimer dans ce troisième système 10000 et les nombres plus grands, on employait le mot μυριάς avec les lettres numérales exprimant le nombre de myriades, ou bien on mettait avant, après ou sous ces lettres numérales la syllabe Μυ 5), ou simplement la majuscule initiale M, ou bien on remplaçait le M par un simple point écrit entre les myriades à gauche et les unités d'ordres inférieurs à droite.

Quant à l'usage, attribué aux Grecs par Camerarius, d'employer deux points au lieu d'un pour distinguer les myriades de myriades, et d'employer des points plus nombreux pour exprimer des ordres de myriades plus élevés encore, M. Cantor conteste avec raison l'antiquité de cet usage, emprunté à une des méthodes de notation numérale des Arabes 6).

Ensuite M. Cantor (p. 121-126) aborde la question de l'existence du zéro chez les Grecs: il la nie d'une manière absolue; mais, en expliquant cette négation, il accepte les faits qui la restreignent. En effet, les Grecs anciens n'ont pas eu du tout le vrai zéro, par son usage à la valeur de position décimale des chiffres. Seulement ils ont eu un signe qui, avec un usage différent, ressemblait au zéro par sa forme et par sa signification; car, lorsque l'astronome Ptolémée et son commentateur Théon d'Alexandrie indiquent des mesures d'arcs ou d'angles en degrés, minutes, secondes et tierces, si l'un de ces ordres de quantités manque, ils la marquent par lettre grecque ο, initiale du mot οὐδέν *(rien),* la place de la quantité absente. Il est évident que ce n'est pas le zéro des Indiens, des Arabes et le nôtre, servant à marquer la place d'un ordre décimal d'unités qui manque dans un nombre simple. Tout ce qu'on peut dire, c'est que le ο de Ptolémée aurait pu suggérer l'idée du zéro véritable. Suivant la remarque de M. Wœpcke, les deux signes, avec deux formes distinctes, quoique peu différentes, et avec l'usage propre à chacun d'eux, ont coëxisté chez les Arabes orientaux, qui avaient emprunté le premier aux Grecs et le second aux Indiens 7).

---

4) M. Nesselmann (*Algebra der Griechen*, p. 79, note 23) et M. Cantor (p. 119), n'ayant pas pu se procurer un exemplaire de l'*Astronomie* de Geminus, refusent de croire Heilbronner (*Hist. Matheseos*, p. 728), qui dit avoir trouvé, au chapitre XV de cet ouvrage, le nombre 19756 ainsi exprimé. Au lieu d'un seul exemple, Heilbronner aurait pu en citer plusieurs semblables du même auteur. Voyez deux fois le nombre 16800, trois fois le nombre 21000 et deux fois le nombre 25200, écrits d'après ce procédé par Geminus dans le chap. XIII de son *Introduction aux phénomènes,* p. 51 de l'*Uranologium* de Pétau (Paris. 1630, in-fol.), ou p. 63-64 de l'édition d'Halma (II partie de sa *Chronologie de Ptolémée*, Paris, 1819, in-4); puis deux fois le nombre 19756 et trois fois le nombre 260312 dans le chapitre XV du même ouvrage, p. 62 de l'*Uranol.* de Pétau, ou p. 77 d'Halma. Ces deux éditeurs ont suivi le manuscrit de Paris. De plus, Pétau avait fait collationner avec le manuscrit d'Oxford la plus ancienne édition de Geminus, donnée par Hildéric (Altdorf, 1590, in-8) et reproduite à Leyde en 1603. Dans ces mêmes passages et dans un petit nombre d'autres, pour exprimer d'autres nombres audessus de 10000, Geminus emploie le mot μυρίαδες en toutes lettres ou en abrégé. — 5) M. Cantor aurait pu ajouter que, dans les manuscrits du grand ouvrage astronomique de Ptolémée, une abréviation des lettres Μυ prend une forme légèrement concave en dessus, très large, presque sans hauteur, et ressemblant grossièrement à un υ minuscule au dessus d'un M majuscule dont le deux jambes seraient repliées en dessous, et que ce signe reçoit dans sa concavité supérieure les lettres numérales exprimant le nombre de myriades. Voyez ce signe abréviatif dans Heilbronner, *Hist. Matheseos*, p. 728. — 6) Voyez M. Wœpcke, *Mém. sur la propagation des chiffres indiens en occident.* (Paris, 1863, in-8), p. 63-64, note 1 de la p. 63. — 7) Voyez M. Wœpcke, *Mém. sur la propag. des chiffres ind.*, p. 132-139 et p. 154-156. Plus tard, les Arabes orientaux ont remplacé le zéro indien en forme de cercle par un simple point, parce qu'ils en étaient venus à donner à leur chiffre 5 une forme trop semblable à celle du zéro circulaire.

Cependant on a prétendu avoir trouvé chez les Grecs anciens le zéro proprement dit, lié à la valeur de position des chiffres. Niebuhr et Playfair ont cru lire les nombres 10, 100 et 14 exprimés par des chiffres semblables aux nôtres, dans un manuscrit grec palimpseste du VII[e] siècle de notre ère 8). Mais, suivant le désir exprimé par M. Cantor à M. le prince B. Boncompagni, ce manuscrit, qui contient un recueil de recettes pharmaceutiques, a été examiné de nouveau à Rome par M. le professeur Spezi, et il est maintenant certain que, de la part de Niebuhr et de Playfair, il y avait eu erreur de lecture et d'interprétation.

D'un autre côté, Ottfried Müller a trouvé dans l'acropole d'Athènes, et M. Bœckh a publié, une insription lapidaire grecque mutilée, suivie de cinq colonnes verticales 9), dont chaque ligne est de deux lettres, et la lettre à gauche et toujours une de celles qui expriment un des dix premiers nombres, tandis que la lettre à droite est toujours une de celles qui expriment les dixaines dans le troisième des systêmes énumérés ci-dessus. Suivant M. Bœckh, lorsque l'I ou trait vertical se trouve à droite parmi les dixaines, c'est comme signifiant 10; mais, lorsque ce même signe se trouve à gauche parmi les unités simples, M. Bœckh veut que ce soit comme équivalant à notre zero, et qu'il soit mis là pour la symétrie seulement, sans que l'autre chiffre ait une valeur de position. M. Cantor pense, avec beaucoup de vraisemblance, que le signe I placé à gauche ne signifie pas zéro, mais une dixaine à ajouter aux dixaines marquées à sa droite. Ainsi, dans cette inscription l'on aurait divisé en deux parties les nombres de dixaines non accompagnés d'unités simples, afin d'avoir toujours deux chiffres, pour la symétrie. Par exemple, dans cette inscription, M signifiant 40, le nombre 42 s'écrit BM, et de même N signifiant 50, le nombre 51 s'écrit AN; mais le nombre 50 s'écrit IM, et le nombre 60 s'écrit IN, afin qu'il y ait toujours deux lettres. Nous avons vu que, de même, chez les Egyptiens, certains nombres ordinaux au dessous de 10, dans la notation hiératique des jours du mois, s'exprimaient par deux chiffres dont les valeurs s'additionnaient. M. Cantor cite aussi les Hébreux, qui pendant longtemps ont exprimé par la réunion de deux lettres les nombres de centaines au dessus de 500, et qui expriment 15 par la réunion du signe de 9 et du signe de 6, parce que les lettres numérales pour 10 et pour 5 formeraient le commencement du nom sacré de Jéhovah. M. Cantor ajoute d'autres exemples plus étranges, tirés d'une vieille glose franque sur la loi salique. Enfin il rappelle l'inscription grecque de Tralles, où le nombre 7 est exprimé par 7 traits verticaux, comme dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens. Il aurait pu comparer aussi le procédé additif de la notation romaine.

En terminant ce chapitre, M. Cantor mentionne, sans les expliquer, les méthodes d'Appollonius et d'Archimède pour exprimer de très grands nombres: il y reviendra dans le chapitre X. Il dit un mot de la fausse hypothèse du célèbre Huet, qui voulait voir dans nos neuf chiffres des lettres de l'alphabet grec plus ou moins modifiées 10).

IX. L'Abacus 1).

Pour faciliter les calculs arithmétiques sans emploi de l'écriture, les Grecs, les Romains et d'autres peuples ont eu des instruments semblables entre eux par leur principe fondamental, mais différents par leurs dispositions.

L'une des variétés principales de cet instrument consiste en un cadre horizontal, sur lequel sont tendues des cordes parallèles, qui descendent vers le calculateur, et dont chacune porte neuf boules enfilées: chaque corde représente un ordre décimal d'unités; les boules réunies à un bout de la corde comptent, tandis que les boules réunies à l'autre bout ne comptent pas. M. Cantor explique avec clarté l'usage de cet

---

8) Ms. latin n. 24 du Vatican, venu du Palatinat. — 9) Voyez la figure 28 de planches de M. Cantor, qui se réfère (p. 124-125) au programme de l'université de Berlin, publié par M. Bœckh en 1841 pour le semestre d'été. — 10) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 95-98 (Berlin, 1842, in-8). — 1) *Das Rechenbrett*, p. 128-139 de M. Cantor.

instrument, d'abord pour exprimer un nombre sur chaque cadre, ensuite pour additionner sur un troisième cadre deux nombres, exprimés sur deux autres cadres. Il montre qu'avec cet instrument les opérations arithmétiques peuvent commencer indifféremment par un ordre quelconque d'unités, parce que les changements à apporter au nombre des boules au bout de chaque corde sont toujours faciles, tandis que dans les calculs écrits il faudrait surcharger les chiffres, si l'on commençait les additions, les soustractions et les multiplications par la gauche, ou bien les divisions par la droite. Il fait voir aussi comment, malgré la valeur de position des boules, suivant la corde ou elles se trouvent, on a pu employer cet instrument sans être amené à appliquer la valeur de position à des chiffres écrits. En effet, dans l'écriture, on manquait d'un signe remplissant l'office de la corde vacante, pour marquer les ordres décimaux d'unités qui manquaient dans le nombre à exprimer, et pour conserver ainsi aux chiffres leur ordre et leur valeur de position.

Cet instrument, tel que nous venons de le décrire 2), est le *tschotu* des Russes, introduit en France, depuis la campagne de Russie, dans les petites écoles de Metz, sous le nom de *boulier*. C'est aussi, sauf quelques différences, le *Suan-pan* des Chinois et des Tartares, dont chaque corde porte dans une de ses moitiés cinq boules ordinaires, et dans l'autre moitié deux boules, dont chacune vaut 5.

Maintenant remplacez le cadre par une tablette, de même horizontale, les cordes par des colonnes séparées par des rainures tracées sur la tablette, les boules enfilées par des jetons libres, et donnez aux jetons une valeur de position décimale suivant la colonne où vous les placerez: voilà un *abacus* bien connu des Grecs. L'invention de cet instrument est-elle plus ancienne ou plus récente que celle du cadre avec les boules enfilées? M. Cantor n'ose pas trancher cette question; mais il remarque avec raison que l'instrument à boules enfilées était à la fois plus commode et moins susceptible de perfectionnements.

Une tablette rectangulaire de marbre, trouvée à Salamine en 1846 par M. Rangabé, expliquée d'abord par l'auteur de la découverte, puis par M. Letronne, et enfin d'une manière plus juste et plus complète par M. Vincent 3), offre une combinaison d'un abacus avec un jeu analogue au trictrac. M. Cantor (p.132-133 et 136-137) répète, comme très vraisemblable, l'explication des dix colonnes de cette tablette, telle que M. Vincent l'a donnée, et il n'y trouve à changer qu'un point, dit-il, peu important, savoir le partage des colonnes entre les deux joueurs principaux. Chacun d'eux, placé devant un des deux grands côtés perpendiculaires à la longueur des colonnes tracées, avait pour sa part, à sa droite suivant M. Vincent, à sa gauche suivant M. Cantor, cinq colonnes divisées chacune en deux moitiés savoir: une colonne dont les jetons, suivant la moitié où on les mettait, valaient chacun une drachme ou cinq drachmes, une autre colonne où les jetons valaient chacun 10 drachmes ou 50 drachmes, une où ils valaient 100 drachmes ou 500, une où ils valaient 1000 ou 5000, et une où ils valaient un talent (6000 drachmes) ou 5 talents. En outre, quatre autres colonnes non divisées en deux motiés se trouvaient à quelque distance des dix autres, vers l'autre bout de la tablette: elles devaient servir pour le calcul des oboles, demi-oboles, tiers d'oboles et sixièmes d'oboles 4).

---

2) La comparaison que M. Cantor fait (p. 130-131) de cet instrument avec les *Kouas* des Chinois, avec les *Quippos* des Péruviens, avec les chapelets des catholiques et avec ceux des Bouddhistes, avec les *Akshamâlâ* des Brahmanes, et avec les *moulins à prière* des Kalmoucks, me paraît forcée et inutile. — 3) *Revue archéologique*, III année, p. 295-304, p. 305-308, et p. 401-405.— 4) Dans un épisode (p. 133-136), M. Cantor combat avec succès l'opinion de M. de Humboldt, qui avait cru trouver dans le nom de *chambre de l'échiquier*, donné aux cours des comptes en France et en Angleterre, une allusion à l'emploi de l'*abacus*. M. Cantor explique fort bien que ce nom venait des colonnes verticales et horizontales, formées par des lignes qui s'entrecoupaient sur chaque feuillet des registres, de manière à offrir l'aspect des cases d'un échiquier, et que, par cette disposition, avec des noms d'homme placés à gauche des colonnes horizontales pour les dettes et répétés au bas des colonnes verticales pour les créances actives des mêmes personnages, on obtenait, par un compte simple, les résultats qu'on demande maintenant à un compte en partie double. Dans ce même épisode de M. Cantor, se trouvent insérés quelques détails curieux sur l'histoire et la fin tragique des *baguettes à entailles (tallies)*, dont la cour de l'échiquier d'Angleterre se servait pour ses comptes.

Ensuite M. Cantor (p. 138-139) décrit les abacus qui nous restent de l'antiquité romaine. Sur ces tablettes métalliques, dont plusieurs exemplaires se sont conservés, on voit 8 rainures longues, et 8 rainures plus courtes qui se trouvent à quelque distance sur le prolongement des premières. Dans chaque rainure sont insérées de petites fiches métalliques glissant à volonté d'un bout de la rainure à l'autre et portant chacune un bouton. La première rainure longue, à droite, porte 5 boutons mobiles, qui désignent 5 onces, c'est-à-dire 5 douxièmes d'as. Dans la première petite rainure correspondante, il y a un seul bouton, représentant 6 onces. Les boutons qui sont au nombre de 4 dans chacune des grandes rainures suivantes, représentent des as dans la première, des dixaines d'as dans la seconde, des centaines d'as dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'aux millions d'as. Le bouton unique de chacune der rainures courtes vaut cinq boutons de la grande rainure correspondante. Il est aisé de comprendre qu'ainsi, avec ces 41 boutons, qui ne comptaient que lorsqu'ils étaient poussés vers un des bouts de la rainure, on pouvait exprimer tous les nombres d'onces au dessous de 12, et tous les nombres d'as au dessous de 10000000. Sur le côté droit de la tablette, trois rainures courtes servaient pour les fractions d'onces, savoir: la première avec un seul bouton pour la demi-once, la seconde avec un seul bouton pour le quart d'once. et la troisième avec deux boutons pour les tiers d'onces.

X. L'Abacus (suite) 1).

Nous avons vu que sur la tablette de Salamine, au lieu des boutons fixés à des fiches qui glissaient dans les rainures de l'abacus romain, on devait employer des jetons, qu'on plaçait à volonté dans les 10 colonnes séparées par les rainures. Ce procédé était connu aussi à Rome, comme le prouve ce vers où Horace 2) nous montre des écoliers portant suspendus au bras gauche l'*abacus (tabulam)* et les *boites à jetons (loculos)*. Un procédé plus simple encore consistait à tracer les colonnes avec le doigt sur un *abacus* sans rainures, mais couvert de poussière ou de sable fin, et à placer ensuite les jetons sur les colonnes ainsi tracées, ou bien à y écrire les nombres avec le doigt. C'est là sans doute ce que Perse 3) appelle les *nombres sur l'abacus (abaco numeros)* et les *lignes de séparation marquées sur la poussière (sectoque in pulvere metas)*.

Pour établir que l'*abacus* sans rainures était antique chez les Grecs, M. Cantor (p. 142) cite Jamblique, qui dans sa *Vie de Pythagore* 4), nous montre ce philosophe initiant un jeune homme à l'arithmétique et à la géométrie par des démonstrations et par des figures tracées sur l'ἄβαξ. M. Cantor aurait pu citer aussi Eustathe 5), qui dit que l'ἄβαξ est utile aux philosophes et qu'ils y tracent des figures. Pour prouver que les figures et les nombres étaient tracés sur la poussière dont l'ἄβαξ était couvert, M. Cantor (p. 141, l. 26-30) ne trouve à alléguer qu'une comparaison employée par Boèce 6), mais dans laquelle on peut voir tout au plus une allusion douteuse. Voici les textes qu'il aurait fallu citer: Jamblique, dans son *Exhortation à la philosophie* 7), dit expressément que l'ἄβαξ des Pythagoriciens était une tablette couverte de poussière, et Cicéron 8) parle de la *poussière savante* des géomètres. Il est donc possible que le nom de *table de Pythagore* ait été donné primitivement à un ἄβαξ couvert de poussière, dont Pythagore aurait inventé ou perfectionné l'usage.

Une invention si simple pouvait se faire en Grèce aussi bien qu'en Babylonie. Cependant M. Cantor veut que Pythagore l'ait apportée de Babylone. Aucun auteur ancien n'appuie cette supposition. Mais M. Cantor croit en trouver la preuve dans le mot grec ἄβαξ, qui, dit-il, a certainement une origine sé-

1) *Das Rechenbrett (Fortsetzung)*, p. 140-154 de M. Cantor. — 2) *Satires*, I, 6, v. 74. — 3) *Sat.* I, v. 132. — 4) Chap. 5, p. 17-18 de Küster. — 5) *Sur l'Odyssée*, p. 1397, l. 50 (éd. rom.). — 6) *Geom.* I, p. 1518 (OEuvres, Bâle, 1570, in-fol.) Boèce parle de petites pièces mobiles *(apices)* qui portaient les chiffres et qu'on dispersait *comme de la poussière* sur l'abacus des Pythagoriciens. pour effectuer la multiplication et la division. — 7) *Symbole* XXXIV, p. 158 (éd. Arcerius). — 8) *De nat. deor.*, II, 18.

mitique. En effet, d'après une étymologie proposée par des hommes très savants 9), les mots ἄβαξ et *abacus,* viendraient d'*abak*, mot arabe qui signifie *poussière*. Au contraire, j'espère demontrer que le mot ἄβαξ, très ancien dans la langue grecque, appartient par son étymologie à cette langue même, et non à l'arabe ou à une autre langue sémitique, et que ce mot ne signifie pas *poussière*.

Le mot ἄβαξ n'est pas isolé dans la langue grecque: il a dans cette langue des dérivés, ἀβάκιον et ἀβακίσκος, et il y dérive lui-même d'un radical, que des étymologistes grecs ont signalé et que nous indiquerons après eux. Ce mot ἄβαξ et ses dérivés ont des significations très diverses: celle de *tablette pour le calcul* en est une, mais non la principale ; elle est la seule à laquelle la notion de *poussière* puisse être rattachée. Toutes ces significations s'expliquent par une étymologie grecque, qui en marque la liaison, et à la quelle l'idée de *poussière* est tout-à-fait étrangère. Orion de Thèbes, lexicographe grec du V[e] siècle, et le *grand Étymologique,* glossaire grec rédigé par un byzantin d'après les travaux des grammairiens grecs d'Alexandrie, disent 10): "Αβαξ, κυρίως ὁ μὴ ἔχων βάσιν, c'est-à-dire: "Αβαξ, au *sens propre ce qui n'a pas de pied, de support*. Ainsi ἄβαξ vient de α privatif et du radical des mots grecs βάσις et βαίνο 11). Le lexicographe ajoute que ce mot se dit de toute *planchette* (σανίς). Nous allons voir qu'en effet tout objet nommé par les Grecs ἄβαξ était une planchette, un plateau, ou un vase *sans pied*. Ce nom convenait donc à l'*abacus* à rainures ou à jetons, tout aussi bien qu'à l'abacus couvert de poussière; l'*abacus,* à pièces mobiles nommées *apices* n'avait pas besoin d'être couvert de poussière: c'était cet *abacus* que Boèce 12) nommait *table de Pythagore,* et son nom latin *abacus* était la traduction du nom grec ἄβαξ. Les deux meubles essentiels du banquier grec étaient, suivant les expressions de l'orateur Lysias 13), la *table à trois pieds* (τραπέζα) et la *tablette sans pied* (ἀβάκιον): celle-ci servait pour les calculs, et, n' *ayant pas de support* adhérent, elle se posait sur la table du banquier à côté de l'argent. Les deux noms qu'on lui donnait, ἄβαξ ou ἀβάκιον 14), la désignaient comme une planchette *sens support.* Pour la même raison, l'on nommait en grec ἄβαξ ou ἀβάκιον une sorte de damier pour les jeux de dés 15); l'on nommait ἄβαξ un plateau sur le quel on plaçait des objets précieux 16); en termes d'architecture, on nommait en latin *abacus* un plateau carré qui se posait sur les chapiteaux des colonnes 17); on nommait en grec ἀβακίσκοι des carreaux de bois, de pierre ou de marbre pour paver l'intérieur des maisons 18); on donnait le nom d'ἄβαξ à une corbeille ronde sans support 19) et à un plat rond sans support, le quel plat se nommait aussi δισκός 20); on donnait le nom d'ἀβάκιον à un pétrin qui n'était pas porté sur des pieds 21). Ces derniers objets n'avaient aucun rapport ni de forme ni d'usage avec la ta-

---

9) Voyez Etienne Guichart, M. Vincent, M. Nesselmann et M. Friedlein (cités par M. Cantor, notes 273 et 275) et M. Cantor lui-même (p. 141). — 10) Voyez Orion de Thèbes, p. 18 *b*, l. 18 (éd. Sturz), et l'*Etymologicum Magnum*, p. 2, l. 10 (ed. Sylburg). Voyez aussi l'*Etymologicum Gudianum,* au même mot, p. 1 (éd. Sturz). — 11) Comparez Van Lennep et Scheid, *Ethymologicum linguae graecae,* t. I, p. 11-12 (Utrecht, 1790, gr. in-8); Eustathe, *Sur l'Odyssée,* p. 1494, l. 61-65 (éd. rom.), et l'*Ethymologicum magnum* aux mots ἄβαξ, βαβάκτης et βάβαξ. Le mot βάσις vient de βαίνω. Mais d'où vient le ξ dans ἄβαξ? Ce ξ s'explique par la confusion des formes dérivées de βαίνω et de βάζω. Ainsi βιβάζω vient de βαίνω, comme le sens l'indique. Il est vrai que ce verbe donne βιβάσω et βίβασις par un σ et non par un ξ; mais βάκτρον, dérivé de βαίνω, a le κ, qui justifie le ξ du mot ἄβαξ. Le mot βάκη des lexicographes grecs, et le mot laconien βάβυξ, qui tous deux signifiaient *pont* et qui ont l'un le κ et l'autre le ξ, sont de même dérivés de βαίνω. Les mots βάβαξ et βαβάκτης signifiaient *parleur,* comme dérivés de βάζω, et *sauteur,* comme dérivés de βαίνω. Il ne faut donc pas s'étonner de voir qu'outre le mot ἄβαξ pris dans le sens ordinaire, Eustathe et les lexicographes grecs aient distingué un autre mot ἄβαξ, dérivé de βάζω et synonyme de ἀβακής, *infans, enfant qui ne parle pas encore.* — 12) Voyez ci-après, chap. XII-XVI. — 13) Dans Julius Pollux, *Onomasticon,* X, 105. — 14) Outre les trois passages déjà cités de Jamblique et celui de Lysias, Voyez Polybe, V, 26, n. 13; Plutarque, *Caton le jeune,* chap. 70; le grammairien Ammonius, p. 1, et Eustathe, *sur l'Odyssée,* p. 1494, l. 65 (éd. rom.). — 15) Voyez Athénée, X, p. 435 D; Julius Pollux, *Onom.*, VII, 203, et X, 150; Macrobe, *Saturn.*, I, 5; Eustathe, *Sur l'Odyssée*, p. 1393, l. 63, et p. 1397, l. 49-50; le *Grand Etymologique,* au mot πεσσοί. p. 666, l. 16, et un grammairien dans les *Anecd. graeca* de Bekker, t. 1, p. 323. — 16) Voyez Ammonius, p. 1. — 17) Vitruve, IV, 1. — 18) Moschion, dans Athénée, V, p. 207 *c*, et Eustathe, *Sur l'Odyssée*, X, p. 1927, l. 61. — 19) Julius Pollux, *Onom.*, VI, 86, et X, 105. — 20) Julius Pollux, VI, 84 et 90; X, 105-106, et Phrynichus, dans Bekker, *Anecd. gr.*, t. I, p. 17. — 21) Voyez Hesychius, *Lex.*, au mot ἀβάκιον.

blette à calculer. Quelques uns des premiers avaient avec cette tablette certains rapports, soit d'usage, soit de forme; mais aucun n'avait pour accessoire utile la *poussière,* exprimée par le mot arabe où l'on est allé chercher si mal à propos l'étymologie du nom qui leur est commun avec l'*abacus*. Ainsi ἄβαξ avec ses dérivés ἀβάκιον, ἀβακίσκος, et en latin *abacus,* est un nom grec d'origine. La tablette à calculer désignée par un des sens de ce mot, était probablement très antique en Grèce. L'invention de l'ἀβάκιον qui servait à compter les points au jeu de dés est attribuée à Palamède par une tradition qu'Eustathe 22) a répétée. Polybe 23) compare les courtisans aux jetons, dont la valeur dépend de la position que le calculateur leur donne sur l'ἀβάκιον, et Diogène de Laërte 24) fait remonter jusqu'à Solon l'invention de cette comparaison ingénieuse. Si l'instrument n'est pas grec d'origine, le nom du moins l'est certainement : il signifie *tablette sans pied,* et rien de plus.

M. Cantor est donc mal fondé à affirmer, comme il le fait (p. 141-142), que le nom soit venu très anciennement aux Grecs des peuples sémitiques, et à en conclure que l'instrument doit avoir la même origine. Il n'est pas mieux fondé à supposer, comme il le fait aussi (p. 140-143), qu'ensuite Pythagore ait apporté d'Egypte ou de Babylonie un perfectionnement de l'abacus, savoir, l'emploi des neuf chiffres des Boèce. Mais c'est-là une question sur laquelle il faudra revenir 25).

Par une savante discussion, M. Cantor (p. 143-146) établit, contre M. Friedlein, que dans l'antiquité, sur toutes les variétés de l'abacus, les colonnes marquant la valeur de position descendaient vers le calculateur, de sorte que la valeur de position variait de gauche à droite, et de droite à gauche, comme pour nos chiffres écrits, et non de bas en haut et de haut en bas, comme pour les boules enfilées dans les cordes horizontales du *boulier* moderne. M. Cantor prouve que l'usage du calcul par jetons sur plusieurs lignes horizontales avec valeur de position croissante de bas en haut, ne s'est établi qu'après le XII[e] siècle de notre ère.

Quant à la cause de ce changement, M. Cantor ne l'a pas cherchée. Je crois pouvoir l'indiquer. Les cordes du *tschotu* des Russes ou du *suan-pan* des Chinois, et les rainures de l'ἄβαξ des Grecs et de l'*abacus* des Romains, ou bien les colonnes tracées sur ces instruments couverts de sable, allaient de haut en bas vers le calculateur, de sorte que la valeur de position variait de gauche à droite. Mais, pour qu'il en fût ainsi, il fallait que l'instrument fût posé horizontalement sur la table devant laquelle le calculateur était placé. Quand, au contraire, probablement pour la facilité de l'enseignement devant de nombreux élèves, on a voulu placer verticalement le cadre ou la tablette, en les suspendant à un mur, les lois de la pesanteur ont ordonné de rendre horizontales les cordes le long desquelles on poussait les boules enfilées, ou bien les rainures dans lesquelles on faisait glisser les fiches garnies chacune d'un bouton 26). Ensuite les lignes marquées sur un tableau pour le calcul par jetons ont été tracées horizontalement, à l'imitation de la nouvelle disposition de l'instrument à rainures, et peut-être aussi à l'imitation des portées musicales, imaginées au XII[e] siècle par Guido d'Arezzo.

Avant d'aborder la question du nombre des colonnes de l'abacus chez les différents peuples, M. Cantor (p. 146-148) essaie d'en préparer la solution par des observations sur les noms de nombre.

Tous les peuples dont il a été question dans cet ouvrage ont un mot particulier pour le nombre 1000. M. Cantor ajoute que, pour signifier vaguement un nombre très grand, plusieurs de ces peuples disent *mille.*

M. Cantor remarque que les Romains, outre le mot *mille*, employaient dans ce même sens le mot *sexcenti (six cents).* Il ajoute que ce fait s'expliquerait mieux, si l'on pouvait constater chez les Romains les traces d'un système non décimal, comme on en rencontre chez les peuples germaniques, par exemple chez les Allemands, qui ont le mot *Mandel* pour 15, et le mot *Schock* pour 60; chez les Scandinaves,

---

22) *Sur l'Odyssée*, p. 1396, l. 63. Voyez aussi le *Grand Etymologique*, au mot μεσσοί — 23) V, 26, n. 13. — 24) I, 59. — 25) Voyez ci-après, chap. XVI et XVII. — 26) Cette disposition horizontale avec valeur de position est celle des rangées de boules enfilées qui servent en France à compter les points des joueurs de billard.

*

qui, outre le *petit cent (litlehundrud)* ou centaine ordinaire, ont un *grand cent (Storhundrud)* de 120; et chez les Anglosaxons, qui outre le *petit mille* ou millier ordinaire, avaient un *grand mille* de 1200.

Quant au nombre *dix mille*, les Latins, les Arabes et les peuples modernes de l'Europe l'expriment par deux mots; mais les Grecs, les Egyptiens, les Babyloniens, les Indiens et les Chinois l'expriment par un seul mot. Le mot μύριοι *(dix-mille)* était celui que les Grecs employaient pour exprimer vaguement un nombre très grand, tandis que, pour les Hébreux et les Chinois, le mot signifiant *dix-mille* désignait vaguement un nombre plus grand encore que celui qu'ils désignaient vaguement par le mot signifiant *mille*.

M. Cantor aurait pu compléter ces utiles remarques, s'il avait eu recours aux recherches de MM. Lepsius et Benlœw 27) sur l'étymologie des noms de nombre. Il y aurait vu que, chez les peuples indo-européens et chez les peuples sémitiques, lorsque le nombre 1000, le nombre 10000 et des puissances plus élevées de 10 s'expriment par un seul mot dans la langue d'un de ces peuples, chacun de ces mots, par son étymologie signifie vaguement *multitude*, et que chez quelques peuples il en est de même du mot qui signifie *cent*. Il est donc probable que des mots qui primitivement signifiaient un nombre incalculable ont pris une signification précise, à mesure que la faculté de nombres a fait des progrès 28).

M. Cantor (p. 148-154) s'occupe ensuite du groupement des nombres, tel qu'il peut être exprimé par la séparation de nos chiffres en tranches. La *myriade* (1000) étant le plus grand nombre pour lequel la langue grecque eût un mot et pour lequel l'alphabet grec offrît un signe numéral particulier, il etait naturel aux Grecs de prendre la myriade pour unité nouvelle, et de compter jusqu'à 9999 myriades, puis d'opérer de même pour les *myriades de myriades*, et ainsi de suite: tel était le procédé d'Apollonius de Perga 29), procédé qu'on représenterait dans notre numération moderne par la division en tranches de quatre chiffres au lieu de trois. Apollonius donnait aux unités de notre première tranche de quatre chiffres le nom de μονάδες *(unités)*, à celles de la seconde tranche le nom de μυριάδες ἁπλαῖ *(myriades simples)* et le signe abréviatif Μα, à celles de la troisième tranche le nom de μυριάδες διπλαῖ *(myriades doubles)* et le signe Μβ, et ainsi de suite.

Pour réfuter ceux qui confondaient l'*infini* avec l'*incalculable*, Archimède voulut montrer qu'on pouvait exprimer d'une manière précise par la langue et l'écriture grecques, et distinguer nettement les uns des autres, de grands nombres considérés faussement comme inexprimables et infinis. Pour cet usage spécial, comme M. Chasles l'a montré, et non pour simplifier l'arithmétique grecque, comme M. Libri l'a prétendu, Archimède 30) avait imaginé de prendre pour unité nouvelle, au lieu de la *myriade simple*, la *myriade de myriades*, d'aller jusqu'à une myriade de myriades de cette nouvelle unité et d'en faire unité supérieure, et ainsi de suite: « ce qui équivaudrait, dans notre notation moderne, à la division en tranches de huit chiffres. Il nommait *premiers nombres* ceux de la première tranche de huit chiffres, seconds nombres ceux de la seconde, et ainsi de suite jusqu'à une myriade de myriades de tranches de huit chiffres: l'ensemble de ces tranches formait une *première période*.

L'unité simple des *premiers nombres* de la *seconde période*, équivalait à notre unité suivie de 800 millions de zéros. Archimède ajoutait qu'on pouvait continuer ainsi jusqu'à une myriade de myriades de périodes: ce qui équivaudrait à mettre à droite de notre chiffre 1 une série de 80 trillions de zéros 31). Ainsi Archimède avait résolu le problème de trouver dans la langue grecque une expression précise et courte pour des nombres qui offraient l'imagination 32): il y avait réussi de manière à montrer qu'un nombre *réel*, quelque grand qu'il soit, est toujours exprimable et *fini*, et que l'*infini* est toujours infini-

27) Ouvrages cités ci-dessus, Introduction, notes 6 et 7. — 28) Voyez M. Lepsius, p. 138-141, et M. Benlœw, p. 62-78. — 29) Voyez Pappus, *Collect. math.*, fragment du livre II, prop, 15-27, gr. lat., dans le t. 3 des OEuvres de Wallis, p. 595-610 (Oxford, 1699, in-fol.). — 30) *Arénaire*, p. 319-332 des OEuvres, éd. Torelli (Oxford, 1792, in-fol.). — 31) M. Cantor (p. 151) dit: « 80000 «*Billionen*». Mais 80000 *billions allemands* équivalent à 80 *trillions français;* car, comme le dit M. Cantor (p. 236), le *billion allemand* équivaut à l'unité suivie de 12 zéros, c'est-à-dire à un *million de millions*, tandisque le *billion* français équivaut à l'unité suivie de 9 zéros seulement, c'est-à-dire à *mille millions*. — 32) Nous avons vu (chapitre IV) qu'à la même époque les Indiens avaient résolu le même problème d'une manière semblable, avec cette différence, qu'ils désignaient par un seul mot chacune de ces unités supérieures.

ment au delà. Il n'était pas de ces philosophes qui croient pouvoir imaginer un *tout infini réellement existant* et composé d'un *nombre infini de quantités finies* 33).

La numération d'Apollonius par myriades, puis par myriades de myriades, et ainsi de suite, avait une application pratique exposée par M. Cantor d'après Pappus, qui nous l'a conservée. Pour faire le produit de deux ou plusieurs facteurs multiples de puissances de 10, le procédé d'Apollonius consiste à mettre à part ces puissances de 10 comme facteurs, à faire la multiplication des nombres proposés, après les avoir dégagés de ces facteurs, et à tenir compte ensuite de ceux-ci, pour déterminer l'ordre de myriades auquel appartiendra l'unité simple du produit trouvé d'abord. Dans notre notation actuelle, ce procédé revient à supprimer les zéros à droite des facteurs avant la multiplication, et à les ajouter tous à droite du produit. Mais, avec la notation grecque sans valeur de position, c'était plus compliqué; car, pour supprimer les puissances de 10 comme facteurs dans les nombres à multiplier, et pour les rétablir ensuite dans le produit, il fallait changer toutes les lettres numérales dans chacune de ces deux opérations. Du reste, cette méthode, enseignée par Apollonius deux siècles avant notre ère, ne paraît pas s'être propagée chez les Grecs. Suivant la remarque de M. Cantor, au Ve siècle de notre ère, Eutocius 34) opère la multiplication avec les facteurs tels qu'ils se présentent, lors même qu'ils sont multiples de 10: il commence les multiplications par la gauche, en plaçant les uns sous les autres les produits partiels et en les additionnant à la fin. Mais M. Cantor aurait dû ajouter que dans ces exemples d'Eutocius, chaque facteur n'étant multiple que de 10 et non d'une haute puissance de 10, l'emploi du procédé d'Apollonius aurait été sans utilité. Il aurait dû ajouter aussi que probablement Apollonius, comme Eutocius, commençait la multiplication par la gauche.

Les Romains, pour lesquel *mille* était le plus grand nombre exprimé par un seul mots et par un seul signe numéral, avaient naturellement dans l'expression des nombres, un mode de groupement qui procédait par milliers, comme le mode grec procédait par myriades. M. Cantor aurait bien fait d'annoncer ici, sauf à y revenir (chapitre XIII), que l'abacus de Boèce, par la réunion de ses colonnes trois à trois, portait l'empreinte de ce caractère de la numération parlée des Romains. Au XIIIe siècle, par exemple dans deux opuscules de Jean de Holywood (Sacrobosco), ce même caractère s'était traduit dans notre notation moderne par la division en tranches de trois chiffres, marquées par un point audessus du premier chiffre de chaque tranche. Au milieu du XVIe siècle, ce point se mettait audessous, ou bien le chiffre était précédé d'un trait. Au XVIIe siècle, on remplaçait le trait par une virgule. Mais ce dernier usage lui-même ne s'est pas établi d'une manière invariable, à cause de la confusion trop facile entre la virgule qui sépare les tranches, et celle qui sépare le nombre entier de la fraction décimale qui peut l'accompagner.

Tous ces détails que M. Cantor donne ici sur l'arithmétique des Grecs et des Romains, auraient pu trouver une place plus naturelle dans les chapitres consacrés aux signes numéraux de ces deux peuples, c'est-à-dire les uns dans le chapitre VIII, les autres dans le chapitre XI, qui lui-même aurait dû venir immédiatement après le chapitre VIII.

Tout cela nous a bien éloignés de l'étude de l'*abacus* et du nombre de ses colonnes, d'autant plus qu'en réalité ce nombre est déterminé par des motifs tout autres que ceux que M. Cantor a cherchés. L'abacus romain a sept colonnes pour les nombres entiers suivant M. Cantor, c'est parceque, les tranches étant de trois ordres d'unité, on a voulu s'arrêter *après* la première colonne de la troisième tranche. Mais cette considération aurait dû engager à s'arrêter *avant* cette septième colonne, et à n'en mettre que six, c'est-à-dire deux tranches entières. D'après cette même considération des tranches, l'abacus grec, procédant par tranches de quatre colonnes, aurait dû avoir 8 colonnes pour les nombres entiers, ou bien en avoir 12, c'est-à-dire une tranche de plus. En réalité, il avait 10 colonnes et quelquefois 11. Que conclure de là, sinon que chaque peuple a donné à son *abacus* le nombre de colonnes qui lui a paru suffire pour les besoins du calcul?

---

33) Contre cette erreur, voyez mon *Examen d'un problème de théodicée* (Paris, 1859, in-8, 105 pages). — 34) Sur Archimède, *De la mesure du cercle*, p. 213 (éd. Torelli).

XI. Signes numéraux des Romains. 1)

M. Cantor rappelle que chez les Romains les nombres exprimés par une seule lettre sont, d'une part 1 = I, 10 = X, 100 = C, 1000 = M ou CIↃ ou ∞; d'autre part 5 = V, 50 = L, et 500 = D. Les ordres d'unités supérieurs à 1000 sont représentés par des signes numéraux plus ou moins compliqués, savoir: d'une part 10000 = CCIↃↃ, 100000 = CCCIↃↃↃ, 1000000 = C∞Ↄ; d'autre part 5000 = IↃↃ, 50000 = IↃↃↃ, et 500000 = cɪ· Ainsi l'ordre d'unités les plus élevé qui soit représenté par un signe alphabétique simple est *mille*, et le nombre le plus élevé qui soit représenté par un signe complexe est le *million*, qui est précisément l'unité de la septième et dernière colonne de l'*abacus* romain 2).

Dans la notation numérale des Romains, comme dans celle de la plupart des peuples qui n'emploient par la valeur de position, les signes de nombres plus petits, placés à la droite des signes de nombres plus grands, indiquent l'addition à faire de ces nombres. Chez les Romains, le petit nombre dont le signe est placé à la gauche de celui d'un plus grand nombre doit en être retranché, tandisque dans la notation cunéiforme il le multiplie 3). Pourtant, comme M. Cantor l'explique, cet emploi de la soustraction dans la notation des nombres se bornait chez les Romains à quelques cas déterminés. La soustraction n'avait jamais lieu davant M signifiant 1000, et quand le signe d'un petit nombre était à gauche de M, c'était comme multiplicateur. Ainsi XM = 10000, CM = 100000. Quant à l'expression MM, elle indiquait tantôt 2000 par addition, tantôt un million par multiplication, et le choix entre ces deux explications ne pouvait être indiqué que par le sens. Cette amphibologie n'existait pas dans l'autre mode de notation marqué ci-dessus pour les millions. Quelquefois on remplaçait la lettre M par une barre horizontale audessus ou par un point à droite des lettres numérales exprimant le nombre de milliers; mais nous verrons qu'au lieu de milliers c'étaient quelquefois des centaines qui y étaient ainsi exprimées.

Sur l'origine des signes numéraux des Romains, M. Cantor commence par écarter les explications discordantes et presque toutes absurdes que Priscien donne pour les sept signes I, X, C, M, V, L et D; il écarte de même l'explication ingénieuse de Ramus et d'Hostus. Au lieu d'inventer, comme ces deux derniers, des formes primitives imaginaires, il faut remonter aux formes les plus anciennes qu'on trouve réellement pour ces signes numéraux tant chez les Romains que chez les Etrusques. Or Ramus et Hostus auraient en vain cherché dans chacune de ces formes anciennes un nombre de traits rectilignes indiquant le nombre exprimé; mais ces formes anciennes offrent un rapport frappant avec les formes anciennes de certaines lettres de l'alphabet romain et de l'alphabet étrusque 4). Pourtant, parmi les lettres numérales des Romains, il y en a qui ne sont pas les initiales des noms latins des nombres qu'elles représentent, et ces nombres ne répondent pas non plus au rang que les lettres correspondantes occupent

---

1) *Die Zahlzeichen der Rœmer*, p. 155-167 de M. Cantor. — 2) Voyez le chapitre précédent. — 3) Voyez ci-dessus, chap. II. À cette occasion, M. Cantor remarque incidemment que les nombres 1 et 2 à soustraire entrent souvent dans le langage des Romains et des Grecs, comme dans le mot *duodeviginti* pour 18. Il en est de même pour la soustraction de 1 et même de 5 en sanskrit. En allemand l'expression de certains nombres procède quelquefois par division, et M. Cantor aurait pu ajouter qu'il en est de même en français, puisqu'on dit une *demi-douzaine*, un *demi-cent*, un *demi-millier*. Pour l'expression des nombres fractionnaires, en latin, en grec et en allemand, ou procédé par l'addition jointe à la division, mais diversement. En allemand on dit *second-demi, troisième-demi, sixième-demi (anderthalb, dritthalb, sechstehalb)*, pour signifier 1/2 précédé de 1, 2, 5 unités entières, et par conséquent 1 1/2, 2 1/2, 5 1/2. En latin et en grec, on sous-entend l'unité et on dit *demi en plus*, *tiers en plus*, *huitième en plus*, pour signifier 1 1/2, 1 1/3, 1 1/8. Dans langue malaise, pour exprimer un nombre qui se termine par 5, on met le mot *moitié* devant l'expression du nombre plus grand de 5 unités; ainsi l'on dit *moitié* 40, pour dire 35, c'est-à-dire 40 moins la moitié de la dernière dixaine. — 4) Suivant M. Cantor, l'alphabet romain est venu de l'alphabet grec, à une époque où celui-ci gardait encore le *Koppa*, inconnu aux Etrusques; l'alphabet étrusque, venu immédiatement de l'orient comme l'alphabet grec, possédait des lettres qui manquaient à l'alphabet romain; mais l'alphabet romain et l'alphabet étrusque s'étaient modifiés par des influences étrangères.

dans l'alphabet latin. M. Cantor conclut de cette observation qu'il faut désespérer d'expliquer la cause pour laquelle certaines lettres romaines ont été choisies pour exprimer certains nombres.

Cette conclusion négative me paraît prématurée. La figure 35 des planches de M. Cantor montre que pour chacun des nombres 1, 5 et 10, et même pour le nombre 50, le signe ordinaire des Romains dérive de leur signe plus ancien, et que celui-ci dérive du signe étrusque. Ainsi, pour expliquer les signes romains de ces nombres, ce n'est pas à l'alphabet et à la langue des Romains, mais à l'alphabet et à la langue des Etrusques, qu'il faut recourir. Or, quels étaient les rangs des lettres dans l'antique alphabet des Etrusques; et quels étaient, sous leur forme la plus ancienne, les noms étrusques pour les nombres? Si l'on pouvait donner une réponse précise et sûre à chacune de ces deux questions, peut-être trouverait-on dans l'une de ces deux réponses, ou bien en partie dans l'une et en partie dans l'autre, l'explication vainement cherchée ailleurs. Ensuite, pour les nombres 100 et 1000, les signes romains ordinaires, C et M, sont les lettres initiales de *centum* et de *mille,* comme M. Cantor l'a bien remarqué; mais les signes plus anciens pour ces mêmes nombres ne ressemblent pas aux formes anciennes de ces deux lettres. Quant aux signes pour 10000 et pour 100000, M. Cantor a bien vu que, par diverses complications, ils dérivent de la plus ancienne forme du signe romain pour 10000, lequel dérive lui-même du signe étrusque, et que les signes romains pour 500, pour 5000 et pour 50000 sont chacun la moitié du signe du nombre double. Le signe pour 500000 reste seul sans analogie.

Quant à l'emploi abréviatif du trait horizontal au dessus ou du point à droite des lettres exprimant des unités d'un ordre supérieur à celles qui suivent, Budée, Hostus 5), et après eux MM. Nesselmann et Cantor, ont raison de dire que cet usage était établi dès l'époque de Pline l'ancien. Ce savants ont également raison de dire que chez Pline les unités les plus petites de la portion de nombre exprimée par ces lettres ainsi séparées vers la gauche ne sont pas toujours des milliers, mais quelquefois des centaines: en réalité, chez Pline, ce sont *presque toujours des centaines*, et j'en dirai la cause. Les mêmes savants ajoutent que chez Pline, lorsqu'il y a trois tranches de lettres séparées par deux points, les unités les plus petites du nombre exprimé par la tranche de l'extrême gauche ne sont pas toujours des millions. C'est trop peu dire; car je ne crois pas qu'il y ait chez Pline un seul exemple où ce soient des millions, et j'expliquerai pourquoi. Mais surtout ces mêmes savants ont tort de dire que chez Pline ces expressions sont toujours amphibologiques, de sorte que le contexte seul peut en déterminer le sens. Je vais prouver qu'au contraire, lorsqu'il y a deux ou plusieurs tranches de lettres et que la tranche à droite, n'étant pas surmontée d'un trait horizontal, exprime un nombre dont les unités sont simples, il n'y a jamais amphibologie.

Le principe suivant s'accorde avec tous les textes de Pline, et explique d'une manière sûre tous les cas où à gauche il y a des lettres numérales surmontées d'un trait horizontal ou suivies d'un point, et où à droite il y a d'autres lettres numérales employées avec leur valeur simple:

Si, de deux tranches contiguës de lettres numérales romaines, la tranche à droite a des centaines, l'unité de la tranche à gauche vaut mille fois l'unité de la tranche à droite; mais, si la tranche à droite n'a que des dixaines ou des unités simples, l'unité de la tranche à gauche ne vaut jamais que cent fois l'unité de la tranche à droite.

Ce principe s'applique, soit qu'il n'y ait que deux tranches, soit qu'il y ait trois tranches séparées par des points. Si donc il y a trois tranches et que la tranche à droite n'ait pas de centaines, l'unité de la tranche du milieu est la centaine, et si la tranche du milieu a des centaines de centaines, l'unité de la tranche de gauche est la centaine de mille. Pour que cette unité fût le million, il faudrait que la tranche du milieu et la tranche de droite eussent toutes deux des centaines; mais ce cas est sans exemple dans Pline. Appliquons notre principe aux exemples qu'il fournit.

---

5) M. Cantor recommande, comme peu connu et digne de l'être davantage, l'ouvrage de Matthæus Hostus, helléniste et numismate allemand du XVI[e] siècle, *De numeratione emendata veteribus Latinis et Græcis usitata*, Matthaeo Hosto auctore (Anvers, 1582, in-8, 62 pages).

Commençons par les cas les plus fréquents, ceux où il n'y a que deux tranches de lettres numérales. Les exemples en sont extrêmement nombreux dans la partie géographique de l'*Histoire naturelle* de Pline, depuis les deux derniers chapitres du IIe livre jusqu'à la fin du VIe. Quand le nombre à exprimer est au dessous de 10000, Pline ne met pas de centaines dans la tranche à droite. Ainsi, étant donné par exemple, le nombre 2425, Pline 6) l'écrit $\overline{\text{XXIV}}$.XXV, et non $\overline{\text{II}}$.CCCCXXV. Alors, comme on le voit, l'unité de la tranche à gauche est la centaine et non le millier. Il peut arriver que les centaines manquent dans le nombre à exprimer; mais le millier n'en est pas moins exprimé par X, et non par I, dans la tranche à gauche, de sorte que le principe n'en est pas moins observé. Par exemple, étant donné le nombre 3040, Pline 7) l'écrit $\overline{\text{XXX}}$.XL, et non III·XL, ce que signifierait 340 seulement. L'unité itinéraire employée par Pline dans la géographie est en quelque façon le pas, du moins pour les petites distances où il tient compte de 500 pas ou d'un demi-mille. Mais, pour les distances plus grandes, l'unité réelle est le *mille* exprimé par la lettre M, ou par les lettres M.p., ou par diverses autres abréviations des mots *millia passuum*. Or, les distances dont Pline s'occupe dans la géographie sont presque toutes au dessous de 10000 milles. C'est pourquoi, dans ces cinq livres, la tranche à droite n'a que très rarement des centaines, et par conséquent l'unité de la tranche à gauche est presque toujours la centaine et non le millier.

Prenons au hasard quelques exemples entre une multitude d'autres, qui tous recevraient invariablement une explication semblable. Dans le IIe livre 8), l'expression $\overline{\text{LXXXV}}$.LXVIII M. *pass.* signifie 8568 milles, et non 85068 milles. Dans le IIIe livre 9), l'expression $\overline{\text{XXX}}$.LIX *passuum* signifie 3059 pas, et non 30059. Dans le IVe livre 10), l'expression $\overline{\text{XXIII}}$.LX *mil.* signifie 2360 milles, et non 23060. Dans le Ve livre 11), l'expression $\overline{\text{X}}$.XXXVIII M. signifie 1038 milles, et non 10038. Dans le VIe livre 12), l'expression $\overline{\text{XXXIV}}$.XL M.p. signifie 3440 milles, et non 34040.

Mais, dans les cas rares où Pline a eu à exprimer des nombres de milles itinéraires au dessus de 10000, il a mis des centaines dans la tranche à droite, et alors l'unité de la tranche à gauche a été nécessairement le millier. Ainsi, dans le VIe livre 13), l'expression $\overline{\text{XXIX}}$.CCCXC signifie 29390 et ne peut évidemment pas signifier autre chose. De même, dans ce même livre 14), l'expression $\overline{\text{XII}}$.CLM.p. signifie 12150 milles.

Pour les petites distances itinéraires, où il veut tenir compte d'un demi-mille, le plus souvent Pline se contente d'ajouter à la suite du nombre de milles un D signifiant 500 pas: ainsi, dans le IIIe livre 15), l'expression XII M D *pass.* signifie 12500 pas, c'est-à-dire 12 milles 1/2. Mais quelquefois aussi la lettre M est alors remplacée par le trait horizontal au dessus des lettres qui expriment le nombre de milliers de pas: ainsi dans le VIe livre 16), l'expression $\overline{\text{LXXXVII}}$ D *pass.* signifie 87500 pas, c'est-à-dire 87 milles 1/2.

En dehors de la géographie et des mesures itinéraires, le principe formulé ci-dessus est fidèlement observé par Pline. Ainsi, dans le XXXIIIe livre 17), l'expression *auri pondo* $\overline{\text{XVII}}$.CCCCX signifie 17410 livres pesant d'or; mais l'expression *argenti* $\overline{\text{XXII}}$.LXX signifie seulement 2270 livres d'argent, parce que dans la tranche à droite du second nombre il n'y a pas de centaines.

De même, Cicéron, dans une *lettre* à Atticus (I, 7), dit qu'il doit payer HS $\overline{\text{XX}}$.CD, et dans la lettre suivante (I, 8), en mentionnant le paiement de la même somme, il l'exprime ainsi: HS CCIƆƆ CCIƆƆ CCCC, c'est-à-dire 20400 sesterces. La tranche à gauche de la première expression, $\overline{\text{XX}}$ signifie 20000, parce que dans la tranche à droite il y a des centaines.

Deux tranches de lettres numérales, avec des centaines dans la tranche à droite, servent toujours à Pline pour exprimer des nombres compris entre 10000 et 100000. Au dessus de 100000, Pline établit trois tranches de lettres numérales. Alors, s'il y avait des centaines dans les deux tranches à droite, l'unité

---

6) Pline, IV, 2, t. 1, p. 307, éd. Sillig (Leipzig, 1851 et suiv., in-8). — 7) V, 5, t. I, p. 348. — 8) II, 108, p. 202 et 203. Voyez d'autres exemples aux mêmes pages. — 9) III, 5, t. I, p. 225. — 10) IV, 12, t. I, p. 307. Voyez d'autres exemples à la même page, et IV, 12, p. 308; IV, 16, p. 319; IV, 22, p. 328. — 11) V, 2, p. 340. Voyez d'autres exemples, V, 5, p. 348 et p. 349, et V, 9, p. 351. — 12) VI, 33, p. 474. Voyez d'autres, VI, 24, p. 441; VI, 26, p. 447; VI, 33, p. 475. — 13) VI, 17, p. 425. — 14) VI, 20, p. 429. — 15) III, 5, p. 237. — 16) IV, 12, p. 312. — 17) XXXIII, 3, t. 5, p. 84.

de la tranche à gauche serait le million. Mais, dans les rares exemples que son ouvrage présente pour ces grands nombres, la tranche à droite ayant des centaines, mais la tranche du milieu n'en ayant pas, l'unité de la tranche à gauche n'est que la centaine de mille. Par exemple, dans le XXXIII[e] livre 18), l'expression *in numerato* $\overline{\text{LXI}}$·XXXV·CCCC signifie 6135400 milliers de sesterces, *sestertiûm (millia)*, en monnaie, c'est-à-dire 613540000 sesterces, et non 61035400 milliers de sesterces; et de même l'expression *auri* $\overline{\text{XVI}}$·XX·DCCCXXXI signifie 1620831 livres d'or, et non 16020831 livres.

Ainsi dans toutes ces expressions numérales de Pline, avec trois tranches de lettres comme avec deux, il n'y a aucune amphibologie. Mais, si une tranche unique, ou bien la tranche à droite, est surmontée du trait horizontal, et si, par conséquent, il n'y a pas à droite une tranche de lettres numérales gardant leur valeur simple, alors le principe posé ci-dessus ne peut pas trouver son application, et c'est alors seulement que l'amphibologie se présente. Le grammairien Probus veut qu'alors, en général, le trait horizontal au dessus des lettres numérales indique des milliers; mais nous allons prouver que quelquefois chez Pline ce sont des centaines.

Voyons d'abord quelques exemples où ce sont bien réellement des milliers. Dans un passage de Lampridius 19), les mots CXX *equitum* signifient 120000 cavaliers Perses, et le signe $\overline{\text{X}}$ dans le même passage signifie 10000. De même, dans le XXXIII[e] livre de Pline 20), avec deux tranches, mais dont celle de droite porte le trait horizontal, l'espression VII·$\overline{\text{LXXXVIII}}$ *hominum* signifie les 788000 hommes de l'armée de Darius. De même, avec une seule tranche, dans le XXXVI[e] livre de Pline 21), les expressions $\overline{\text{LXXX}}$ *hominum* et $\overline{\text{XXXX}}$ signifient 80000 et 40000 hommes. De même, dans le livre II de Pline 22), l'expression *stadiorum* $\overline{\text{XXVI}}$ signifie 26000 stades, et l'expression $\overline{\text{CCLII}}$ *stadiorum* signifie 252000 stades, De même, dans le livre XXXIII[e] 23), l'expression *p.* $\overline{\text{IX}}$ signifie à 9000 pas; l'expression $\overline{\text{CXX}}$ *assium* signifie 120000 as, les mots *pondo* $\overline{\text{XXIV}}$ signifient 2400 livres pesant; les mots $\overline{\text{D}}$ *talentorum* signifient 500000 talents, et les mots: *laterum aureorum* $\overline{\text{XV}}$, *argentorum* $\overline{\text{XXX}}$ *et* HS $\overline{\text{CCC}}$ signifient 15000 lingots d'or, 30000 lingots d'argent et 300000 milliers de sesterces, c'est-à-dire 300 millions de sesterces 24).

Mais, d'un autre côté, dans le VI[e] livre de Pline 25), l'expression $\overline{\text{XII}}$ M· *p.* signifie 1200 milles et non 12000 milles; l'expression $\overline{\text{XV}}$M *passuum* signifie 1500 milles et non 15000 milles; l'expression $\overline{\text{XXV}}$M· *p.* signifie 2500 milles et non 25000 milles. Les exemples semblables sont nombreux dans le VI[e] livre, et c'est le sens qui empêche l'amphibologie, parceque des évaluations décuples seraient évidemment trop erronées.

Après cette rectification longue, mais utile et nécessaire, je m'empresse d'approuver une remarque très juste de M. Cantor. Cette division des lettres numérales romaines en tranches séparées par des points ou distinguées par des traits horizontaux tracés au dessus d'elles, était un acheminement vers l'attribution d'une valeur de position à chaque groupe de lettres exprimant un nombre au dessus de X.

M. Cantor a raison de signaler la même tendance dans la valeur de position des signaux par le feu, décrits dans un passage des extraits qui nous restent des *Cestes* de Julius Africanus, passage doctement expliqué par M. Vincent.

Ensuite M. Cantor dit quelques mots sur un système de notation tachygraphique, d'après lequel tout nombre peut être rendu par un seul signe compliqué. Le plus ancien auteur qu'Hostus et Heilbronner citent comme ayant fait mention de ce système est Brouchorst de Nimègue (Noviomagus), mathématicien du XVI[e] siècle, qui l'attribuait à *certains astronomes*. MM. Henisch et Piccard donnent à ce même

---

18) XXXIII, 3, t. 5, p. 84. — 19) *Vie d'Alexandre Sévère.* — 20) XXXIII, 10, t. 5, p. 114. — 21) XXXVI, 15, t. 5, p. 342. — 22) II, 108 et 109, t. 1, p. 205 et 206. — 23) XXXIII, 2, t. 5, p. 75; XXXIII, 3, p. 79, p. 82, p. 83 et p. 84. — 24) Le signe abréviatif HS, pour IIS (*duo semis*, 2 1|2 as), exprime naturellement le *sestertius*, dont le nom lui-même *(semistertius)* signifie 2 1|2 (as). Mais ici évidemment le signe HS est mis pour exprimer *sestertiûm (millia)*, c'est-à-dire *milliers de sesterces.* Si les lettres numérales devaient se traduire par l'adverbe *trecenties (centena millia)*, la somme serait encore 100 fois plus forte. — 25) VI, 24 et 26, t. 1, p. 441 et 446.

système le nom de *signes chaldéens*. M. Cantor suppose qu'il peut s'agir d'astrologues chaldéens du temps de l'empire romain. Je doute que ces signes remontent si haut.

Quant à la conjecture de Vossius, qui veut que nos neuf chiffres soient empruntés à la tachygraphie de Tiron, affranchi de Cicéron, M. Cantor se contente de renvoyer à la réfutation que Kopp a donnée de cette hypothèse insoutenable.

XII. Mathématiciens romains. 1)

Dans le chapitre précédent, M. Cantor n'a pas cité un seul mathématicien romain, et il a dû aller chercher la numération romaine chez des grammairiens et des compilateurs. Il en donne deux raisons, dont une peut suffire: c'est qu'il ne nous reste aucun ouvrage de mathématiciens romains antérieurs à la chute de l'empire d'occident.

Les Romains n'aimèrent jamais les mathématiques pures. Leurs *mathématiciens* furent des astrologues, condamnés par les lois, mais protégés par la superstition. Leurs *géomètres* furent des arpenteurs amis des procédés faciles et approximatifs, et ne tenant ni aux démonstrations ni à l'exactitude. Avant notre ère, le célèbre Varron, ami de Cicéron, s'occupa de mathématiques comme de toutes choses; mais, quoi qu'on en ait dit, son traité d'arithmétique est perdu. L'architecte Vitruve, qui écrivait quelques années avant notre ère, laisse entrevoir qu'il avait des connaissances géométriques. Sextus Julius Frontinus, inspecteur des aqueducs de Rome sous Vespasien, avait écrit aussi sur l'arpentage, et M. Cantor a peut-être raison d'approuver la conjecture de M. Chasles, d'après laquelle un fragment géométrique anonyme et inédit appartiendrait à cet auteur. Mais, si M. Cantor avait lu plus attentivement la dissertation que M. Lachmann a mise dans le tome second de son édition des *Gromatici veteres*, il n'aurait sans doute pas persisté à nier, comme il l'a fait, l'authenticité de tous les fragments de Frontinus contenus dans cette collection.

Apulée avait traduit ou paraphrasé en latin l'*Arithmétique* grecque du néopythagoricien Nicomaque de Gérase. M. Cantor accepte trop facilement une conjecture d'après laquelle Apulée aurait introduit dans cet ouvrage spéculatif de nombreux exemples de calculs. Cette conjecture me paraît bien peu vraisemblable, et elle est trop peu appuyée par une phrase de l'extravagant Guillaume Postel, qui ne connaissait probablement l'*Arithmétique* d'Apulée que comme nous la connaissons nous-mêmes, c'est-à-dire par une phrase du traité de Cassiodore *sur les mathématiques* 2): dans un abrégé anonyme de ce traité (Paris, 1540), Postel reproduit infidèlement la phrase de Cassiodore, en y ajoutant des traits de son invention, et en conseillant la lecture du livre d'Apulée, comme s'il existait encore 3).

Sur Andron de Catane, M. Cantor aurait dû effacer de son chapitre XII (p. 172-173) une erreur qu'il a refutée lui-même (Note 352, p. 399). Andron, maître de Zénodore, c'est-à-dire du premier auteur, dit-on, qui ait écrit sur les isopérimètres, n'est pas Andron de Catane, maître de Marc-Aurèle, mais Andron d'Ephèse, contemporain de Platon.

M. Cantor ne parle des *Gromatici veteres*, que pour dire que ces arpenteurs experts n'étaient pas mathématiciens. Au lieu de raconter la longue histoire du manuscrit de Wolfenbüttel (p. 173-175), pour n'en tirer ensuite aucune donnée, il aurait mieux fait de dire que le *groma*, d'où ces écrivain tiraient leur nom, était un instrument destiné à prendre des alignements à angle droit, les angles droits étant les seuls angles dont la mesure fût nécessaire aux arpenteurs romians comme aux arpenteurs grecs 4).

---

1) *Ræmische Mathematiker*, p. 168-180. — 2) Fol. 306 recto (Paris, 1588, in-4). — 3) Voyez G. J. Vossius, *De universæ matheseos natura et constitutione*, p. 39-40 (Amsterdam, 1660, in-4). — 4) Voyez M. Biot, *Note relative aux instruments et aux procédés des gromatici veteres (Journal des savants*, avril 1849), et mon *Mémoire sur Héron*, IIe partie, ch. 2, p. 94-95, et ch. 4, § 3, p. 174, et Ve partie, p. 283-284 *(Acad. des inscr., Mém. de divers savants*, 1 série, t. 4, Paris, 1854, in-4).

M. Cantor indique ensuite le contenu de l'ouvrage mythologique didactique de Martianus Capella sur les sept arts libéraux, en neuf livres, dont les sept derniers embrassent le *trivium* et le *quadrivium*, c'est-à-dire d'une part la grammaire, la dialectique et la rhétorique, d'autre part la géométrie, l'arithmétique, l'astronomie et la musique. M. Cantor remarque que l'emploi de termes grecs de géométrie, inconnus aux *Gromatici* et rares chez Boèce, est fréquent dans la partie vraiement géométrique du VIe livre, dans lequel, après des énumérations géographiques, on trouve 5) des définitions géométriques empruntées surtout à Euclide. Quant à l'arithmétique théorique de Martianus Capella (livre VII), elle est tirée surtout du néopythagoricien Nicomaque 6).

Après avoir mentionné Cassiodore à cause de quelques données historiques contenues dans la partie mathématique de son petit manuel des sept arts libéraux, M. Cantor donne une notice détaillée sur la vie de Boèce, auteur dont la *Géométrie* renferme deux passages d'une importance capitale pour l'histoire de la notation numérale 7). Avec M. Hand, il incline à nier que Boèce ait étudié à Athènes. Mais il constate l'instruction grecque de Boèce, qui pour les mathématiques en particulier, avait puisé ses connaissances surtout dans les ouvrages d'Euclide et du néopythagoricien Nicomaque, et dans les écrits attribués à l'ancien pythagoricien Archytas de Tarante. M. Cantor ne dissimule pas qu'il incline en faveur de l'authenticité de ces écrits, considérés par lui comme des sections diverses d'un grand ouvrage qui portait le nom d'Archytas 8). Il ajoute que cet ouvrage, plein de doctrines pythagoriciennes, a été étudié par Boèce. J'ajouterai, à mon tour, que considérant cet ouvrage et ses sections comme certainement apocryphes, je pense que Boèce a pu y puiser des doctrines étrangères à l'*ancien* pythagorisme.

XIII. Œuvres de Boèce. 1)

Après avoir écarté les ouvrages chrétiens faussement attribués à notre auteur, et après avoir rendu un juste hommage à son beau traité *Sur les consolations de la philosophie*, M. Cantor a eu l'heureuse pensée de comparer avec les ouvrages didactiques qui nous restent de Boèce la liste de ceux auxquels Théodoric fait allusion dans une lettre où il le loue de ses travaux destinés à communiquer aux Latins les sciences grecques 2). On reconnaît dans les éditions des œuvres de Boèce, la *Logique d'après Aristote,*

---

5) VI, 705-724, p. 568-577 de Kopp. — 6) M. Cantor veut, sans motifs suffisants, que l'astronomie de Martianus Capella soit aussi néopythagoricienne. Il dit que Martianus Capella s'accorde avec les pythagoriciens Philolaüs, Héraclide, Ecphantus et Hicétas, pour ne pas faire de la terre le centre commun des révolutions planétaires. C'est vrai en ce qui concerne Philolaüs et Hicétas, pour qui la terre et le soleil étaient deux planètes exécutant comme les autres une révolution suivant un cercle autour d'un *feu central du monde* toujours invisible pour nous. Mais il en est autrement d'Ecphantus et d'Héraclide de Pont (nommé à tort Héraclite par M. Cantor): ces deux pythagoriciens faisaient de la terre le centre de la révolution annuelle du soleil, et des révolutions propres de la lune et des planètes; mais ils attribuaient à la terre une révolution diurne au centre du monde. Du reste, Philolaüs et Hicétas étaient aussi éloignés qu'Ecphantus et Héraclide de l'hypothèse de Martianus Capella, qui faisait de Mercure et de Vénus des satellites du soleil considéré comme une planète tournant autour de la terre: hypothèse que Copernic a heureusement dépassé, et à laquelle Tycho-Brahé a voulu revenir. — 7) Contre la tradition qui fait de Boèce un chrétien, et en faveur de l'attribution des ouvrages théologiques portant son nom à un autre Boèce postérieur, M. Cantor se range (avec raison, je crois) à l'opinion de Hand (Art. *Boèce* dans l'Encyclopédie d'Ersch et Gruber). Cette opinion a été soutenue aussi en France récemment par M. Jourdain. Cependant M. Bæhr *(Geschichte der ræmischen Literatur*, t. 2, p. 487-488. 3 éd., 1845) est revenu à l'opinion vulgaire, défendue aussi par Baur, *De Boëthio christianæ theologiæ assertore* (Darmstadt, 1841, in-8. — 8) Ces écrits existaient et passaient pour œuvres d'Archytas au 1 siècle de notre ère et dans les siècles suivants. M. Cantor est bien tenté de les déclarer authentiques. Cependant, en présence des conclusions contraires (et, je crois, bien fondées) de M. Gruppe, de M. A. Bœckh et de son neveu M. L. Bœckh, il hésite à se prononcer, et il se borne à conclure, avec le dernier, que dès le commencement de notre ère il existait, sous le nom d'Archytas de Tarante, un ouvrage grec en trois livres, et qu'à cet ouvrage unique appartiennent tous les fragments qui nous restent sur le nom d'Archytas. Il faut excepter les Ἀρχύτου καθολικοὶ λόγοι δεκα, ouvrage apocryphe d'une époque postérieure, publié par Camerarius (Leipzig, 1564) et par Orelli *(Opuscula veterum Græcorum sententiosa et moralia*, t. 2, p. 273-280). — 1) *Die Werke des Boethius*, p. 181-198. — 2) Cassiodori *Variarum Epist.*, I, 45, fol. 19 recto (Paris, 1588, in-4).

*

l'arithmétique d'après Nicomaque, la *musique d'après Pythagore* et la *géométrie d'après Euclide;* mais on y chercherait envain l'*Astronomie d'après Ptolémée*, et la *Méchanique d'après Archimède.* Ce sont là deux ouvrages perdus de Boèce.

Pour l'*Astronomie* de Boèce, M. Cantor a remarqué un témoignage qui prouve qu'elle existait encore au Xe siècle, puisqu'en 982 Gerbert écrivait à Adalbéron qu'il avait trouvé à Mantoue *huit volumes de Boèce sur l'astronomie*, d'autres très distingués *sur les figures de géométrie*, et d'autres encore, non moins admirables. M. Cantor me paraît avoir raison de comprendre que les volumes sur les figures de géométrie et sur d'autres objets étaient de Boèce, comme les volumes sur l'astronomie. Mais certainement il a tort de prétendre qu'il n'y avait que huit volumes en tout, tandisque le texte de Gerbert 3) indique clairement huit volumes pour l'*Astronomie* seule, qui devait être ainsi un ouvrage considérable, c'est-à-dire sans doute un résumé étendu des XIII livres de la *Grande Composition mathématique* de Ptolémée.

Dans les œuvres mêmes de Boèce, au commencement de l'*Arithmétique* 4), M. Cantor signale un passage où on lit que, suivant les anciens Pythagoriciens, le *quadrivium* seul conduit au sommet de la philosophie. C'est ce même *quadrivium* que Théodoric appelle *quadrifarias mathesis ianuas*, en félicitant Boèce d'y être entré. Boèce lui-même, au commencement de son *Arithmétique* et dans son traité de la *Musique* 5), déclare que ce *quadrivium* se compose de l'arithmétique, qui considère les nombres en eux-mêmes, de la musique, qui considère les rapports des nombres, de la géométrie, qui a pour objet la grandeur immobile, et de l'astronomie, qui a pour objet la grandeur mobile.

J'ajoute ici une remarque qui paraît avoir échappé à M. Cantor: c'est que, d'après cette définition, l'astronomie devrait comprendre la mécanique générale, comme appendice de la théorie des mouvements célestes, théorie qui elle-même, suivant Boèce 6), devait avoir pour introduction la théorie géométrique de la sphère, non comprise dans sa *Géométrie* plane. En effet, dans l'énumération que Théodoric donne des œuvres mathématiques de Boèce, la *Mécanique d'après Archimède* vient à la suite de l'*Astronomie d'après Ptolémée.*

Quoi qu'il en soit, professant une égale estime pour toutes les parties du *quadrivium*, Boèce 7) dit qu'il faut suivre jusqu'au bout ce quadruple chemin, ou bien renoncer à la philosophie. Il montre que l'arithmétique vient naturellement la première, et il conclut son premier chapitre de l'*Arithmétique* en disant: *Quare, quoniam prior, ut claruit arithmeticæ vis est, hinc disputationis sumamus exordium.* D'où M. Cantor conclut que Boèce, en écrivant ces lignes, avait l'intention de traiter aussi les trois autres parties, sans excepter l'astronomie, et j'ajouterai qu'à l'astronomie il rattachait la mécanique.

Cependant je dois faire encore une remarque qui a échappé à M. Cantor: c'est que tout le premier chapitre de l'*Arithmétique* de Boèce est tiré des cinq premiers chapitres de l'*Arithmétique* de Nicomaque, et que, sauf le mot *quadrivium*, les deux passages de Boèce sur lesquels M. Cantor s'appuie, sont la traduction libre de deux passages de l'auteur grec 8). Il serait donc possible à la rigueur que Boèce eût traduit cette phrase, sans avoir pour son propre compte les intentions qu'elle paraît supposer, ou bien qu'ayant eu ces intentions il ne les eût pas accomplies jusqu'au bout. La lettre de Théodoric et celle de Gerbert prouvent plus sûrement que Boèce avait écrit des traités non-seulement sur l'arithmétique et la musique, mais encore sur la géométrie, sur l'astronomie et même sur la mécanique.

Pour prévenir une objection, M. Cantor remarque que, d'après l'ordre des quatre ouvrages, Boèce n'a dû se référer dans chacun d'eux qu'à ceux qui avaient dû précéder, et qu'ainsi le silence de deux premiers ouvrages sur les deux derniers ne prouve rien contre l'authenticité de la *Géométrie*, que nous avons, ni contre l'existence de l'*Astronomie*, aujourd'hui perdue.

---

3) Dans Duchesne, *Hist. Franc. Script.*, t. 2, p. 790 (Paris, 1636, in-fol.). — 4) I, 1, p. 1296 (Bâle, 1570, in-fol.). — 5) *Arithmétique*, I, 1, p. 1296; *Musique*, II, 3, p. 1395. — 6) P. 1297: *Sphæricam vero atque astronomiam.*— 7) *Arithm.* I, 1, p, 1298. — 8) Voyez Boèce, *Arithm.*, I, 1, p. 1296 et 1298, et comparez Nicomaque, *Arithm.*, I, 3, p. 69-70, et I, 5, p. 73 (éd. Ast).

Pour la *Géométrie* de Boèce, M. Cantor cite, comme je l'avait fait 9), le témoignage de Cassiodore 10), qui, d'accord avec la lettre de Théodoric, dit que Boèce avait traduit en latin ce qu'Euclide avait écrit en grec. M. Cantor ajoute que Cassiodore considère l'*Arithmétique* de Boèce comme une traduction de celle de Nicomaque, tandisqu'elle en est tantôt un résumé, tantôt une paraphrase libre, et qu'ainsi ce qu'il appelle une traduction de l'ouvrage d'Euclide peut être une rédaction latine très différente de l'original grec.

Ensuite M. Cantor reproduit, en les complétant d'une manière très heureuse, les preuves par lesquelles j'avais établi que les deux livres de la *Géométrie* imprimée sous le nom de Boèce sont bien l'ouvrage qu'il avait écrit sur cette science. Je vais exposer brièvement la longue série de ces preuves, en les complétant encore par des remarques nouvelles.

L'accord de nombreux manuscrits, dont quelques uns sont très anciens, prouve que, si l'attribution de ces deux livres à Boèce, auteur des traités sur l'*Arithmétique* et la *Musique*, est erronée, cette erreur était généralement acceptée dès le Xe siècle et dans les siècles suivants.

D'après ce que nous savons des autres ouvrages mathématiques de Boèce, et d'après l'état de ce genre de connaissances chez les Romains, sa *Géométrie* devait être inférieure en intérêt à son *Arithmétique*: elle devait offrir, comme nous l'avons vu, un extrait des *Eléments* d'Euclide; mais elle devait y ajouter ce que les Romains estimaient le plus en fait de géométrie, c'est-à-dire des notions pratiques d'arpentage. Or c'est là précisément ce qu'on trouve dans les deux livres imprimés.

Ici je m'arrête, pour apporter à ces réflexions de M. Cantor un complément qui peut sembler un paradoxe, mais que je vais démontrer: l'auteur des deux livres imprimés, auteur qui, suivant moi, est bien Boèce, n'a pas eu sous les yeux le texte même des *Éléments* d'Euclide, qu'il a cru traduire, mais un maigre extrait grec de cet ouvrage.

Dans mes *Recherches sur les origines de notre système de numération écrite* (p. 8), je n'ai pas dit ce que M. Cantor (p. 189) me prête, savoir, que Boèce a considéré la géométrie théorique, traitée si maigrement dans son premier livre, comme une partie de la géométrie pratique, traitée dans le second. Au lieu de cette erreur, qu'il n'aurait pas fallu m'imputer, j'avais énoncé une proposition vraie, que je vais compléter en la justifiant. Boèce 11) distinguait nettement la géométrie théorique de la géométrie pratique. Mais j'ai dit et je répète qu'il n'a donné de la première que ce qui était strictement nécessaire pour l'arpentage. En effet, 1° il n'a donné que la théorie des lignes et des surfaces, à l'exclusion de celle des solides; 2°, comme M. Cantor lui-même l'avoue, mais tardivement et incidemment, dans le chapitre suivant (p. 201), tout ce qu'on trouve, dans toute la partie principale du premier livre de Boèce, sur cette théorie des lignes et des surfaces, ce sont, d'abord des *figures* accompagnées de *définitions* (p.1487-1495), qui forment, avec les axiômes (p.1492), ce que l'auteur (p.1495) appelle les *Prolégomènes;* puis, sous le titre de *Schemata* (p. 1495-1514), des figures accompagnées seulement de l'énoncé des théorèmes et des problèmes auxquels elles se rapportent, mais *sans démonstrations.*

Est-ce de propos délibéré que l'auteur latin n'a rien donné des démonstrations d'Euclide? Je n'avais pas posé cette question dans la dissertation citée; mais je vais la résoudre ici. D'après ce que Boèce, dès le début de sa *Géométrie* (p. 1487, l. 1-2), dit contre *l'obscurité des explications d'Euclide sur les figures de géométrie*, surtout d'après ce qu'il dit plus loin (p. 1514, l. 4 et suiv.) sur *l'obscurité et la brièveté extrême d'Euclide dans ces explications,* d'après la manière dont il se vante de *l'exactitude qu'il a mise à la traduire mot pour mot,* enfin d'après la manière dont il s'exprime sur la nécessité qu'il a vue d'ajouter *de son propre fonds,* comme supplément à la fin de cette traduction fidèle, les démonstrations 12) des solutions des trois premiers problèmes 13); il est de toute évidence que Boèce n'avait pas le texte

---

9) *Recherches nouvelles sur les origines de notre système de numération écrite*, p. 7-8 du tirage à part.—10) *Géom.*, fol. 309 verso (Paris, 1588, in-4).— 11) *Géom.*, II, p. 1520. — 12) Il les donne, p. 1514-1516. — 13) Voyez ces problèmes, p. 1495.

même des *Éléments* d'Euclide, mais seulement un extrait grec, rédigé sans doute pour l'usage des arpenteurs grecs, et ne contenant que des figures et des énoncés sans démonstrations. En effet, comme je l'ai montré dans mes *Recherches sur Héron d'Alexandrie* 14), les écrivains grecs sur la géométrie pratique séparaient la *stéréométrie* de la *géométrie plane;* dans cette dernière, ils commençaient par donner à part toutes les définitions et les axiômes, puis ils venaient aux problèmes, dont ils donnaient les solutions sans les démontrer. Ils réunissaient quelquefois ces derniers sous le titre Σχήματα τῆς γεωμετρίας 15), *figures de géométrie*, titre que Boèce a reproduit en grec *(Schemata)* en tête de la partie principale de son premier livre (p. 1495), et qu'en deux autres endroits (p. 1487 et 1514) il a traduit en latin *(De figuris geometriæ)*. C'est donc bien là une traduction latine d'un extrait grec des quatre premiers livres des *Éléments* d'Euclide, extrait pris par le traducteur pour l'œuvre même d'Euclide.

Après cette traduction, qui remplit presque tout le premier livre de Boèce, et après les démonstrations ajoutées par Boèce pour les trois premiers problèmes seulement, la fin du premier livre (p. 1516-1519) et tout le second (p. 1520-1536) sont tirés des arpenteurs romains, et surtout de l'écrivain *latin* Archytas. Cependant les deux livres sont intitulés, l'un *premier*, l'autre *second livre de la géométrie d'Euclide traduite par Boèce:* cela convient bien à l'ouvrage de Boèce que Théodoric et Cassiodore disent *traduit du grec d'Euclide.* En tête du premier livre, l'auteur dit qu'il va éclairer l'ouvrage obscur d'Euclide *sur les figures de l'art géométrique:* cela convient parfaitement à l'ouvrage de Boèce, que Gerbert avait trouvé à Mantoue et qui traitait, disait-il, *des figures de géométrie.* M. Cantor a raison de remarquer l'identité et la bizarrerie de ces expressions, dont je viens d'expliquer l'origine grecque et la signification.

En tête du premier livre de la *Géométrie* (p. 1487), on lit: *Mi patrici.* A qui s'adressent ces mots? En cet endroit, le mot *patricius* n'est pas un nom propre, mais un titre honorifique. Pourquoi le nom propre manque-t-il? C'est que l'ouvrage, étant bien réellement de Boèce, fait suite aux traités de l'*Arithmétique* et de la *Musique;* Boèce n'a pas besoin de répéter ici le nom du patrice, parcequ'il l'a nommé en tête de l'*Arithmétique* (p. 1293), première partie du *quadrivium*, dont la dédicace est: *ad patricium Symmachum.* C'est son beau-père le patrice Symmaque 16), auquel, en effet dans la préface de cette *Arithmétique* (p. 1295) et dans le chapitre premier (p. 1296-1298), il semble annoncer la *Musique*, la *Géométrie* et l'*Astronomie,* traités par lesquels il doit compléter le *quadrivium.* Dans le corps même de l'*Arithmétique*, les trois autres ouvrages ne sont pas cités, parcequ'elle les précède. La *Musique*, qui vient la seconde, se réfère très fréquemment à l'*Arithmétique*, dont elle est une continuation. Dans la *Géométrie*, M. Cantor signale un renvoi à la *Musique* 17) et trois renvois à l'*Arithmétique* 18), dont le dernier est une citation presque textuelle 19).

Quel est l'Archytas pris pour guide par l'auteur dans la fin du premier livre (depuis p. 1516, l. 8) et dans tout le second livre de la *Géométrie?* Est-ce Archytas de Tarante, le vieux pythagoricien, auquel Boèce, dans sa *Musique* 20), oppose les critiques de Ptolémée contre quelques points de ses théories musicales, et dont le même Boèce, dans son *Commentaire* sur les *Catégories* (p. 114), comme dans son *Arithmétique* (II, 41, p. 1352), cite un ouvrage philosophique, mais non sans en suspecter l'authenticité, à l'exemple de Thémistius? Non, répond avec raison M. Friedlein 21); mais l'unique preuve qu'il donne

14) P. 104 et suiv., p. 120, et p. 176 et suiv. — 15) Voyez mes *Recherches sur Héron,* p. 136.— 16) Le profond respect avec lequel Boèce s'adresse un patrice Symmaque, dans sa Préface générale, mise en tête de son *Arithmétique*, prouve bien que c'est à son beau-père qu'il dédie ses ouvrages mathématiques. Son beau-père est bien le Symmaque auquel il dit: PATERNA *gratia nostrum provehas munus.* Il faut donc rejeter la conjecture de M. Cantor, d'après laquelle il s'agirait du beau-frère de Boèce, Symmaque le fils, aussi patrice. Il est vrai que dans un manuscrit du Vatican cité par Heilbronner *(Hist. Mathes. univ.*, p. 541*)*, le titre de la *Géométrie* est: *Boëtii liber ex Euclide ad Patricium filium.* Mais le copiste de ce manuscrit n'a songé ni à *Symmaque le fils,* ni *à Symmaque le père.* Ayant lu dans la première ligne de la *Géométrie* ces mots: *Mi patrici*, l'ignorant copiste a conclu que Boèce avait un fils nommé *Patricius.*— 17) *Géom.*, p. 1518, l. 3-5 d'en haut,—18) P. 1514, l. 10-12 d'en haut, p. 1518, l. 3-5 d'en haut, et l. 4-3 d'en bas. — 19) Comparez *Arithm.* I, 7, p. 1299, l. 7-6 d'en bas et II, 5, p. 1329, l. 20-21 d'en haut. — 20) IV, 16-17, p. 1479-1480. —21) *Gerbert, die Geometrie des Boëthius und die indischen Ziffern*, p. 16 (Erlangen, 1861, in-8).

de la distinction des deux Archytas, est contestée avec non moins de raison par M. Cantor; car il n'est pas vrai que Boèce n'ait pas pu prendre pour guide en matière d'arpentage un auteur qu'il aurait contredit sur une question de musique. A en croire M. Cantor (p. 191), j'aurais *soupçonné* la distinction des deux Archytas, mais *la preuve ne m'aurait pas mieux réussi qu'à M. Friedlein*. Au lieu de *soupçonner* la distinction des deux Archytas, je l'ai *affirmée*, et j'en ai donné une *preuve décisive* 22) que M. Cantor a répétée après moi: évidemment Archytas, que dans sa *Géométrie* Boèce (p. 1516) appelle *un écrivain LATIN non méprisable*, n'a pas pu être confondu par Boèce avec le vieux philosophe *grec* Archytas. Mais, quoique cette preuve suffise, il faut savoir gré à M. Cantor de l'avoir confirmée, en remarquant que deux des cinq passages de la *Géométrie* de Boèce où Archytas est cité, indiquent expressément qu'il est postérieur à Euclide 23).

M. Cantor reconnaît la vraisemblance de mon opinion d'après laquelle cet écrivain *latin* Archytas, qui n'est cité que dans la partie de la *Géométrie* de Boèce relative à l'arpentage, serait un de ces arpenteurs latins que Boèce (II, p. 1520) promet de suivre dans cette partie.

Une conjecture ingénieuse de M. Cantor aurait besoin d'être confirmée par l'étude du célèbre manuscrit mathématique de Chartres. L'ouvrage latin anonyme que M. Chasles y a trouvé et qui offre tant de rapports avec le second livre de la *Géométrie* de Boèce, ne serait-il pas l'ouvrage même de l'Archytas latin, mis à profit par Boèce?

Quoi qu'il en soit, le titre d'*écrivain latin*, donné par Boèce à cet Archytas, ne permet de le confondre ni avec le vieil Archytas de Tarente ni avec le pseudonyme grec dont il nous reste des fragments, et M. Cantor remarque avec justesse qu'en désignant ainsi l'arpenteur Archytas dans le premier endroit où il en a parlé, Boèce a eu l'intention de le distinguer de l'Archytas grec, dont il avait parlé dans ses ouvrages précédents.

M. Cantor remarque, après M. Chasles, que le pentagone en étoile, dont la figure se trouve et est expliquée dans un passage obscur de la fin du premier livre de la *Géométrie* de Boèce 24), était une figure chère aux pythagoriciens, que Boèce aime à prendre pour guides 25). Cette figure ne se trouve pas dans les *Éléments* d'Euclide; mais on l'avait peut-être ajoutée dans l'extrait que Boèce a traduit. Elle se trouve précisément à la fin de sa traduction de cet extrait qu'il a pris pour l'œuvre même d'Euclide.

Nicomaque, source principale de l'*Arithmétique* de Boèce, est cité aussi dans le second livre de sa *Géométrie* 26), et, suivant ma remarque répétée par M. Cantor, il est cité précisément pour une expression grecque (ἑτερομήκης) que Boèce avait déjà citée de lui dans son *Arithmétique* 27).

Ainsi bien des motifs, réunis par M. Cantor, doivent nous faire reconnaître dans les deux livres de la *Géométrie* l'œuvre authentique de Boèce. Cependant, en faveur de cette authenticité si importante à établir, j'avais indiqué encore d'autres preuves, que M. Cantor aurait bien fait de ne pas négliger, et

---

22) *Rech. sur les origines de notre syst. de num. écr.* p. 8, l. 12-15. — 23) *Géom.*, II, p. 1523, l. 17-22, et p. 1526, l. 8-10. — 24) P. 1514, l. 1-3. Comparez M. Chasles, *Geschichte der Geometrie*, p. 546 et suiv. de la trad. allem. de M. Sohncke. La figure et l'explication, données par les éditions et par les meilleurs manuscrits, manquent pourtant dans celui d'Erlangen, qui est un des meilleurs. A ce propos, M. Cantor présente des remarques fort justes contre cette erreur de critique qui consiste à s'autoriser des omissions d'un copiste, pour accuser d'interpolation les manuscrits plus complets. M. Cantor pense que ce passage a été omis dans le manuscrit d'Erlangen, à cause de son obscurité. — 25) M. Cantor, qui ne s'interdit pas les épisodes, donne une notice sur un manuscrit de Berne, écrit en l'an 1004, et dans lequel on trouve la figure d'un *hexagone en étoile*. De la description insuffisante que M. Cantor donne de ce manuscrit, comparée avec la petite notice de M. Blume (*Gromatici veteres*, t. 2, p. 84) sur ce même manuscrit, il résulte qu'un extrait des deux livres de la *Géométrie* de Boèce (p. 1487-1536, éd. de Bâle) y est suivi d'un extrait de la compilation qui suit aussi dans les éditions (p. 1536-1546 de Bâle), qu'on y trouve notamment le petit résumé par demandes et réponses (p. 1541-1542), et que le tout est divisé en cinq livres attribués à Boèce. Telle est sans doute aussi la *Géométrie de Boèce en cinq livres*, qui se trouve dans un manuscrit de la Bibliothèque Laurentienne de Florence suivant M. Libri (*Hist. des sciences en Italie*, t. I, p. 89). — 26) P. 1526, l. 12, où il faut lire *heteromeces*. — 27) II, 26, p. 1341, l. 13 d'en bas.

dont M. Wœpcke 28) me paraît aussi ne pas avoir tenu assez de compte. Ce savant accepte les preuves que j'avais données de l'authenticité de la partie principale du premier livre de la *Géométrie* de Boèce; mais il croit que la fin de ce livre, depuis la ligne 4 de la page 1516, forme, avec tout le second livre, une seconde partie, qui peut-être regardée comme l'œuvre d'un continuateur, assez ancien pourtant. Je vais faire voir ici que cette supposition est inadmissible.

Dès 1857, j'avais montré 29) que cette seconde partie se lie naturellement à la première, qu'elle la complète et qu'elle forme un tout avec elle. J'avais prouvé 30) que l'auteur de la seconde partie se donne expressément comme l'auteur de la première 31) et comme l'auteur des traités précédents sur l'*Arihmétique* et sur la *Musique* 32), de sorte que, s'il n'était pas Boèce, au lieu d'être un simple continuateur, il serait un faussaire audacieux. J'ajoute qu'il se désigne sans affectation, incidemment et d'une manière qui n'est pas celle d'un faussaire.

M. Wœpcke avoue que la seconde partie, apocryphe suivant lui, se réfère à la première partie authentique; mais il dit que je n'ai pas prouvé que réciproquement la première partie du premier livre, reconnue authentique par M. Wœpcke lui-même, un passage (p. 1514, l. 5-12) qui précède les trois démonstrations ajoutées par Boèce, mais qui annonce évidemment quelque chose de plus. Qu'on fasse surtout attention à ces mots: *Sunt enim a nobis quædam huic operi INSERENDA, HUIC ARTI valde necessaria, et supra dictis respondentia et SUBSEQUENTIBUS CONVENIENTIA. Subsequentibus convenientia!* Quelque chose devait donc *suivre* les trois démonstrations ajoutées. Cette *suite*, annoncée ainsi par Boèce dans la partie reconnue authentique par M. Wœpcke, commence précisément avec ce qui serait suivant lui une continuation apocryphe (p. 1516, l. 4 et suiv.). Il y a donc dans la première partie un texte de Boèce qui suppose nécessairement la seconde. Ce passage de la première partie est d'ailleurs rappelé vers la fin de la seconde partie en des termes presque identiques: *Quia igitur de omnium HUIC ARTI INSERENDARUM speculationum rationibus breviter enodateque sat disseruimus,* etc. (p. 1535, l. 5-4 d'en bas). La second partie est donc bien certainement du même auteur que la première, dont M. Wœpcke reconnaît l'authenticité.

En concluant pour l'authenticité des deux livres de la *Géométrie* de Boèce, M. Cantor (p. 196-197) rejette, comme moi, l'authenticité de la compilation qui les suit sous le titre: *Boëtii liber de Geometria.* Cette compilation, donnée dans l'édition de Venise comme *troisième livre de la Géométrie de Boèce,* manque dans les meilleurs manuscrits de cet ouvrage et est anonyme dans quelques autres. C'est un appendice ajouté par les copistes.

M. Cantor (p. 197-198) excuse la longueur de ce chapitre pas l'importance des documents que les deux livres de la *Géométrie* de Boèce, reconnus authentiques, vont lui fournir pour l'histoire de notre système de numération écrite. Telle sera aussi l'excuse de cette longue analyse, qui ajoute beaucoup aux résultats des recherches de M. Cantor sur cet ouvrage, et qui répond aux objections de M. Wœpcke.

---

28) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, p. 16-17 (Paris, 1863, in-8). Comparez mes *Rech. sur l'origine de notre système de numération écrite*, p. 6-8. — 29 *Orig. de notre syst. de numération écrite*, p. 4 et 6. — 30) Dans la même dissertation, p. 8. — 31) *Géom.*, I, p. 1516, l. 4-7, et II, p. 1520, l. 4 et 29. — 32) I, p. 1518, l. 4 d'en haut, et l. 4 d'en bas.

(La suite et fin dans la prochaine livraison.)

SOPRA LA CURVATURA DI ALCUNE LINEE PRODOTTE DALL' INTERSEZIONE DI DUE SUPERFICIE DEL SECONDO GRADO

MEMORIA

DEL PROF. BARNABA TORTOLINI

1.° Fin dall' anno 1852 il Sig. Prof. *J. Booth* pubblicò nelle Transazioni filosofiche di Londra una lunga Memoria intitolata: *Researches on the geometrical properties of elliptic integrals*, e nel 1854 pubblicò ancora un' altro scritto sotto lo stesso titolo. Nelle citate Memorie il Sig. *Booth* si occupa della rettificazione e quadratura di una serie di linee a doppia curvatura provenienti dall' intersezione di due date superficie del secondo grado: il medesimo giunge a dimostrare, che in queste curve vi sono incluse le rappresentazioni geometriche delle funzioni ellittiche delle tre note specie, ed in tutte le varietà possibili: anche io nel tom. II. di questi Annali 1859, e nel tom. IV. riprodussi alcune ricerche del Sig. *Booth,* ed estesi un tal argomento ad altre linee a doppia curvatura. In questa nuova Memoria mi propongo di prendere ad esame la curvatura di alcune di queste linee col determinarne i raggi delle due curvature ed il raggio di curvatura sferica, non che il luogo geometrico dei centri di curvatura sferica, quale si riduce alla *linea di regresso* della *Superficie polare:* le formole generali, delle quali faremo uso, e che per la maggior parte son dovute a *Monge* trovansi presentemente riportate in tutti i moderni trattati di Calcolo infinitesimale, ed io pure nel Calcolo differenziale pubblicato nel 1844 trattai con qualche nuova generalità, ed estensione la teoria delle curve a doppia curvatura; contuttociò nel corso di questa Memoria spesso mi rivolgerò a richiamare qualcuna delle formole generali riportate dal Sig. *De Saint-Venant* in una sua importante Memoria *Sur les lignes courbes non planes,* ed inserita nel fascicolo 30. del giornale della scuola politecnica per il 1845.

2.° La prima linea della quale ci occuperemo a determinarne la sua curvatura sarà quella linea prodotta dall' intersezione di un paraboloide ellittico, e da un cilindro circolare aventi lo stesso asse. Se l' asse comune sia quello delle z e si chiamino k, k_1 i semiparametri delle due parabole descritte nei piani xz, yz, sezioni principali del paraboloide, e chiamato a il raggio del cilindro circolare, si avranno le due equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad \frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k_1} = 2z$$

Come ognun vede da una tal intersezione verrà a segnarsi nella superficie del paraboloide una linea chiusa, della quale le projezioni nei piani xz, yz saranno due nuove parabole: se si fosse preso un paraboloide di rivoluzione ed un cilindro ellittico di asse comune, dalla loro intersezione si ottiene pure una nuova linea chiusa, e che dal Sig. *Booth* fù chiamata *Ellisse logaritmica,* e della quale ancora ne parleremo nel proseguimento di questa Memoria: la curva che prendiamo ora a considerare è una specie di ellisse logaritmica. Nella curvatura delle linee occorre la cognizione dei differenziali di primo ordine e di ordine superiore delle variabili x, y, z e dell' arco s riferendole tutte ad una variabile indipendente come funzioni: nelle precedenti equazioni adoprando la sostituzione polare

$$x = a\cos\theta\,,\quad y = a \operatorname{sen}\theta$$

si avrà egualmente

$$2z = \frac{a^2}{kk_1}(k_1\cos^2\theta + k\operatorname{sen}^2\theta)\,,$$

ove si prenderà θ per variabile indipendente. Venendo alla differenziazione successiva, si ottiene

$$dx = -a\operatorname{sen}\theta\, d\theta\,,\quad dy = a\cos\theta\, d\theta\,,\quad dz = \frac{a^2}{kk_1}(k - k_1)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta$$

di qui per il differenziale ds dell' arco, e per l'equazione $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, si trae

$$ds^2 = \frac{a^2}{k^2k_1^2}\left(k^2k_1^2 + a^2(k - k_1)^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right)d\theta^2$$

e dall' integrazione l' arco s dipenderà dai trascendenti ellittici: infatti ponendo con il Sig. *Booth*, $2\theta = \frac{\pi}{2} + \psi$ e ponendo di più per brevità

$$h = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right),\qquad c^2 = \frac{h}{\sqrt{(a^2 + h^2)}}$$

si ricaverà

$$s = \frac{\sqrt{(a^2 + h^2)}}{2}\int d\psi\,\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\psi)}$$

e che sarà un trascendente ellittico di seconda specie e perciò riducibile alla rettificazione dell'ellisse piana: dalla derivazione ulteriore abbiamo

$$d^2x = -a\cos\theta\, d\theta^2\,,\qquad d^2y = -a\operatorname{sen}\theta\, d\theta^2$$

$$d^2z = \frac{a^2}{kk_1}(k - k_1)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta^2$$

Con questi valori componendo il differenziale di ds^2, cioè

$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z$$

otterremo

$$ds\, d^2s = \frac{a^4 (k - k_1)^2}{k^2 k_1^2} (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \,\text{sen}\,\theta \cos\theta\, d\theta^3$$

La successiva derivazione porge ancora

$$d^3x = a \,\text{sen}\,\theta\, d\theta^3, \quad d^3y = -\, a \cos\theta\, d\theta^3$$

$$d^3z = \frac{-\,4a^2 (k - k_1)}{kk_1} \,\text{sen}\,\theta \cos\theta\, d\theta^3$$

Tali sono le formole preparatorie che ci serviranno in appresso.

3.° Sia ρ il raggio di curvatura, e ρ_1 il raggio della seconda curvatura, e che suol dirsi raggio di flessione, e chiamato dal Sig. De Saint-Venant, *rayon de cambrure:* pongasi inoltre

$$U = dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad V = dz\, d^2x - dx\, d^2z$$

$$W = dx\, d^2y - dy\, d^2x$$

si avrà tanto per il raggio ρ del circolo osculatore alla curva, quanto per il raggio ρ_1 di flessione,

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)}}, \qquad \rho_1 = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)}{U d^3x + V d^3y + W d^3z}$$

Nel nostro caso abbiamo per U, V, W, i valori

$$U = \frac{a^3}{kk_1} (k - k_1) \cos^3\theta\, d\theta^3, \quad V = -\,\frac{a^3}{kk_1} (k - k_1)\, \text{sen}^3\theta\, d\theta^3, \quad W = a^2\, d\theta^3$$

d'onde

$$U^2 + V^2 + W^2 = \frac{a^4}{k^2 k_1^2} \left(k^2 k_1^2 + a^2 (k - k_1)^2 - 3a^2 (k - k_1)^2\, \text{sen}^2\theta \cos^2\theta \right) d\theta^6$$

e perciò richiamando il valore di ds, si avrà per il raggio del circolo osculatore

$$\rho = \frac{a}{k^2 k_1^2} \, \frac{(k^2 k_1^2 + a^2 (k - k_1)^2\, \text{sen}^2\theta \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{(k^2 k_1^2 + a^2 (k - k_1)^2 - 3a^2 (k - k_1)^2\, \text{sen}^2\theta \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

*

Nei punti della curva, ove corrisponde, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, il raggio resta costante, e sarà

$$\rho' = \frac{akk_1}{\sqrt{(k^2k_1^2 + a^2(k - k_1)^2)}}$$

Di più dai precedenti valori di x, y, z, il raggio potrebbe essere espresso per una qualunque delle tre coordinate x, y, z; per il raggio ρ_1 di flessione rappresentiamo per un istante con S il suo denominatore, si avrà generalmente la doppia identità

$$S = Ud^3x + Vd^3y + Wd^3z = -dUd^2x - dVd^2y - dWd^2z.$$

D'altronde dai valori di U, V, W, si trae

$$dU = -\frac{3a^3}{kk_1}(k - k_1)\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta^4, \quad dW = 0.$$

$$dV = -\frac{3a^3}{kk_1}(k - k_1)\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, d\theta^4$$

per cui

$$S = -\frac{3a^4}{kk_1}(k - k_1)\operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta^6$$

d'onde per il raggio di flessione si ottiene

$$\rho_1 = -\frac{(k^2k_1^2 + a^2(k - k_1)^2 - 3a^2(k - k_1)^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta)}{3kk_1(k - k_1)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

Qui pure il secondo membro potrebbe farsi dipendere da una qualunque delle tre coordinate x, y, z. A queste due grandezze ρ, ρ_1 si aggiunge dal Sig. *De Saint-Venant* una terza retta $\mathfrak{R}$, determinata dall'equazione

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_1^2}$$

ed ove $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ si potrebbe chiamare *curvatura risultante* relativamente alle due *curvature componenti* $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho_1}$: di più $\frac{ds}{\mathfrak{R}}$ rappresenterà l'angolo infinitesimo formato da due raggi di curvatura consecutivi, od anche l' angolo formato da due piani condotti per ciascun punto della curva perpendicolarmente al raggio di curvatura corrispondente: questi piani furono chiamati dal Lancret *piani rettificanti*, come si dirà *superficie rettificante* la superficie generata dal movimento dei piani rettificanti: per le stesse

analogie si dirà pure *retta rettificante* in un dato punto della curva una delle generatrici di questa superficie, e coincidente con l'intersezione di due piani rettificanti consecutivi.

4° In una curva situata nello spazio dall'intersezione di due piani normali infinitamente vicini si ha la così detta *retta polare*, come dall'unione delle rette polari, o dal movimento del piano normale si ottiene una superficie sviluppabile, e chiamata da Monge, *superficie polare:* nell'intersezione di due rette polari trovasi il centro della *sfera osculatrice*, la quale ha un contatto di terzo ordine con la curva: il luogo geometrico di tutti i centri provenienti ancora dall'intersezione di tre piani normali infinitamente vicini, viene ad essere la *linea di regresso* della superficie polare, e che dai Francesi si chiama *l'arête de rebroussement*.

È noto che la coesistenza delle tre equazioni

$$\left.\begin{aligned}&(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0\\&(X-x)\,d^2x+(Y-y)\,d^2y+(Z-z)\,d^2z-ds^2=0\\&(X-x)\,d^3x+(Y-y)\,d^3y+(Z-z)\,d^3z-3ds\,d^2s=0\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

determina il centro di curvatura sferica, la prima delle quali appartiene al piano normale, e le altre due si ottengono dalla differenziazione successiva della prima considerando X, Y, Z come costanti, anzi tutte e tre provengono dalla successiva differenziazione dell'equazione

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2$$

considerando X, Y, Z, ed R come costanti, in questa guisa R sarà il raggio della sfera osculatrice ed X, Y, Z le coordinate del centro: con le denominazioni introdotte nel precedente N°. 3°, si avrà da quelle tre equazioni per via dell'eliminazione

$$\left.\begin{aligned}X-x&=\frac{3U ds\,d^2s-dU\,ds^2}{S}\\Y-y&=\frac{3V ds\,d^2s-dV\,ds^2}{S}\\Z-z&=\frac{3W ds\,d^2s-dW\,ds^2}{S}\end{aligned}\right\}\quad(2).$$

quali equazioni come è chiaro appartengono alla linea di regresso della superficie polare: la coesistenza poi delle sole due prime equazioni (1) ci porgerà l'equazione della detta superficie polare. Relativamente poi al raggio R si otterrebbero riduzioni complicate per la sostituzione dei valori di $X-x, \ldots$, ed i geometri moderni

dietro alcune considerazioni geometriche son giunti a ritrovare

$$R = \sqrt{\left(\rho^2 + \left(\frac{\rho_1 \, d\rho}{ds}\right)^2\right)}$$

ove al solito ρ, ρ_1 sono i raggi delle due curvature: questa formola si trova ancora nella citata Memoria del Sig. *De Saint-Venant;* contuttociò nelle applicazioni riesce non di rado complicata, e che lo faremo avvertire nelle opportune occasioni.

5° Applichiamo le precedenti formole alla curva da noi considerata; così per le coordinate X, Y, Z del centro di curvatura sferica, per la sostituzione dei valori di W, $dW = 0$, otteniamo dall' ultima dell' equazioni (2)

$$Z - z = -\frac{a^2(k - k_1)}{kk_1}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

d' onde dal valore $2zkk_1 = a^2(k_1 \cos^2\theta + k \operatorname{sen}^2\theta)$; eliminando $\cos^2\theta$, e $\operatorname{sen}^2\theta$, avremo

$$Z = \frac{1}{kk_1}(5kk_1 z - a^2 k - a^2 k_1)$$

od anche col sostituirvi nuovamente il valore di z,

$$Z = \frac{a^2}{2kk_1}\Big((3k_1 - 2k)\cos^2\theta + (3k - 2k_1)\operatorname{sen}^2\theta\Big)$$

Per le altre coordinate X, Y sostituendoci i valori di U, V, dU, dW, ... si trae dopo facili riduzioni

$$X - x = -\frac{a\cos\theta}{k^2k_1^2}\Big(k^2k_1^2 + a^2(k - k_1)^2\cos^4\theta\Big)$$

$$Y - y = -\frac{a\operatorname{sen}\theta}{k^2k_1^2}\Big(k^2k_1^2 + a^2(k - k_1)^2\operatorname{sen}^4\theta\Big)$$

dalle quali per la sostituzione di $x = a\cos\theta$, $y = a\operatorname{sen}\theta$ si avrà

$$X = -\frac{a^3(k - k_1)^2}{k^2k_1^2}\cos^5\theta, \quad Y = -\frac{a^3(k - k_1)^2}{k^2k_1^2}\operatorname{sen}^5\theta$$

Che se si volessero sostituire nuovamente i valori di $\cos\theta$, e $\operatorname{sen}\theta$, deduciamo

$$X = -\frac{(k - k_1)^2}{a^2k^2k_1^2}x^5, \quad Y = -\frac{(k - k_1)^2}{a^2k^2k_1^2}y^5$$

Nei valori di X, Y, Z coesistenti si trova determinata la linea di regresso della superficie polare: la successiva eliminazione dell' angolo θ fra due delle tre espressioni

porgerà l'equazioni delle projezioni della curva nei tre piani ortogonali, e che verremo brevemente ad esaminare. Innanzi tutto la nuova linea trovasi al di sotto dell' asse della z, almeno per valori positivi di sen θ, cos θ, come si scorge dai valori negativi di X, ed Y: elevando poi al quadrato le X, ed Y, ed estraendo la radice quinta e sommando, otterremo l' equazione

$$(X)^{\frac{2}{5}} + (Y)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{a^6 (k - k_1)^4}{k^4 k_1^4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

la quale appartiene alla projezione della nostra curva nel piano xy: volendo togliere l' irrazionalità, l' equazione ascende al decimo grado, come ho fatto vedere in una mia precedente Nota. (*Annali di Mat. tom. IV. N.* 5.): per cui la curva è del decimo ordine: le projezioni poi nei piani xz, yz saranno due curve del quint'ordine: elevando infatti al quadrato i valori di X, ed Y si avrà

$$X^2 = \frac{a^6 (k - k_1)^4}{k^4 k_1^4} \cos^{10}\theta\,, \quad Y^2 = \frac{a^6 (k - k_1)^4}{k^4 k_1^4} \operatorname{sen}^{10}\theta$$

Ora dal valore di Z in funzione dell' angolo θ, si trae

$$5\,(k - k_1)\, a^2 \operatorname{sen}^2\theta = 2a^2 k - 3a^2 k_1 + 2kk_1 Z$$

$$5\,(k - k_1) a^2 \cos^2\theta = 3a^2 k - 2a^2 k_1 - 2kk_1 Z$$

Di qui per le curve di projezione nei piani xz ed yz, abbiamo le due equazioni di quinto grado

$$5^5\,(k - k_1)\, a^4 k^4 k_1^4\, X^2 = (3a^2 k - 2a^2 k_1 - 2kk_1 Z)^5$$

$$5^5\,(k - k_1)\, a^4 k^4 k_1^4\, Y^2 = (2a^2 k - 3a^2 k_1 + 2kk_1 Z)^5$$

Facendo infine la somma dei primi, e secondi membri, si avrà una funzione di quarto grado rapporto a, Z, l'equazione sarà divisibile per $5a^2 (k - k_1)$ ed eguali sono i coefficienti di X^2, Y^2, e rappresenterà una superficie di quart' ordine generata dalla rotazione di una curva parimenti di quart' ordine attorno l'asse della Z. Dai valori di X^2, Y^2 espressi per l' angolo θ si potrà ricavare sotto forma più compendiosa

$$5^4 a^2 k^4 k_1^4 (X^2 + Y^2) = 5^4 a^8 (k - k_1)^4 \left(1 - 5 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + 5 \operatorname{sen}^4\theta \cos^4\theta\right)$$

ove s' intenderà eseguita la sostituzione di $\operatorname{sen}^2\theta$, $\cos^2\theta$ in funzione dell' ascissa Z: aggiungiamo ancora, che l' equazione della projezione del piano xy

$$(X)^{\frac{2}{5}} + (Y)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{a^3 (k - k_1)^2}{k^2 k_1^2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

apparterrà pure all' equazione di un cilindro avente per asse l' asse delle **Z**: potremo dunque concludere che la linea di regresso della superficie polare, proverrà dall'intersezione di un cilindro di decimo ordine, e da una superficie curva di quarto, e di rivoluzione attorno l' asse delle z, ed aventi ambedue l' asse comune. Determinati i valori di X, Y, Z, e di $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ sarà facile di ottenere l'espressione del raggio di curvatura sferica senza ricorrere alla formola di sopra stabilita; infatti avremo simultaneamente

$$(X-x)^2 = \frac{a^2\cos^2\theta}{k^4k_1^4}\left(k^2k_1^2+a^2(k-k_1)^2\cos^4\theta\right)^2$$

$$(Y-y)^2 = \frac{a^2\,\text{sen}^2\theta}{k^4k_1^4}\left(k^2k_1^2+a^2(k-k_1)^2\,\text{sen}^4\theta\right)^2$$

$$(Z-z)^2 = \frac{a^4}{k^2k_1^2}(k-k_1)^2(\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta)^2$$

d'onde posto per brevità

$$A = \left(k^2k_1^2+a^2(k-k_1)^2\right)^2 + a^2k^2k_1^2(k-k_1)^2$$

$$B = -5a^2(k-k_1)^2\left(a^2(k-k_1)^2+2k^2k_1^2\right),\quad C = 5a^4(k-k_1)^4$$

si avrà per il raggio **R** di questa sfera

$$R = \frac{a}{k^2k_1^2}\sqrt{\left(A+B\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta+C\,\text{sen}^4\theta\cos^4\theta\right)}$$

Il ritrovato valore in forza delle relazioni di sopra stabilite per le coordinate x, y, z e l' angolo θ, potrebbe ridursi ad una funzione di una qualunque delle tre variabili x, y, z.

6° Della medesima linea di regresso della superficie polare, e che si chiama ancora *la sviluppata pel piano,* se ne calcola l'elemento, come prova il Sig. *De Saint-Venant* con la formola generale

$$\frac{\rho}{\rho_1}ds + d\,\frac{\rho_1\,d\rho}{ds}$$

mà per la curva in questione è più facile il calcolarlo direttamente dalla differenziazione dei valori di X, Y, Z; ottenuti al principio del precedente N° 5.

Ed avremo

$$dX = \frac{5a^3 (k-k_1)^2}{k^2 k_1^2} \cos^4\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$dY = -\frac{5a^3 (k-k_1)^2}{k^2 k_1^2} \operatorname{sen}^4\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$dZ = \frac{5a^2 (k-k_1)}{kk_1} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta$$

Di qui per l'elemento dS_1 di questa curva, si avrà

$$dS_1 = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}$$

e che diviene

$$dS_1 = \frac{5a^2 (k-k_1)}{kk_1} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \sqrt{\left(k^2 k_1^2 + a^2 (k-k_1)^2 (1 - 3 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta)\right)}$$

Il secondo membro è integrabile parte sotto forma algebrica, ed in parte per logaritmi: la quarta parte della linea totale corrisponde ai limiti $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, donde facendo $\cos 2\theta = u$, ed insieme

$$A = 4k^2 k_1^2 + a^2 (k-k_1)^2, \qquad B = 3a^2 (k-k_1)^2$$

si avrà

$$S_1 = \frac{3}{4} \frac{a^2 (k-k_1)}{kk_1} \int_0^1 du \sqrt{(A + Bu^2)}$$

d'altronde per l' integrale indefinito abbiamo

$$\int du \sqrt{(A + Bu^2)} = \frac{u\sqrt{(A+Bu^2)}}{2} + \frac{A}{2} \int \frac{du}{\sqrt{(A+Bu^2)}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{(A+Bu^2)}} = \frac{1}{\sqrt{B}} \log\left(u\sqrt{B} + \sqrt{(A+Bu^2)}\right)$$

e perciò ai limiti $u = 0$, $u = 1$

$$4 S_1 = \frac{5a^2 (k-k_1)}{2kk_1} \left(\sqrt{(A+B)} + \frac{A}{\sqrt{B}} \log\left(\frac{\sqrt{B} + \sqrt{(A+B)}}{\sqrt{A}}\right) \right)$$

Tal' è la lunghezza della sviluppata nel piano.

Per gli archi delle curve di projezione nei tre piani ortogonali, si avrebbero ad integrare, le tre espressioni differenziali

$$\sqrt{(dX^2 + dY^2)} = \frac{5a^3 (k - k_1)^2}{k^2 k_1^2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \sqrt{(1 - 3 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta)}$$

$$\sqrt{(dX^2 + dZ^2)} = \frac{5a^2 (k - k_1)}{kk_1} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 (k - k_1)^2}{k^2 k_1^2} \cos^6\theta\right)}$$

$$\sqrt{(dY^2 + dZ^2)} = \frac{5a^2 (k - k_1)}{kk_1} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 (k - k_1)^2}{k^2 k_1^2} \operatorname{sen}^6\theta\right)}$$

La prima s'integra per logaritmi, e le altre due s'integrano con le funzioni ellittiche: denotando con s_1, s_2, s_3 gli archi di queste tre curve, e ponendo in tutte e tre $\cos 2\theta = u$, avremo respettivamente

$$s_1 = \frac{5a^3 (k - k_1)^2}{8k^2 k_1^2} \int du \sqrt{\left(1 + 3u^2\right)}$$

$$s_2 = \frac{5a^2 (k - k^1)}{4kk_1} \int du \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 (k - k_1)^2}{8k^2 k_1^2} (1 + u)^3\right)}$$

$$s_3 = \frac{5a^2 (k - k_1)}{4kk_1} \int du \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 (k - k_1)^2}{8k^2 k_1^2} (1 - u^3\right)}$$

Per la prima integrando fra i limiti $u = 0$, $u = 1$, avremo come sopra

$$4s_1 = \frac{5a^3 (k - k_1)^2}{2k^2 k_1^2} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log (\sqrt{3} + 2)\right)$$

Nelle altre due facendo respettivamente $1 + u = v$, ed $1 - u = v$, l' integrazione dipenderà dai trascendenti ellittici di prima e seconda specie, e che potrebbero essere ambedue riportate all' integrazione di una formola esaminata da *Legendre* (Exercices de calcul tom. I°. pag. 55.) e che per brevità tralasciamo di sviluppare.

7° Volendo ora determinare l' equazione della *Superficie polare* proveniente dal movimento del piano normale avremo a prendere le due equazioni, una appartenente al piano normale, e l'altra al piano normale successivo, vale a dire

$$(X - x)\, dx + (Y - y)\, dy + (Z - z)\, dz = 0$$

$$(X - x)\, d^2x + (Y - y)\, d^2y + (Z - z) d^2z - ds^2 = 0$$

e sostituire in esse i valori di $x, y, z\ dx, dy, dz, ds$ in funzione dell' angolo θ, e l' eliminazione di questo fra le due dette equazioni produrrà un' equazione fra le

X, Y, Z ed appartenente alla superficie polare. Richiamando i valori di x, y, z, e di dx, dy, dz di sopra riportati, e sostituiti nella prima di queste due equazioni si avrà

$$kk_1(\mathrm{Y}\cos\theta - \mathrm{X}\,\mathrm{sen}\,\theta) + a(k-k_1)\,\mathrm{Z}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{a^3(k-k_1)}{2kk_1}(k_1\cos^2\theta + k\,\mathrm{sen}^2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

La seconda si ottiene pure dalla derivazione di questa rapporto all' angolo θ; per cui il discriminante nullo rapporto ad una qualche funzione dell' angolo θ di quest' ultima equazione, rappresenterà l' equazione della superficie polare: così sostituendo nuovamente i valori di sen θ cos θ in funzione dell' ascissa z, si ottiene un' equazione irrazionale di secondo grado rapporto a z, la quale, resa razionale, ascenderà all'ottavo grado rapporto alla z, ed il discriminante nullo di quest' equazione di ottavo grado rappresenterà l'equazione della superficie polare : noi tralasciamo una tal ricerca come di troppo complicata. Egual difficoltà presenta il determinare l' equazione della superficie sviluppabile proveniente dal movimento del piano osculatore: infatti per l'equazione di questo piano abbiamo

$$(\mathrm{X}-x)(dyd^2z - dzd^2y) + (\mathrm{Y}-y)(dzd^2x - dxd^2z) + (\mathrm{Z}-z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0$$

dalla quale per i valori dei coefficienti di sopra espressi per U, V, W ricaveremo

$$a(k-k_1)(\mathrm{X}\cos^3\theta - \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}^3\theta) = a^2(k-k_1)(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) + kk_1(z-\mathrm{Z})$$

Di più dai valori di cos θ, sen θ come al N°. 2°. abbiamo

$$a^2(k-k_1)\cos^2\theta = k(a^2 - 2k_1z)$$

$$a^2(k-k_1)\,\mathrm{sen}^2\theta = k_1(2kz - a^2)$$

per cui

$$a^2(k-k_1)(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) = a^2(k+k_1) - 4kk_1z$$

quali valori sostituiti nella precedente equazione porgono

$$\sqrt{k^3}.\sqrt{(a^2-2k_1z)^3}.\,\mathrm{X} - \sqrt{k_1^3}\sqrt{(2kz-a^2)^3}.\mathrm{Y}$$
$$= a^2\left(a^2(k+k_1) - kk_1\mathrm{Z} - 3kk_1z\right)\sqrt{(k-k_1)}.$$

Togliendo i radicali, l' equazione si eleva al sesto grado rapporto a z: infatti avremo primieramente dall' elevazione al quadrato.

$$k^3(a^2-2k_1z)^3\mathrm{X}^2 + k_1^3(2kz-a^2)^3\mathrm{Y}^2 - 2\sqrt{k^3k_1^3}\sqrt{(a^2-2k_1z)^3}\sqrt{(2kz-a^2)^3}\mathrm{XY}$$
$$= a^4(k-k_1)\left(a^2(k+k_1) - kk_1\mathrm{Z} - 3kk_1z\right)^2$$

dalla quale si ricaverà nuovamente l'equazione

$$\left(k^3(a^2-2k_1z)^3X^2+k_1^3(2kz-a^2)^3Y^2-a^4(k-k_1)\left(a^2(k+k_1)-kk_1Z-3kk_1z\right)^2\right)^2$$
$$=4k^3k_1^3(a^2-2k_1z)^3(2kz-a^2)^3X^2Y^2$$

che ascende al sesto grado rapporto alla z. Il discriminante si ottiene dall' eliminazione delle due equazioni derivate rapporto alla z, una delle quali si riporterà all'equazione di sesto grado a radici reciproche della precedente; ma egualmente tralasciamo una tal ricerca come di troppo complicata.

8.° Difficoltà somiglianti provenienti dalla teorica dell' eliminazione si presentano nella determinazione della linea *luogo geometrico dei centri di curvatura*. Ritenute le denominazioni di sopra stabilite è noto, che chiamando X, Y, Z le coordinate del centro di curvatura corrispondenti al punto (x, y, z) della linea data, si avrà

$$X-x=\frac{(Vdz-Wdy)ds^2}{U^2+V^2+W^2}, \qquad Y-y=\frac{(Wdx-Udz)\,ds^2}{U^2+V^2+W^2}$$

$$Z-z=\frac{(Udy-Vdx)\,ds^2}{U^2+V^2+W^2}$$

Ora sostituendo in queste equazioni i valori di sopra ritrovati per dx, dy, dz, ds, U, V, W, si otterranno per X, ed Y due equazioni di nono grado rapporto a cos θ, sen θ come per la Z si otterrà un'equazione di sesto grado relativamente o a cos θ, o a sen θ priva delle potenze impari: perciò l' equazioni nella linea luogo geometrico dei centri di curvatura dipenderanno dall' eliminazione di un' incognita, fra due equazioni una di sesto, e l' altra di nono grado, il che ci basti di aver qui indicato.

9.° Dai valori generali di X, Y, Z determinati dalle precedenti equazioni se ne deducono mediante la differenziazione i valori di dX, dY, dZ il che ci porge l'elemento dS della linea dei centri di curvatura, vale a dire

$$dS=\sqrt{(dX^2+dY^2+dZ^2)}$$

Ora come fa vedere il Sig. *De Saint-Venant* nella sua Memoria più volte citata si ha generalmente

$$dS=\sqrt{\left(\frac{\rho ds}{\rho_1}\right)^2+d\rho^2}=\frac{Rds}{\rho_1}$$

ove ρ_1, è il raggio di flessione, ed R il raggio della sfera osculatrice. Ora tanto R, ρ_1 quanto ds sono tutti espressi per le formole di sopra stabilite in funzioni

dell' angolo θ, e $d\theta$: fatte tutte le indicate sostituzioni nel secondo membro di dS, il valore di S dipenderà da un' integrale ultra ellittico.

10.° Prendiamo per un' altra applicazione la curva che dal Sig. Booth vien chiamata *Ellisse logaritmica* proveniente dall' intersezione di un cilindro ellittico, e di un paraboloide di rivoluzione aventi il medesimo asse. Sè come si è praticato nell' esempio precedente, l' asse delle z sia l' asse comune alle due superficie, avremo le due equazioni simultanee

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \qquad x^2+y^2=2hz$$

ove a, b sono i due semiassi principali dell' ellisse e $2h$ il parametro della parabola: prendendo nell' ellisse

$$x=a\cos\theta\,,\quad y=b\,\text{sen}\,\theta$$

si avrà

$$2hz=a^2\cos^2\theta+b^2\,\text{sen}^2\theta$$

e quindi per la differenziazione

$$dx=-a\,\text{sen}\,\theta d\theta\,,\qquad dy=b\cos\theta d\theta$$

$$hdz=-(a^2-b^2)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta d\theta$$

d'onde per l'elemento ds dell' ellisse logaritmica si ottiene

$$ds=\frac{d\theta}{h}\sqrt{\left(b^2h^2+(a^2-b^2)(h^2+a^2-b^2)\,\text{sen}^2\theta-(a^2-b^2)^2\,\text{sen}^4\theta\right)}$$

L' arco s come già feci vedere in altra Memoria dipende da integrali riducibili ai trascendenti ellittici. Proseguendo la differenziazione nei valori di dx, dy, dz con ritenere θ per variabile indipendente, ricaviamo

$$d^2x=-a\cos\theta d\theta^2\,,\quad d^2y=-b\,\text{sen}\,\theta d\theta^2$$

$$hd^2z=-(a^2-b^2)(\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta)\,d\theta^2$$

Similmente da altra differenziazione

$$d^3x=a\,\text{sen}\,\theta d\theta^3,\quad d^3y=-b\cos\theta d\theta^3$$

$$hd^3z=4\,(a^2-b^2)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta d\theta^3$$

Con i ritrovati valori di dx, d^2x . . . potremo calcolare le quantità di sopra notate per U, V, W.

11° Riprendendo infatti i valori generali di U, V, W riportati al N°. 3, si troverà pel nostro caso

$$U = -\frac{b(a^2-b^2)}{h}\cos^3\theta\, d\theta^3, \quad V = \frac{a(a^2-b^2)}{h}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta^3, \quad W = ab\, d\theta^3$$

Di qui otterremo

$$U^2+V^2+W^2 = \frac{d\theta^6}{h^2}\left(a^2b^2h^2 + a^2(a^2-b^2)^2\operatorname{sen}^6\theta + b^2(a^2-b^2)^2\cos^6\theta\right)$$

Osservando inoltre che il valore di ds si potrà anche porre sotto la forma

$$ds = \frac{d\theta}{h}\sqrt{\left(b^2h^2 + h^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\theta + (a^2-b^2)^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right)}$$

si avrà per il raggio di curvatura ρ, o per il raggio del circolo osculatore alla curva, come nel citato N°. 3.

$$\rho = \frac{(b^2h^2 + h^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\theta + (a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{h^2(a^2b^2h^2 + a^2(a^2-b^2)^2\operatorname{sen}^6\theta + b^2(a^2-b^2)^2\cos^6\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

Facendo successivamente $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ abbiamo i due raggi di curvatura nei due punti dell' ellisse logaritmica, corrispondenti ai vertici dell' ellisse sopra cui poggia il cilindro, e saranno

$$\rho' = \frac{b^2h}{\sqrt{a^2h^2+(a^2-b^2)^2}}, \qquad \rho'' = \frac{b^3h}{a\sqrt{b^2h^2+(a^2-b^2)^3}}$$

e che si potrebbero chiamare i semiparametri dell' ellisse logaritmica. Differenziamo i valori di U, V, W, sarà

$$dU = \frac{3b(a^2-b^2)}{h}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta^4$$

$$dV = \frac{3a(a^2-b^2)}{h}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta^4, \quad dW = 0.$$

d'onde la quantità di sopra notata per S, cioè

$$S = -dUd^2x - dVd^2y - dWd^2z$$

diverrà

$$S = \frac{3ab(a^2-b^2)}{h}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta^6$$

Ora nel citato N°. 3, si ha per il raggio di flessione

$$\rho_1 = \frac{U^2 + V^2 + W^2}{S}$$

e perciò otterremo dalla sostituzione

$$\rho_1 = \frac{a^2b^2h^2 + a^2(a^2 - b^2)^2 \operatorname{sen}^6\theta + b^2(a^2 - b^2)^2 \cos^6\theta}{3abh(a^2 - b^2) \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$$

Ove i due raggi ρ, ρ_1 potrebbero anche esprimersi in funzione di una qualunque delle tre coordinate x, y, z. È noto che determinati i valori dei raggi ρ, ρ_1 delle due curvature; si potrebbe per mezzo di essi giungere al valore del raggio di curvatura sferica; ma nelle applicazioni riuscirà più comodo di farlo dipendere dalle coordinate del centro di curvatura sferica, come verremo ora a ricercare.

12.° Ritenute le denominazioni di sopra stabilite ricaviamo dal valore di ds, per la differenziazione

$$dsd^2s = \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta^3}{h^2}\left((a^2 - b^2)h^2 + (a^2 - b^2)^2(\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u)\right)$$

Di qui richiamando le formole (2) del N°. 4, che ci porgono le coordinate del centro di curvatura sferica avremo per le ascisse z, Z,

$$W = abd\theta^3,\ dW = 0,\ \text{e quindi}$$

$$Z - z = \frac{1}{h}\left((h^2 + a^2 - b^2)\cos^2\theta + (h^2 + b^2 - a^2)\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

Sostituendoci i valori $\cos^2\theta$, $\operatorname{sen}^2\theta$ in funzione nella z, si trova

$$h(Z - z) = h^2 - a^2 - b^2 + 4hz$$

ed insieme

$$hZ = h^2 - a^2 - b^2 + 5hz$$

Sono dunque le due coordinate z, Z esprimibili fra di loro per una equazione lineare. Per le altre due coordinate X, Y si trova dalle medesime formole (2) del N°. 4, per la sostituzione dei valori di U, V, dV, dW

$$X - x = -\frac{\cos\theta}{ah^2}\left(a^2h^2 + (a^2 - b^2)^2\cos^4\theta\right)$$

$$Y - y = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{bh^2}\left(b^2h^2 + (a^2 - b^2)^2\operatorname{sen}^4\theta\right)$$

nelle quali sostituito $x = a\cos\theta$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$, si avrà per le coordinate X, Y

$$X = -\frac{(a^2-b^2)^2}{ah^2}\cos^5\theta\,,\qquad Y = -\frac{(a^2-b^2)^2}{bh^2}\mathrm{sen}^5\theta$$

Con i valori di X, Y, Z resta determinato il luogo geometrico dei centri di curvatura sferica, o ciò che torna lo stesso, la linea di regresso della superficie polare nella ellisse logaritmica.

13.° Per conoscere le projezioni di questa curva nei tre piani coordinati, si avranno a fare delle combinazioni binarie fra i tre valori di X, Y, Z, così da X, e da Y ricaviamo senza difficoltà

$$\left(\frac{ah^2X}{(a^2-b^2)^2}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{bh^2Y}{(a^2-b^2)^2}\right)^{\frac{2}{5}} = 1 \qquad (1)$$

Togliendo i radicali si giungerebbe ad un' equazione di grado decimo, per cui la curva projezione nel piano x, y appartiene al decimo ordine: la stessa (1) appartiene pure ad un cilindro avente la medesima curva per direttrice, e per asse quello delle z. Per le altre due projezioni osserviamo primieramente che per il valore di z in funzione dell' angolo θ come al N°. 10, si trae

$$(a^2-b^2)\cos^2\theta = 2hz - b^2,\quad (a^2-b^2)\,\mathrm{sen}^2\theta = a^2 - 2hz$$

Di qui elevando al quadrato i valori di X, Y abbiamo egualmente

$$a^2h^4(a^2-b^2)X^2 = (a^2-b^2)^5\cos^{10}\theta = (2hz-b^2)^5$$

$$b^2h^4(a^2-b^2)Y^2 = (a^2-b^2)^5\,\mathrm{sen}^{10}\theta = (a^2-2hz)^5$$

Di più dal valore di Z espresso per z, si trae

$$5\,(a^2-2hz) = 3a^2 - 2b^2 + 2h^2 - 2hZ$$

$$5\,(2hz-b^2) = 2a^2 - 3b^2 - 2h^2 + 2hZ$$

d' onde otteniamo le due equazioni

$$5^5.\,a^2h^4(a^2-b^2)X^2 = (2a^2 - 3b^2 - 2h^2 + 2hZ)^5$$

$$5^5.\,b^2h^4(a^2-b^2)Y^2 = (3a^2 - 2b^2 + 2h^2 - 2hZ)^5$$

le quali appartengono alle projezioni della linea di regresso nei piani xz, yz, e che come ognuno vede sono due curve del quinto ordine: poniamo per brevità

$$2a^2 - 3b^2 - 2h^2 = 2hA\,,\quad 3a^2 - 2b^2 + 2h^2 = 2hB$$

esse divengono

$$5^5\, a^2\, (a^2 - b^2)\, X^2 = 32h\, (A + Z)^5$$

$$5^5\, b^2\, (a^2 - b^2)\, Y^2 = 32h\, (B - Z)^5$$

Sommandole con sviluppare le potenze quinte otterremo la nuova equazione

$$5^5 a^2 (a^2 - b^2) X^2 + 5^5 b^2 (a^2 - b^2) Y^2 - 32h (A^5 + B^5)$$
$$= 5.32h \Big((A^4 - B^4) Z + 2 (A^3 + B^3) Z^2 + 2 (A^2 - B^2) Z^3 + A + B) Z^4 \Big)$$

la quale appartiene ad una superficie di quarto ordine: possiamo dunque enunciare che la linea dei centri di curvatura sferica dell' ellisse logaritmica proviene dall' intersezione di un cilindro di decimo ordine, e di equazione (1); e della ritrovata superficie di quart' ordine aventi il medesimo asse. Nella riportata equazione di quarto grado, tanto le somme delle potenze, quanto la differenza di A, e B sono divisibili per $A + B = \dfrac{3\, (a^2 - b^2)}{h}$: d' onde tutti i termini dell' equazione saranno divisibili per $a^2 - b^2$. Riprendendo infine i valori delle tre differenze

$$X - x\,,\ Y - y\,,\ Z - z$$

in funzion dell' angolo θ, come al N°. 12: e facendo la somma dei quadrati si otterrebbe il raggio R della sfera osculatrice, e che per brevità tralasciamo di trascrivere.

14°. Sarà ora facile dalle precedenti equazioni calcolare l' elemento della nostra curva, e delle sue projezioni nei tre piani coordinati, onde riconoscere da quai trascendenti dipenda la loro rettificazione. A questo oggetto riprese l'equazioni

$$X = -\frac{(a^2 - b^2)^2}{ah^2} \cos^5\theta\,, \qquad Y = -\frac{(a^2 - b^2)^2}{bh^2} \operatorname{sen}^5\theta$$

$$hZ = h^2 - a^2 - b^2 + 5hz\,, \quad 2hz = a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

avremo facilmente

$$dX = -\frac{5\, (a^2 - b^2) \cos^3\theta dz}{ah}\,, \qquad dY = \frac{5\, (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^3\theta dz}{bh}$$

$$dZ = 5dz\,, \quad hdz = -(a^2 - b^2) \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta$$

dalle quali pure eliminando $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$, sarà

$$dX^2 = \frac{25 b^2 (2hz - b^2)^3 dz^2}{a^2 b^2 h^2 (a^2 - b^2)}\,, \qquad dY^2 = \frac{25 a^2 (a^2 - 2hz)^3\, dz^2}{a^2 b^2 h^2 (a^2 - b^2)}\,, \qquad dZ^2 = 25 dz^2$$

Formando con queste tre espressioni, l'elemento dS_1 della curva vale a dire

$$dS_1 = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}$$

si vede che il coefficiente di dz è un radicale di secondo ordine contenente un quadrinomio di terzo grado rispetto alla z, sarà dunque l'integrale S_1 riducibile ai trascendenti ellittici: nella stessa guisa per le tre curve di projezione, gli elementi ds_1, ds_2, ds_3 saranno

$$ds_1 = \sqrt{(dX^2 + dY^2)}\,, \quad ds_2 = \sqrt{(dX^2 + dZ^2)}\,, \quad ds_3 = \sqrt{(dY^2 + dZ^2)}$$

e sostituiti i valori in funzione di z, e dz, i coefficienti di dz sono tre radicali di quadrinomi di terzo grado rispetto alle z, per cui la rettificazione di queste curve dipenderà egualmente dai trascendenti ellittici. Nel primo esempio da noi scelto, e relativo all'intersezione di un cilindro circolare con un paraboloide ellittico furono indicate nei N^i. 7°, ed 8° quali fossero l'equazioni generali, dalle quali dipendano, la superficie polare, la superficie proveniente dal movimento del piano osculatore, e la linea luogo geometrico dei centri di curvatura: e fù veduto che i problemi si riducevano all'eliminazione di una incognita fra due equazioni di grado elevato, il che rende assai complicate l'equazioni risultanti di quelle date superficie e linee. Queste difficoltà quasi nello stesso grado si riproducono, volendo fare indagini somiglianti per l'ellisse logaritmica, per cui basti di aver qui indicato questa ulteriore applicazione.

15.° L'analogia che passa fra l'ellisse, e l'iperbola, ci porge subito l'idea della curva proveniente dall'intersezione di un cilindro iperbolico, e di una paraboloide di rivoluzione con lo stesso asse: questa nuova curva si potrà chiamare *Iperbola logaritmica* conforme alle denominazioni usate dal Sig. *Booth:* come è chiaro l'equazioni simultanee sono

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad x^2 + y^2 = 2hz$$

Per l'iperbola come è noto si prende

$$x = a \sec \theta\,, \quad y = b \operatorname{tang} \theta$$

d'onde per la terza coordinata

$$2hz \cos^2\theta = a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Senza riportare tutte le operazioni del calcolo, e se è permesso di estendere l'analogia di queste due curve come si fà nell'ellisse, e nell'iperbola per la mutazione

di $-b^2$ in luogo di b^2, potremo dire che per la *linea di regresso* dell' *iperbola logaritmica* avremo le tre equazioni

$$X = -\frac{(a^2+b^2)^2}{ah^2}\sec^5\theta\ , \qquad Y = -\frac{(a^2+b^2)^2}{bh^2}\tang^5\theta$$

$$hZ = h^2 - a^2 + b^2 + 5hz$$

Di qui per le tre curve di projezione nei tre piani coordinati s' incontreranno curve analoghe, e dello stesso ordine a quelle ritrovate per l'ellisse logaritmica. La rettificazione di tutte le indicate curve dipenderà pure dai trascendenti ellittici. Infine tutti i risultati ottenuti per l' ellisse logaritmica, potranno con la convenevole modificazione adattarsi all' Iperbola logaritmica.

16.° Facendo intersecare un cilindro ellittico con una sfera concentrica, si ottiene una curva conosciuta sotto il nome di *Ellisse sferica,* della quale le sue projezioni nei tre piani coordinati sono incluse nelle due equazioni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ , \qquad x^2+y^2+z^2=r^2$$

L' ellisse sferica, o più generalmente una conica sferica proviene ancora dall' intersezione di un cono di secondo grado con una sfera concentrica; e le proprietà di questa curva unitamente ad altre curve sferiche furono già da me sviluppate in diverse precedenti Memorie, nelle quali mi proposi di rintracciarne la rettificazione, e la curvatura delle dette linee: ci basterà rammemorare, che la rettificazione dell'ellisse sferica dipende da un trascendente ellittico di terza specie: determinai i raggi delle due curvature, ed era facile il concludere che per tutte le curve sferiche il raggio della sfera osculatrice coincide con il raggio della sfera ove si trovano descritte. (Vedasi una mia Memoria pubblicata nel 1849 nelle Memorie della Società Italiana, e ristampata nel tom. 1° Annali di Scienze Matematiche e Fisiche 1850: vedasi pure un' altra mia Memoria pubblicata nel giornale Arcadico nel 1845, ed una pubblicata negli Atti dell' Accademia de' nuovi Lincei pel 1852).

17.° Considerando altre curve indicate dal Sig. *Booth,* si prenda un paraboloide ellittico, ed una sfera avente il medesimo asse con l' origine al vertice del paraboloide, avremo le due equazioni

$$\frac{x^2}{k}+\frac{y}{k_1}=2z\ , \qquad x^2+y^2+z^2=2rz$$

La curva proveniente dall' intersezione di queste due superficie, essendo una curva

*

sferica, si avrà per le coordinate della linea di regresso, e per il raggio della sfera osculatrice

$$X = 0 , \quad Y = 0 , \quad Z = r = R$$

come deve essere nelle curve sferiche: riassumendo l' equazioni delle due superficie, è evidente che i valori delle x, y, z atti a verificarle saranno

$$x = \sqrt{2kz} . \cos \theta , \qquad y = \sqrt{2k_1 z} . \operatorname{sen} \theta$$

$$z = 2 (r - k + k \operatorname{sen}^2\theta - k_1 \operatorname{sen}^2\theta)$$

dalle quali si trae egualmente

$$2 (k - k_1) \operatorname{sen}^2\theta = z - 2r + 2k , \qquad 2 (k - k_1) \cos^2\theta = 2r - 2k_1 - z$$

La sostituzione di sen θ, cos θ nei valori di x, y, li renderà dipendenti dalla sola z: Così dalla differenziazione si ha

$$dx = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k - k_1)}} \frac{(r - k_1 - z)\, dz}{\sqrt{(2rz - 2k_1 z - z^2)}} , \qquad dy = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{(k - k_1)}} \frac{(z - r + k)\, dz}{\sqrt{(z^2 - 2rz + 2kz)}}$$

$$dz = 4 (k - k_1) \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$$

Formando ora per il valore dell' elemento ds dell' arco, l' equazione

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

porge a riduzioni eseguite

$$ds = 2d\theta . \frac{\sqrt{(k_1 (r - k)^2 \cos^2\theta + k (r - k_1)^2 \operatorname{sen}^2\theta)}}{\sqrt{((r - k) \cos^2\theta + (r - k_1) \operatorname{sen}^2\theta)}}$$

L' integrale dipende dai trascendenti ellittici, per il quale ci dispensiamo di riportarne le riduzioni date dalla trasformazione della variabile.

18.° La successiva differenziazione dei valori di dx, dy, dz, ci porgerà i valori delle quantità che nel parag. 3° abbiamo notato con U, V, W e che occorrono nelle espressioni dei raggi delle due curvature, e nelle equazioni dalle quali dipende il luogo geometrico dei centri di curvatura: così se per brevità si ponga

$$M = 2rz - 2k_1 z - z^2 , \qquad N = z^2 - 2rz + 2kz$$

si troverà

$$d^2x = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k-k_1)}}\left(\frac{(r - k_1 - z)\, d^2z}{\sqrt{M}} - \frac{(r - k_1)^2\, dz^2}{\sqrt{M^3}}\right)$$

$$d^2y = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{(k-k_1)}}\left(\frac{(z - r + k)\, d^2z}{\sqrt{N}} - \frac{(r - k)^2\, dz^2}{\sqrt{N^3}}\right)$$

Di qui per i valori di U, V, W, otterremo primieramente

$$U = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{(k-k_1)}}\left(\frac{(r - k)^2\, dz^3}{\sqrt{N^3}}\right), \qquad V = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k-k_1)}}\left(\frac{(r - k_1)^2\, dz^3}{\sqrt{M^3}}\right)$$

$$W = \frac{\sqrt{kk_1}}{k - k_1}\left(\frac{(r - k_1)^2\,(z - r + k)}{\sqrt{N}\,.\,\sqrt{M^3}} - \frac{(r - k)^2 (r - k_1 - z)}{\sqrt{M}\,.\,\sqrt{N^3}}\right) dz^3$$

Se successivamente si sostituiscano i valori di z, dz in funzione dell' angolo θ, e nuovamente ancora si riproducano i valori di $\operatorname{sen}^2\theta$, $\cos^2\theta$ espressi per z, otterremo a tutte riduzioni eseguite

$$U = \frac{64\,(k - k_1)\,(r - k)^2\,\sqrt{k_1}\,\cos^3\theta\, d\,\theta^3}{\sqrt{8z^3}}$$

$$V = \frac{-64\,(k - k_1)\,(r - k_1)^2\,\sqrt{k}\,\operatorname{sen}^3\theta\, d\,\theta^3}{\sqrt{8z^3}}$$

$$W = \frac{64\,\sqrt{kk_1}}{8z}\Big((2r - k - k_1)\, z - 3\,(r - k)\,(r - k_1)\Big) d\theta^3$$

Facendo la somma dei quadrati e sostituendo i valori delle potenze pari di $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ in funzione della z, si troverà

$$\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)} = \frac{8\, d\,\theta^3}{\sqrt{z^3}}\sqrt{(Az^3 + Bz^2 + Cz + D)}$$

ove si è posto

$$A = (r - kk_1)^2, \qquad B = -6r\,(r - k)\,(r - k_1)\,(r^2 - kk_1)$$

$$C = 3\,(r - k)^2\,(r - k_1)^2\,(4r^2 - kk_1), \qquad D = -8r\,(r - k)^3\,(r - k_1)^3$$

Resta a calcolarsi la quantità denotata per S, vale a dire

$$S = -dUd^2x - dVd^2y - dWd^2z$$

Eseguite le differenziazioni di U, V, W, si avrà per la sostituzione, e riduzione

$$S\,.\,z^3 = -6\,.\,64\,(k - k_1)\,(r - k)^2\,(r - k_1)^2\,\sqrt{kk_1}\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\, d\,\theta^6$$

Tutti i riportati valori di U, V, W, e di S son quelli che ci daranno i raggi ρ, ρ_1 delle due curvature: di più sostituiti nell' equazioni riportate al N°. 8°. si otterrebbero le coordinate X, Y, Z, dei centri di curvatura espresse in funzione della coordinata z della linea data: Ma i risultati provenienti da tutte queste sostituzioni non sono suscettivi di riduzioni semplici il che ci basti di aver qui indicato.

19° Scegliendo per ultima applicazione la curva prodotta da un cono ellittico, e da un paraboloide circolare al comun vertice, o centro: potremo prendere con il Sig. *Booth,* le due equazioni della forma

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 4h^2z^2\,, \qquad x^2 + y^2 = 2hz$$

Otteniamo così per la projezione nel piano xy una curva di quart' ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

la quale come è noto rappresenta la projezione ortogonale del centro dell' ellisse di semiassi a, b sulle sue tangenti. Eliminando di più successivamente la y, e la x, avremo le due curve di secondo grado per projezioni nei piani xz, ed yz di equazioni

$$(a^2 - b^2)\,x^2 = 2h\,(2hz^2 - b^2z)\,, \qquad (a^2 - b^2)\,y^2 = 2h\,(a^2z - 2hz^2)$$

nelle quali per $a > b$ la prima apparterrà ad un' iperbola, e la seconda ad un' ellisse. Prendendo la z per variabile indipendente si ha dalla differenziazione

$$(a^2 - b^2)\,x\mathrm{d}x = h\,(4hz - b^2)\,\mathrm{d}z\,, \qquad (a^2 - b^2)\,y\mathrm{d}y = h\,(a^2 - 4hz)\,\mathrm{d}z.$$

Formando con dx, dy, dz, l' espressione

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}$$

e ridotta la quantità sotto il vincolo radicale ad una funzione di z, l' arco s dipenderà dagli integrali ultra ellittici: gli archi poi della curva projezione nel piano xz dipenderanno dagli integrali ellittci di prima, e terza specie come già da lungo tempo lo dimostrai per questa curva, e per altre somiglianti in una mia Memoria pubblicata nel giornale Arcadico nel 1844.

20° Supponendo sempre la z variabile indipendente avremo dalla differenziazione successiva

$$(a^2 - b^2)^2\,x^3\mathrm{d}^2x = -\,h^2b^4\mathrm{d}z^2\,, \qquad (a^2 - b^2)^2\,y^3\mathrm{d}^2y = -\,h^2a^4\mathrm{d}z^2$$

Di qui le quantità denotate di sopra per U, V, W divengono

$$U = -\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2y\,, \qquad V = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2x\,; \qquad W = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x$$

e si avrà dalla sostituzione

$$U = \frac{h^2 a^4 \, dz^3}{(a^2 - b^2)^2 y^3}, \qquad V = - \frac{h^2 b^4 \, dz^3}{(a^2 - b^2)^2 x^3}$$

$$W = \frac{4h^5 (3a^2 b^2 - 4h\,(a^2 + b^2)\,z\,)\,dz^3}{(a^2 - b^2)^3\, x^3 y^3}$$

Differenziando ancora i ritrovati valori delle U, V, W, si ricaverà

$$dU = - \frac{3h^3 a^4\,(a^2 - 4hz)\,dz^4}{(a^2 - b^2)^3 y^5}$$

$$dV = \frac{3h^3 b^4\,(4hz - b^2)\,dz^4}{(a^2 - b^2)^3 x^5}$$

$$dW = \frac{48h^5 z^3\,(4hz - b^2)\,(a^2 - 4hz)\,(h\,(a^2 + b^2)\,z - a^2 b^2)\,dz^4}{(a^2 - b^2)^5\, x^5 y^5}$$

A questi valori possiamo aggiungere, la quantità di sopra denotata per S, vale a dire

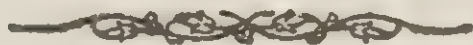
$$S = - dU\, d^2x - dV\, d^2y - dW\, d^2z$$

e che nel nostro caso diverrà

$$S = \frac{12h^7 a^4 b^4 z^2 .\, dz^6}{(a^2 - b^2)^5\, x^5 y^5}$$

Tali sono le formole preparatorie con le quali si può giungere ai valori dei raggi delle due curvature, ed al raggio di curvatura sferica: le medesime formole ci farebbero di più conoscere l' equazioni rappresentanti il luogo geometrico tanto dei centri di curvatura, quanto dei centri di curvatura sferica; aggiungiamo infine che le medesime formole ci porgerebbero l' equazioni dalle quali dipende la superficie polare, e la superficie proveniente dal movimento del piano osculatore. Ma tutte le ricerche qui indicate conducono, come nella maggior parte dei casi precedenti a risultati assai complicati, per cui cessiamo di farne uno sviluppo maggiore.

Roma 20 *Decembre* 1863.



INTORNO AD UN PROBLEMA INDETERMINATO

LETTERE INDIRIZZATE

DAL SIG. V. A. LE BESGUE

Professore onorario delle Facoltà delle Scienze di Bordeaux

E

DAL SIG. ANGELO GENOCCHI

Professore di Matematica nella Regia Università di Torino

A. D. B. BONCOMPAGNI.

Bordeaux, 25 Janvier 1864.

Monsieur le Prince

J'ajoute quelques mots à la note que j'ai envoyée hier à M. Eugène Janin pour vous être transmise.

1.° L' équation

$$x^3+(x+r)^3+\ldots+(x+(n-1)r)^3=(x+nr)^3$$

où x et r sont positifs n'est possible par $n=3$ et donne $x=3r$.

2.° La somme des cubes en progression arithmétique et au nombre de n se formule ainsi

Soit s la somme des racines des cubes extrêmes, et r la raison de la progression des racines, on aura

$$\frac{n}{8}\cdot s\,(s^2+(n^2-1)\,r^2)$$

pour la somme des n cubes.

3.° La résolution de l'équation

$$ns\,(s^2+(n^2-1)\,r^2)=8y^3$$

paraît présenter d'assez grandes difficultés. J'ignore s'il me sera possible de les lever.

La formule précédente pourrait être communiquée à M.r Angelo Genocchi, s'il ne l'a pas déjà trouvée de son côté. Il est expert en ces matières et pourrait s'occuper également de la résolution de l'équation précédente, en donnant à n les valeurs 3, 4, 5 ... l'équation étant impossible pour $n=2$ d'après le Th. de Fermat l'impossibilité de $x^3+y^3=z^3$).

Agréez, Monsieur le Prince, l'assurance de mon respect

V. A. Le Besgue.

Illustrissimo Signor Principe

Avendo avuto alcuni momenti d'ozio, mi sono occupato dell' equazione proposta dal sig. Le Besgue

$$ns\,(s^2+(n^2-1)\,r^2)=8y^3.$$

Fatto $s=rt$, $2y=rz$, dove t e z sono due nuove incognite, si trova

$$nt\,(t^2+n^2-1)=z^3$$

e questa è soddisfatta da $t=1$, $z=n$. Per iscoprire un' altra soluzione col metodo di Fermat, pongo $t=1+u$, $z=n+pu$, e ottengo

$$3n^2pu+3np^2u^2+p^3u^3=(2n+n^3)\,u+3nu^2+nu^3;$$

fo sparire la prima potenza di u, ponendo $3n^2p=2n+n^3$, onde $p=\dfrac{n^2+2}{3n}$;

indi dividendo per u^2, trovo $\qquad 3np^2+p^3u=3n+nu,$

e quindi $u=\dfrac{3n\,(1-p^2)}{p^3-n}$.

Adunque con queste formole dato n, si determina p, poscia u, da u si ricava t e da t si ricava s, e r.

Preso per esempio $n=3$, avremo $p=\frac{11}{9}$, $n=\frac{405}{107}$, $t=\frac{512}{107}$, $z=\frac{816}{107}$. Si potrà fare $s=512$, $r=107$, e chiamato x il primo termine della progressione si avrà

$$s=2x+(n-1)\,r,\ \text{e però}\quad x=\frac{512-2\,.\,107}{2}=149,\ y=\frac{rz}{2}=408:$$

dunque

$$149^3+256^3+363^3=408^3.$$

Per $n=4$, si avrà $p=\frac{3}{2}$, $u=24$, $t=25$, $z=40$, e fatto $s=25$, $r=1$, risulterà $x=\frac{25-3}{2}=11$, $y=20$, onde $11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$.

Preso $n=5$, si avrà $p=\frac{9}{5}$, $u=-\frac{525}{13}$, $t=-\frac{512}{13}$, $z=-\frac{880}{13}$; si potrà fare $s=-512$, $r=13$, $x=\frac{-512-4\,.\,13}{2}=-282$, $y=-440$, e quindi

$$-282^3-269^3-256^3-243^3-230^3=-440^3,$$

ossia

$$230^3+243^3+256^3+269^3+282^3=440^3.$$

Si potrà proseguire con altri valori di n.

L' equazione $nt\,(t^2+n^2-1)=z^3$ si può trasformare facendo $\dfrac{1}{n}=\alpha,\ \dfrac{1}{t}=\beta,\ \dfrac{z}{nt}=\gamma,$

nel qual modo essa diviene

$$\alpha^2+\beta^2-\alpha^2\beta^2=\gamma^3$$

Questa somministra $\beta^2=\frac{\gamma^3-\alpha^2}{1-\alpha^2}$: sicchè dato α trattasi di render un quadrato l'espressione $\frac{\gamma^3-\alpha^2}{1-\alpha^2}$ ovvero $\frac{n^2\gamma^2-1}{n^2-1}$ con un valor razionale di γ. L'equazione precedente si pone anche sotto la forma $(1-\alpha^2)(1-\beta^2)=1-\gamma^3$, e dato α si tratta di verificarla con valori razionali di β e di γ. E forse sotto queste forme sarà più facile di trovare la soluzione generale.

Nell' esporre secondo l' invito di V. S. Illma. tali osservazioni ho l'onore di confermarmi

Dell' Illma. S. V. Torino 13 febbr.° 1864.

Devmo Umilmo Servit.
Angelo Genocchi.

SULLA TEORIA DELLE CONICHE

NOTA

DEL PROF. L. CREMONA.

Scopo di quest' articolo è di indagare l' origine dell' apparente contraddizione che s' incontra nell' applicare la teoria generale delle curve piane alla ricerca delle coniche che soddisfano a cinque condizioni date (punti o tangenti) (*).

1. Le coniche descritte per quattro punti *abcd* formano un fascio, epperò una retta qualsivoglia L è da esse incontrata in coppie di punti, che sono in involuzione. In ciascuno de' due punti doppi dell' involuzione la retta L è toccata da una conica del fascio; in altre parole, le coniche passanti per tre punti dati *abc* e toccanti una data retta L formano una *serie d'indice* 2.

Le rette polari di un punto arbitrario *o* relative alle coniche della serie anzidetta inviluppano una conica (*Introd.* 84, b), ossia costituiscono una nuova serie d'indice 2. Le due serie, essendo projettive, generano colle scambievoli intersezioni degli elementi omologhi una curva del sesto ordine, luogo de' punti di contatto fra le rette tirate per *o* e le coniche della prima serie (*Introd.* 83, 85). Questa curva ha un punto doppio in *o*, a causa delle due coniche della serie che passano per questo punto; quindi una retta M condotta ad arbitrio per *o* tocca in altri quattro punti altrettante coniche della serie medesima.

2. Di qui si trae che le coniche descritte per due punti *ab* e toccanti due rette LM formano una serie d'indice 4. I punti *ab* e quelli ove la retta *ab* sega le LM determina un' involuzione, i cui punti doppi siano *ff'*. In essi incrociansi, com' è noto, tutte le corde di contatto delle coniche della serie colle tangenti LM. Se la corda di contatto dee passare per *f*, e la conica per un terzo punto *c*, il problema am-

(*) *Journal de Liouville,* avril 1861, p. 121. — *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* p. 65. — *Giornale di Matematiche di Napoli,* aprile 1863, p. 129.

mette due soluzioni, individuate dai punti doppi dell'altra involuzione che formano i punti *ac* con quelli comuni alla retta *ac* ed alle LM.

Dunque la suddetta serie di coniche d'indice 4 si compone di due distinte serie, ciascuna d'indice 2, corrispondenti ai due fasci di corde di contatto incrociate in f o in f' (*).

Le rette polari di un punto arbitrario u relative alle coniche di una qualunque delle due serie or nominate formeranno una nuova serie d'indice 2. La serie di coniche e la serie di rette, essendo projettive, generano un luogo del sesto ordine, che però è composto di una curva del quarto e della retta *ab* presa due volte. Infatti, se m è un punto di *ab*, ciascuna delle *due* coniche della serie passanti per m riducesi al sistema di due rette coincidenti in *ab*, e come tale è incontrata dalla retta *um* in due punti sovrapposti in m; dunque m conta *due* volte come punto di contatto fra le rette uscenti da u e le coniche della serie (d'indice 2) che si considera.

La curva del quart' ordine passa due volte per u; epperò una retta N condotta ad arbitrio per u toccherà altrove due coniche di quella serie, e similmente toccherà due coniche dell' altra serie. Dunque vi sono quattro coniche tangenti a tre rette date LMN e passanti per due punti dati *ab*.

3. Ciò torna a dire che le coniche descritte per un punto dato a e toccate da tre rette LMN formano una serie d'indice 4. Le rette polari di un punto i costituiranno un' altra serie dello stesso indice; e le due serie, perchè projettive, genereranno un luogo del dodicesimo ordine; il quale però si decomporrà in una curva del sesto ordine e nelle tre rette a (MN), a (NL), a (LM), ciascuna contata due volte. Ed invero se m è un punto di una di queste rette, per es. di a (MN), per m passano due sole (vedi l'annotazione a piè di pagina) *effettive* coniche della serie; ciascuna delle altre due coincide colla retta a (MN), risguardata come un sistema di due rette sovrapposte.

La curva del sesto ordine passa quattro volte per i; dunque una retta H arbitrariamente condotta per questo punto toccherà altrove due sole coniche della serie. Ossia, per un punto dato passano due sole coniche che tocchino quattro rette date.

4. Donde si ricava che le coniche tangenti a quattro rette date LMNH formano una serie d'indice 2. Questa essendo projettiva all'altra, dello stesso indice, formata dalle rette polari di un punto e, le intersezioni degli elementi corrispondenti genereranno un luogo del sesto ordine: il quale è composto di una curva del terzo e delle tre diagonali del quadrilatero completo LMNH. Infatti, se m è un punto di una diagonale, delle due coniche della serie passanti per m una sola è effettiva; l'altra riducesi alla diagonale medesima, considerata come un sistema di due rette coincidenti.

La curva del terz'ordine passa due volte per e; onde una retta arbitrariamente condotta per e toccherà (altrove) una sola conica della serie. Ossia, vi ha una sola conica tangente a cinque rette date.

Cornigliano (presso Genova), 4 agosto 1863.

(*) Se la retta *ab* passa pel punto LM, in questo coincide uno dei punti ff'; onde rimane soltanto la serie (d'indice 2.) di coniche corrispondente all'altro punto, che con LM divide armonicamente il segmento *ab*. Cioè, se la retta *ab* passa pel punto LM, vi sono due sole coniche (effettive) passanti per i punti *ab* e toccanti le rette LM ed una terza retta N.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Œuvres de Desargues réunies et analysées par **M. Poudra.** Deux tomes avec planches. Paris, Leiber éditeur, 1864.

Il signor Poudra, autore di un *Traité de Perspective-relief* (1), che ebbe gli incoraggiamenti dell'Accademia francese, in seguito a un dotto rapporto dell'illustre Chasles, si è reso ora vieppiù benemerito per un' altra pubblicazione, che è della più alta importanza per la storia della scienza. Mi sia concesso tenerne parola, per annunziare la buona novella ai giovani studiosi della geometria.

Gerardo Desargues (nato a Lione nel 1593, morto ivi nel 1662) fu uno de' più acuti geometri che illustrassero quel secolo celebre pel risorgimento degli studi. Si occupò di geometria pura e delle sue applicazioni alle arti: e sempre con tale successo che gli uomini più eminenti, come Descartes, Fermat, Leibniz,... l'ebbero a lodare, e Pascal si gloriava d'aver tutto appreso da lui. Possedendo i processi della geometria descrittiva, scienza della quale il solo nome è moderno, Desargues mirava principalmente a dare regole semplici e rigorose agli artisti, a sollievo de' quali impiegava le sue invenzioni. Il suo genio superiore spiccava nel ridurre la moltitudine de' casi particolari a poche generalità. Se non che, i pedanti e gli invidiosi d'allora insorsero contro il novatore che, colla geometria pura, pretendeva farla da maestro ai vecchi pratici (2), e gli mossero acerba e lunga guerra con maligni libelli, che il tempo ci ha conservati, perchè attestassero da qual parte stava la verità.

Ei pare che gli scritti di Desargues consistessero quasi tutti in semplici memorie, esponenti idee nuove sulla scienza, e stampate in un solo foglio, senza nome di stampatore. Ed è a credersi che non siano mai stati messi in vendita e che l'autore li distribuisse ai suoi amici. Perciò essi divennero subitamente sì rari che indi a poco e sino ad oggi furono riguardati come perduti. Malgrado la menzione che ne è fatta nelle lettere di Descartes, nelle opere di Bosse (amico e discepolo di Desargues) ed altrove, il nome stesso dell'autore era pressochè dimenticato, quando il generale Poncelet ne risuscitò la memoria, designandolo come il Monge del secolo XVII. Anche il signor Chasles, nel suo *Aperçu historique,* assegnò a Desargues il posto glorioso che gli spetta.

Allo stesso Chasles toccò la buona sorte di trovare, nel 1845, presso un librajo di Parigi la copia, fatta dal geometra De la Hire, del trattato di Desargues sulle coniche. In seguito, il signor Poudra è riuscito a raggranellare gli altri scritti del medesimo, ad eccezione di una nota d'argomento meccanico, della quale non si conosce che un frammento, e di un altro lavoro, che alcuni autori chiamano *leçons de ténèbres* e di cui s'ignora il contenuto.

Questi scritti di Desargues, tolti all'obblio in che erano caduti; l'analisi che ne ha fatto il signor Poudra; e la riproduzione di notizie, frammenti, documenti, libelli,... per la completa illustrazione storica del soggetto: tutto ciò costituisce l'importante pubblicazione della quale facciamo parola, e nella quale dobbiamo ammirare la rara diligenza e il grande amore che hanno presieduto al compimento di sì nobile impresa.

L'opera consta di due tomi. Il primo contiene:

La biografia di Desargues;

Gli scritti di Desargues, cioè:

---

(1) Paris, Corréard éditeur, 1860. — (2) *Ce qui fait voir évidemment que ledit Desargues n'a aucune vérité à déduire qui soit soustenable, puis qu'il ne veut pas des vrays experts pour les matières en conteste, il ne demande que des gens de sa cabale, comme de purs géomètres, lesquels n'ont jamais eu aucune experience des règles des pratiques en question et...* (2 tomo, p. 401).

Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage, par G. D. L., Paris, 1636;

Brouillon proiect d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, par le sieur G. Desargues Lyonnois, Paris, 1639.

(A questo trattato sulle coniche tengono dietro una lettera ed un commento di De la Hire (1679) ed un piccolo frammento di una nota annessa che aveva per titolo: *Atteinte aux événemens des contrariétez d'entre les actions des puissances ou forces*).

Brouillon proiect d'exemple d'une manière universelle du s. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'esclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en perspective comme en géométral; et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil, Paris, 1640;

Manière universelle de poser le style aux rayons du soleil en quelque endroit possible, avec la règle, l'esquerre et le plomb, Paris, 1640;

Recueil de propositions diverses ayant pour titre: *Avertissement — Proposition fondamentale de la pratique de la perspective — Fondement du compas optique — 1e Proposition géométrique — 2e Proposition géométrique — 3e Proposition géométrique* (Extrait de la *Perspective* de Bosse, 1648);

Perspective adressée aux théoriciens, Paris, 1643;

Reconnaissances des Desargues placées en tête de divers ouvrages de Bosse;

Fragments de divers écrits et affiches publiés par Desargues.

Ciascuno de' trattati di Desargues è seguito da una chiara e sugosa analisi del signor Poudra.

Il secondo tomo contiene:

L'analisi delle opere di Bosse;

Notizie su Desargues estratte dalla *Vie de Descartes* par Baillet (Paris, 1691), dalle lettere di Descartes, dall' *Histoire littéraire de la ville de Lyon* par le P. Colonia (Lyon 1730) e dalle *Recherches pour servir à l'histoire de Lyon* par Pernetty (Lyon 1757);

Le notizie scientifiche estratte dal *Traité des propriétés projectives* di Poncèlet e dall'*Aperçu historique* di Chasles;

Notizie sulla *Perspective spéculative et pratique* d'Aleaume et Migon (Paris, 1643), sul P. Nicéron e su Gregorio Huret;

Estratti de' libelli contro Desargues.

In ciascuno de' suoi scritti Desargues si palesa profondo e originale; rinnovando i metodi e persino il linguaggio, audacemente si stacca dalla servile imitazione degli antichi; impaziente per l'abbondanza delle idee, si esprime con una grande concisione, che talvolta nuoce alla chiarezza. Non gli sfugge mai l'aspetto più generale delle quistioni che prende a trattare (1). Spesso non sa arrestarsi a dimostrare i suoi teoremi o a svilupparne le conseguenze, ma si limita a dichiarare che chiunque vorrà sbozzare la tal proposizione, potrà facilmente comporne un volume (2). Perciò egli diede ad alcuni de' suoi trattatelli il titolo bizzarro di *brouillon proiect*.

---

(1) *Quand il n'y a point icy d'avis touchant la diversité des cas d'une proposition, la démonstration en convient à tous les cas, sinon il en est icy fait mention pour avis* (1 t., p. 151) — *Cette démonstration bien entendue s'applique en nombre d'occasions, et fait voir la semblable génération de chacune des droites et des points remarquables en chaque espèce de coupe de rouleau, et rarement une quelconque droite au plan d'une quelconque coupe de rouleau peut avoir une propriété considérable à l'égard de cette coupe, qu'au plan d'une autre coupe de ce rouleau la position et les propriétez d'une droite, correspondante à celle-là, ne soit aussi donnée par une semblable construction de ramée d'une ordonnance dont le but soit au sommet du rouleau* (p.178). — *Il y a plusieurs semblables propriétez communes à toutes les espèces de coupe de rouleau qui seraient ennuyeuses icy* (p. 202). — *Semblable propriété se trouve à l'égard d'autres massifs qui ont du rapport à la boule, comme les ovales, autrement ellipses, en ont au cercle, mais il y a trop à dire pour n'en rien laisser* (p. 214). — (2) . . . *mais cecy peut suffire pour en ouvrir la minière avec ce qui suit* (p.157) — *On verra bientot en gros quelles espèces de conséquences et de convers vrayes s'en suivent pour le sujet de ce brouillon, et qui l'enflcrait trop pour les déduire au long* (p. 185). — *Dont la démonstration familière enflerait inutilement ce brouillon* (p.200) — *Et cette seule proposition fournirait de matière pour un livre entier à qui voudroit en bien éplucher toutes les conséquences évidentes de ce qui est démontré cy devant* (p. 224).

Per la novità e l' arditezza delle sue idee sull' infinito, per la generalità del suo metodo di cercare le proprietà delle coniche, Desargues non ha nulla di comune coi geometri che lo hanno preceduto (1), ma deve essere riguardato come l'iniziatore della geometria moderna. Egli considera una retta come estesa d'ambe le parti e le sue estremità come riunentisi all' infinito; ed anche, una retta come una circonferenza il cui centro sia a distanza infinita; le rette parallele come concorrenti in un punto all' infinito (2); ed i piani paralleli come aventi in comune una retta all'infinito. A questo proposito non dispiaccia di veder qui riportate le seguenti riflessioni dello stesso Desargues:

« *En géométrie on ne raisonne point des quantitez avec cette distinction, qu'elles existent ou bien effectivement en acte, ou bien seulement en puissance, n'y du général de la nature avec cette décision qu'il n'y ait rien en elle que l'entendement ne comprenne à propos de la droite infinie. L'entendement se sent vaguer en l'espace duquel il ne scait pas dabord s'il continue toujours ou s'il cesse de continuer en quelqu' endroit; afin de s'en éclaircir il raisonne par exemple en cette façon: ou bien l'espace continue toujours, ou bien cesse de continuer en quelqu'endroit; s'il cesse de continuer en quelqu'endroit, ou que ce puisse estre, l'imagination y peut aller en temps; or jamais l'imagination ne peut aller en aucun endroit de l'espace auquel cet espace cesse de continuer; donc l'espace et conséquemment la droite continue toujours. Le mesme entendement raisonne encore et conclud les quantitez si petites que leurs deux extremitez opposées sont unies entrelles, et se sent incapable de comprendre l'un et l'autre de ces deux espèces de quantitez sans avoir sujet de conclure que l'un ou l'autre n'est point en la nature, non plus que les propriétez qu'il a sujet de conclure de chacune encore qu'elles semblent impliquer, à cause qu'il ne scaurait comprendre comment elles sont telles qu'il les conclud par ses raisonnements.*»

Nella teoria delle coniche, Desargues non assume sempre il cono a base circolare, nè fa uso del triangolo per l'asse: ma e cono e piano segante, tutto è concepito da lui nella più grande generalità.

Le molte idee nuove da lui introdotte nella geometria gli diedero occasione d'inventare molti vocaboli nuovi. Per esempio: egli chiama *ordonnance* un fascio di rette situate in un piano e passanti per uno stesso punto *(but)*, o di piani passanti per una stessa retta *(essieu)*; *tronc* una retta punteggiata; *bornes* i quattro vertici di un quadrangolo completo; *bornale droite* uno qualunque de' sei lati; *couple de bornales droites* una coppia di lati opposti; ecc.

Il capolavoro di Desargues è il suo trattato delle coniche: *Brouillion proiect d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan.* Ivi è stabilita la teoria dell'involuzione (3), ch'egli definisce dietro il valor costante del prodotto de' segmenti compresi da due punti coniugati *(nœuds couplés)* col punto centrale *(souche)*; e ne trae le relazioni fra sei od otto segmenti determinati dai sei punti. Considera l' involuzione di cinque punti (un punto doppio e due coppie di punti coniugati) e l'involuzione di quattro punti (due punti doppi e due punti coniugati). Fa osservare che, se uno de' sei punti è all' infinito il suo coniugato è il centro dell'involuzione: ciò che riduce di nuovo questa a cinque punti. E dopo aver date molte formole relative alla divisione armonica (involuzione di quattro punti), enuncia la proposizione: se tre coppie di punti sono in involuzione, e se due di esse sono separatamente in involuzione con altre due, queste formeranno un'involuzione anche colla terza coppia.

Poi Desargues dimostra, per mezzo del teorema di Menelao (sul triangolo segato da una trasversale) che l' involuzione è una relazione projettiva, cioè che un fascio di rette passanti per sei punti in involuzione *(ramée)* è segato da una trasversale arbitraria in sei punti che sono pur essi in involuzione. Indi seguono le proprietà di un fascio armonico.

---

(1) *J'estime beaucoup M. Desargues et d'autant plus qu'il est lui seul inventeur de ses coniques* (Fermat). — (2) *Pour votre façon de considérer les lignes parallèles comme si elles s'assemblaient à un but à distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne* (Descartes). — (3) La parola *involution*, come esprimente la disposizione de' sei punti, è di Desargues. Egli chiama *arbre* la retta sulla quale sono situati i punti in involuzione.

Non solo la teoria dell'involuzione, ma quella eziandio de' poli e delle rette polari, rispetto ad una conica, è dovuta a Desargues. La polare di un punto dato è da lui chiamata *transversale de l'ordonnance* delle rette passanti pel punto medesimo. Lascia chiaramente intendere, benchè non lo dica in modo del tutto esplicito, che il centro della conica è il polo della retta all'infinito. Accenna che la polare taglia, tocca o non incontra la conica, secondo che il polo è fuori, sopra o entro la curva; e che la polare diviene un diametro, quando il polo è a distanza infinita.

Uno de' più bei teoremi dovuti a Desargues è il seguente: Se un quadrangolo è inscritto in una conica, una retta arbitraria taglia la curva ed i quattro lati del quadrangolo in sei punti in involuzione. Egli lo dimostra prima pel cerchio base del cono; poi per una sezione qualunque, mediante rette condotte dal vertice del cono ai punti della figura tracciata sul piano della base.

Dimostra inoltre che, se un quadrangolo completo è inscritto in una conica, i punti di concorso delle tre coppie di lati opposti formano un triangolo, ciascun vertice del quale è polo del lato opposto. Proposizione importantissima, che è la base della teoria de' triangoli coniugati.

Dalle cose premesse Desargues deduce che, come ogni punto del piano della conica data è polo di una retta determinata, viceversa ogni retta è polare di un certo punto; che ciascuna retta di un fascio è polare di un punto situato nella polare del centro del fascio, e che reciprocamente le polari de' punti di una retta passano pel polo di questa retta.

Enuncia il teorema che le coppie di poli reciproci situati in una retta data sono in involuzione. E qui osserva esservi due maniere di dimostrare questa verità: o sul piano del cerchio base del cono, ove la cosa è evidente per la perpendicolarità de' diametri alle loro ordinate, donde poi si conclude per una sezione qualunque, col mezzo di rette condotte dal vertice del cono; ovvero, la proprietà essendo evidente per un diametro qualunque, si conclude per qualsivoglia altra retta.

In seguito enuncia quest' altro teorema: se in una traversale data si considera l' involuzione de' poli reciproci, e se si congiunge un punto fisso della curva a due punti coniugati, i due nuovi punti in cui le congiungenti segano la conica sono in linea retta col polo della trasversale.

Ma la proposizione capitale, e che lo stesso Desargues dice essere *comme un assemblage de tout ce qui précède*, è la seguente:

« *Estant donné de grandeur et de position une quelconque coupe de rouleau à bord courbe pour assise ou base d'un quelconque rouleau, dont le sommet soit aussi donné de position, et qu'un autre plan, en quelconque position aussi donnée, coupe ce rouleau, et que l'essieu de l'ordonnance de ce plan de coupe avec le plan d'assiette soit aussi donné de position, la figure qui vient de cette construction en ce plan de coupe, est donnée d'espèce et de position; chacune de ses diametrales avec leur distinction de conjuguées et d'essieux, comme encore chacune des espèces de leurs ordonnées et des touchantes à la figure, et la nature de chacune, leurs ordonnances, avec les distinctions possibles sont donnez tous de génération et de position.*

La dimostrazione o soluzione di Desargues è semplice, elegante e generale. Egli determina anche gli assintoti della sezione ed osserva che ciascuno d'essi può essere considerato come un diametro coincidente col suo coniugato.

Seguono alcune proposizioni sul sistema di due circoli e di due coniche tagliate da una trasversale.

Indi Desargues deduce la costruzione del *parametro* relativo ad un dato diametro da una formola che è un'immediata conseguenza del teorema d'Apollonio (*Con.* III, 16-23) sul rapporto costante de' prodotti de' segmenti che una conica determina su due trasversali condotte in direzioni date per un punto arbitrario (1).

Definisce i fuochi come intersezioni dell'asse col circolo che ha per diametro la porzione di una tangente qualunque compresa fra le tangenti ne' vertici. Appoggia questa elegante costruzione alla proprietà

---

(1) Quella formola, generalizzata mediante la prospettiva, diviene il teorema di Carnot sui segmenti determinati nei lati di un triangolo da una linea del terz' ordine composta della conica data e di una retta qualsivoglia data.

che il rapporto de' segmenti intercetti fra i punti di contatto di due date tangenti parallele e le intersezioni di queste con una terza tangente qualunque è costante.

Stabilisce la teoria de' poli e de' piani polari relativi ad una sfera, e conchiude col dire che simili proprietà si trovano per altre superficie, le quali sono rispetto alla sfera ciò che le coniche sono rispetto al cerchio.

Ecco un altro teorema rimarchevolissimo di Desargues:

« Date due rette A, B, polari reciproche rispetto ad una conica data, si stabilisca in B un'involuzione di punti nella quale il punto AB sia coniugato al polo di A. Da un punto qualunque m di A si conducano due tangenti alla conica, le quali seghino B in n_1, n_2, e si uniscano i punti di contatto ad n'_1, n'_2, coniugati di n_1, n_2 nell'involuzione. Le due congiungenti incontrano A in uno stesso punto m', ed i punti m, m', variando insieme, generano un' involuzione » (1).

Da questo teorema Desargues conclude spontaneamente una bella regola per la costruzione dei fuochi della conica risultante dal segare con un dato piano un cono del quale sian dati il vertice v e la base. Per v si conduca un piano parallelo al dato, e siane A la traccia sul piano della base. Sia poi o il piede della perpendicolare calata da v sopra A, ed in questa retta si considerino i punti m, m' legati dalla relazione $mo.\ om' = \overline{ov}^2$. I punti m, m' generano un'involuzione, nella quale si possono determinare due punti coniugati (reali) μ, μ', i quali siano poli reciproci rispetto alla conica base. Condotta per m una tangente a questa conica, sia n il punto in cui essa sega la retta B che unisce uno de' punti μ, μ' al polo di A (relativo alla conica medesima). Il punto in cui questa conica è toccata dalla mn si unisca al punto m', e sia n' l' intersezione della congiungente colla retta B. I punti n, n' generano un'involuzione, i cui punti doppi uniti al vertice v danno due rette e queste incontreranno il piano dato nei fuochi della sezione che esso fa nel cono (2).

A buon dritto adunque il signor Poudra afferma che questo trattato delle coniche potrebbe essere studiato anche oggidì non senza frutto.

Nella *Proposition fondamentale de la pratique de la perspective,* Desargues dimostra quel teorema importantissimo che oggi si esprime dicendo che il rapporto anarmonico de' quattro punti in cui una trasversale qualunque sega un dato fascio di quattro rette è costante.

Le *Propositions géométriques* contengono i teoremi fondamentali sui triangoli e sui quadrangoli omologici.

Anche nelle opere di Bosse si incontrano molte idee originali di Desargues, e fra l' altre l'ingegnoso metodo per eseguire la prospettiva sopra qualunque superficie regolare o irregolare, semplice o composta; ed il concetto primo di costruire un bassorilievo come *prospettiva-rilievo* di un soggetto dato.

Possano queste mie disadorne parole invogliare gli amici della geometria a trarre profitto dall' eccellente pubblicazione del signor Poudra.

Bologna, 28 febbrajo 1864.

L. Cremona.

---

(1) Il teorema di Desargues può anche enunciarsi così: siano A, B, C tre rette formanti un triangolo coniugato ad una conica, ed in A si fissi un'involuzione nella quale siano coniugati i punti AB, AC; se da un punto qualunque m di A si tira una tangente alla conica, e il punto di contatto si unisce con m' coniugato di m nell' involuzione, questa congiungente e la tangente incontrano B o C in due punti, che variando simultaneamente generano un' involuzione. I punti doppi delle tre involuzioni in A, B, C sono i vertici di un quadrilatero completo circoscritto alla conica.

Se A è la retta all'infinito, e se l' involuzione in essa è determinata da coppie di rette perpendicolari, B e C saranno gli assi della conica, e si avrà il teorema notissimo: la tangente e la normale in un punto qualunque della conica dividono per metà gli angoli compresi dalle rette che congiungono questo punto ai due fuochi situati in uno stesso asse. — (2) Il polo di A unito ai punti μ, μ' dà la retta B ed un' altra retta C. Una di queste rette determina i fuochi reali, l' altra i fuochi imaginari della sezione.

LES SIGNES NUMÉRAUX ET L'ARITHMÉTIQUE CHEZ LES PEUPLES DE L'ANTIQUITÉ ET DU MOYEN-ÂGE.

(Suite et fin. Voyez la livraison précédente, page 257.)

XIV. Le Manuscrit E. Multiplication. 1)

Sous ce titre trop peu clair, M. Cantor donne dans ce chapitre l'explication du commencement du passage du premier livre de la *Géométrie* de Boèce concernant l'*abacus*. Cette explication avait été déjà parfaitement développée par M. Chasles à l'aide du *manuscrit de Chartres*, que M. Cantor nomme par abréviation *manuscrit C*. M. Cantor rejeunit cette explication, en la rattachant à une étude spéciale du *manuscrit d'Erlangen* (autrefois *manuscrit d'Altdorf*), qu'il nomme *manuscrit E*. Il reconte comment l'emploi de neuf chiffres analogues aux nôtres avait été signalé dans ce manuscrit par deux dissertations de Weidler, en 1727 et en 1755, et par Mannert en 1801. D'après l'examen qu'il a fait de ce manuscrit avec M. le professeur Wattenbach, M. Cantor pense, comme Mannert, que l'écriture est du XIe siècle, au lieu du VIIIe ou du IXe, indiqués par Weidler. Il conclut que ce manuscrit est contemporain de celui de Chartres, avec lequel il s'accorde presque mot pour mot pour le texte des deux livres de la *Géométrie* de Boèce et en particulier du passage sur l'*abacus*.

M. Cantor donne, d'après le manuscrit d'Erlangen, ce passage complet en latin dans les notes de son livre 2). La traduction allemande qu'il en donne dans le texte de son chapitre XIV s'arrête au milieu de l'explication de la multiplication sur l'*abacus*, parceque, dit-il, le surplus n'est qu'un développement peu utile de ce qui précède. Quant à la partie concernant la division, M. Cantor la réserve pour le chapitre suivant. Sa traduction de la description de l'abacus et de la multiplication n'est pas exempte de fautes graves 3); mais elle est fidèle sur les points essentiels pour le but de l'ouvrage. L'explication de l'abacus et de son usage est donnée ensuite par M. Cantor avec beaucoup de clarté. La figure de l'abacus, telle qu'il l'a donnée dans ses planches (figure 39) d'après le manuscrit d'Erlangen, est conforme, sauf quelques différences, qui seront expliquées, à celle que M. Chasles a publiée d'après le manuscrit de Chartres. M. Cantor démontre, après M. Chasles, que le texte de Boèce sur l'*abacus de Pythagore* se rapporte à cette figure, donnée ici par la plupart des manuscrits et notamment par les plus anciens et les meilleurs. Cette figure est laissée en blanc dans l'édition de Venise; elle est remplacée par la *table de multiplication* dans l'édition de Bâle et dans quelques manuscrits peu anciens. M. Cantor conclut que cette substitution erronée est l'unique cause pour laquelle les modernes ont donné à la *table de multiplication* le nom de *table de Pythagore*, tandisque ce nom n'a été attribué à la table de multiplication par aucun auteur ancien. Par exemple, il ne l'a été ni par le pythagoricien Nicomaque, ni par Boèce, qui tous deux ont donné cette table dans leur *Arithmétique* 4), où elle était à sa véritable place, tandisqu'elle est étrangère au passage sur l'*abacus*.

---

1) *Die Handschrift E. Multiplication.* p. 199-211. — 2) Note 404, p. 405-408. — 3) Le titre latin est mal traduit (p. 201); car les mots *De ratione abaci*, au lieu de signifier *Sur le rapport de l'abacus (Ueber das Verhæltniss des abacus)*, signifient *Sur la méthode de l'abacus*. Quelques lignes plus loin, pour prouver l'utilité de l'arithmétique, Boèce demande: *Si l'on ignorait la nature des nombres, comment pourrait-on reconnaître les figures célestes du firmament formées par des groupes d'étoiles?* Ce qui veut dire: comment pourrait-on compter les étoiles des constellations figurées, telles que le Bélier, le Taureau, etc? *Quis ipsius firmamenti siderea corpora stellis compacta, naturæ numerorum inscius, deprehendat?* M. Cantor traduit (p. 202): *Quel homme, sans connaître la nature des nombres, pourrait découvrir comment les corps planétaires du firmament se pelotonnent en étoiles? Wer wird unbekannt mit der Natur der Zahlen entdecken, wie die planetarischen Kœrper des Firmamentes sich zu sternen Zusammenballen?* Jamais *sidereus* n'a signifié *planétaire*, et jamais Boèce n'a songé à découvrir, par l'arithmétique ou autrement, comment des corps planétaires se pelotonnent en étoiles! C'est pire qu'un contresens; c'est un non-sens. — 4) Voyez Nicomaque, *Arithm.*, I, 9. p. 96-99 (Ast), et Boèce, *Arithm.*, I, 26, p. 1313-1314.

Mais cet abacus, décrit par Boèce, diffère de ceux dont M. Cantor a parlé dans les chapitres IX et X, car, dans l'*abacus* de Boèce, les boules, fiches ou jetons, dont chacun représentait une unité, sont remplacées par les *apices,* dont chacun représente un nombre. Dans les deux éditions, le passage sur les *apices* est rendu obscur par l'omission d'une ligne, qui se trouve dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, et avec laquelle le sens est très intelligible. Les *apices* étaient des pièces mobiles sur chacune desquelles était marqué un des nombres de 1 à 9, et ce nombre exprimait des unités simples, des dixaines, des centaines, etc., suivant la colonne où l'apice était placé. Etant données la colonne de l'apice multiplicande et la colonne de l'apice multiplicateur, Boèce indique quelle doit être la colonne du produit. Les neuf nombres étaient figurés sur les apices soit par les neuf chiffres dont la figure est donnée ici dans les manuscrits, soit par les neuf premières lettres de l'alphabet prises suivant leur ordre, soit, dit Boèce dans le texte complet des manuscrits, par *le nombre naturel* lui-même, c'est-à-dire, comme l'explique M. Cantor, par autant de traits qu'il y avait d'unités dans le nombre à exprimer 5). Les figures des neuf chiffres sont données d'une manière à peu près identique, tant sur la figure de l'abacus que dans le texte, par le manuscrit de Chartres et par celui d'Erlangen, et dans le texte seulement par deux manuscrits de Paris. Ces mêmes chiffres se rencontrent dans le texte de beaucoup d'autres manuscrits. L'édition de Venise en donne, dans le texte, une imitation typographique très inexacte et pourtant à peu reconnaissable. L'édition de Bâle y substitue, dans le texte, nos neuf chiffres modernes.

M. Cantor dit, avec raison, que par l'introduction des *apices* dans les calculs à faire sur l'abacus, le procédé était rendu plus intelligent qu'il ne l'était avec les fiches ou les jetons, dont l'addition se faisait machinalement, et que la nécessité d'un calcul réel dans chaque colonne était un acheminement vers la vulgarisation des procédés arithmétiques. Il ajoute à cette remarque vraie une conclusion contestable, compliquée d'une hypothèse fort douteuse. Il veut que l'emploi des *apices* et des neuf chiffres ait été connu des plus anciens pythagoriciens, mais qu'ensuite il ait été oublié peu à peu, à cause de la répulsion du vulgaire pour ces signes étranges et inconnus, et à cause de la forme nouvelle des opérations intellectuelles que cet emploi demandait. Il n'est nullement prouvé, et il me paraît peu probable, que l'usage des apices, et sortout celui des neuf chiffres, remontent jusqu'aux premiers temps de l'école pythagoricienne, et qu'ensuite cet usage soit tombé en oubli pendant l'époque florissante de mathématiques chez les Grecs.

M. Cantor a employé, dans sa traduction, les expressions claires *unités simples* et *dixaines* au lieu des expressions *digiti* et *articuli,* c'est-à-dire *doigts* et *phalanges,* employées dans le texte de Boèce. Ces expressions sont définies par Boèce dans un espèce de préface mise en tête de ce passage. Suivant une explication signalée par M. Chasles dans un manuscrit du XII[e] siècle et répétée au XVI[e] siècle par Noviomagus, ces expressions sont motivées par une méthode antique d'exprimer les unités et les dixaines avec les doigts étendus ou repliés. Cette méthode, à la quelle il est fait allusion dans un passage de Plutarque interprété par M. Bœckh 6), se trouve décrite non-seulement par Bède, mais dans des textes latins plus anciens, recueillis par Forcellini au mot *Digitus* de son Dictionnaire latin 7), et auxquels M. Cantor ajoute un texte d'une lettre de Théodoric à Boèce 8). La même méthode s'est conservée au moins jusqu'au XVI[e] siècle 9).

Mais comment se fait-il que les expressions *digiti* et *articuli,* et les expressions grecques équivalentes ne se trouvent, dans le sens d'*unités* et *dixaines,* chez aucun auteur antérieur à Boèce? Je suis bien tenté de répondre que ce sens de ces mots pouvait n'être pas beaucoup plus ancien, bien que l'usage d'expri-

---

5) M. Chasles croit que les mots *naturali numero* signifient *les caractères employés dès avant cette invention pour exprimer les nombres naturels.* — 6) Programme d'été de l'Université de Berlin, 1841, p. XI, note 13. —7) Voyez des textes plus nombreux, cités par Oudendorp dans ses notes sur Apulée, *Apol.*, t. 2, p. 579 des OEuvres. — 8) Cassiodori *Variar. epist.* I, 10, fol. 6 recto (Paris, 1588, in-4) — 9) M. Chasles dit avoir trouvé dans des écrits du XII[e] siècle et du XIII[e] d'autres explications de l'origine des expressions *digiti* et *articuli;* mais il ne les cite pas. Je pense, avec M. Cantor, que celle-ci est la vraie.

mer les nombres par le doigts fût très antérieur. M. Cantor, qui admet, sans preuves, l'antiquité de ces expressions appliquées aux nombres, répond que les écrivains grecs sur l'art du calcul sont perdus, qu'en latin Boèce est le plus ancien qui nous reste, et qu'il y en avait eu peu avant lui, les seuls qu'on puisse citer étant l'écrivain latin nommé Archytas, et Apulée, s'il faut en croire un manuscrit latin cité par M. Halliwell, mais dont les indications, écrites en un style barbare, sont très erronées en ce qui concerne les auteurs grecs sur le calcul. Mais il me semble que les auteurs qui, avant l'époque de Boèce, ont parlé du calcul par les doigts, par exemple Pline 10) et Apulée 11), auraient eu là une occasion assez naturelle de mentionner le sens arithmétique des mots *digiti* et *articuli*, s'il avait été usité de leur temps.

XV. Le Manuscrit E, Division, Fractions. 1)

Ce chapitre, qui est la continuation du précédent, se compose de trois parties, dont la première, concernant les règles de la division sur l'*abacus*, contient d'abord la traduction littérale de la suite du même passage de Boèce d'après le manuscrit d'Erlangen, puis un commentaire bien nécessaire sur ce texte, dont la concision va jusqu'à l'obscurité et jusqu'à l'insuffisance. M. Cantor explique per des exemples la méthode que Boèce avait formulée trop peu clairement et sans exemples.

Toutes les fois que le diviseur ne contient que des unités d'un seul ordre, unités simples, ou dixaines, ou centaines, le procédé de Boèce est celui de notre division ordinaire, si ce n'est que l'emploi du zéro est remplacé par la différence de position des chiffres dans les colonnes de l'*abacus*.

Mais, quand le diviseur renferme des unités de deux ordres, le procédé de Boèce diffère essentiellement du nôtre: il consiste à ajouter toujours au diviseur le nombre strictement nécessaire pour que, devenant multiple de 10, il n'ait plus d'unités simples. Par exemple, s'agit-il de diviser 672 par 16? Pour avoir le diviseur 20, on ajoute à 16 la *différence* 4. On place le 2 de 20 sous le 6 de 672; la division de 600 par 20, ou de 60 par 2, donne *premier quotient partiel* 3 dixaines, c'est-à-dire 30, et le *reste* est 72. On multiplie la *différence* 4 par le *quotient* 30; on ajoute le produit 120 au *reste* 72, et l'on a le *premier reste total* 192. Le 1 de 192 n'étant pas divisible par 2, on place le 2 de 20 sous le 9, et la division de 190 par 20, ou de 19 par 2, donne pour *second quotient partiel* 9 unités simples et le reste 12. On multiplie la différence 4 par le quotient 9; on ajoute le produit 36 au reste 12, et l'on a le *second reste total* 48. Le 2 de 20 se place sous le 4 de 48; la division donne le *troisième quotient partiel* 2, et le reste est 8. On multiplie la différence 4 par le quotient 2; on ajoute le produit 8 au reste 8, et l'on a le *troisième reste total* 16, qui, divisé par 16, donne le *quatrième quotient partiel* 1, sans reste. L'addition des quatre quotients partiels 30, 9, 2 et 1 donne le *quotient total* 42.

Ce procédé de Boèce est nommé par M. Cantor *division à l'aide de compléments* ou *différences:* il le compare avec la *division à l'aide des compléments décadaires,* méthode proposée et vantée par M. Crelle comme plus élégante et plus commode que notre division ordinaire 2). Il est vrai que la méthode de Boèce et celle de M. Crelle ont toutes deux sur la nôtre l'avantage d'éviter l'essai d'un quotient partiel trop fort ou trop faible. Mais le procédé de Boèce, qui passe par quatre divisions partielles pour arriver au quotient 42 de la division de 672 par 16, et surtout le procédé de M. Crelle, qui demande 21 divisions partielles pour arriver à ce même quotient, me paraissent bien moins expéditifs et moins commodes que notre division ordinaire, à la quelle, n'en déplaise à MM. Crelle et Cantor, il faut conserver notre pré-

---

10) *H. N.* XXXIV, 7, t. 5, p. 140 (éd. Sillig). Comparez II, 23, t. I, p. 131. — 11) *Apologie*, OEuvres, t. 2, p. 579 (éd. Oudendorp, in-4). — 1) *Die Handscrift E. Division, Minutien.* P. 212-230. — 2) Le procédé de M. Crelle diffère de celui de Boèce, en ce que, par exemple, au lieu de transformer le diviseur 16 en 20 par la *différence* 4, on le transforme en l'unité d'ordre décadaire supérieur, c'est-à-dire en 100, par le *complément décadaire* 84, sur lequel on opère comme sur la *différence* 4. Mais le nombre des divisions, des multiplications et des additions est bien plus grand et plus fastidieux que dans la méthode de Boèce.

*

férence, malgré ce qu'il y a d'ingénieux dans les deux autres procédés 3). Mais, s'il fallait choisir entre ces deux derniers, celui de Boèce me paraîtrait mériter la préférence pour les cas où le diviseur n'a que deux ordres d'unités.

La suite du passage de Boèce concerne la division par un nombre qui a des centaines et des unités, sans avoir des dixaines. M. Cantor explique bien ce texte, que M. Friedlein n'avait pas tout-à-fait compris, faute de savoir le sens du mot *différence* chez Boèce. Soit, par exemple, 800 à diviser par 206. On ôté une centaine du dividende et les unités simples du diviseur : 700 divisé par 200 donne le *quotient* 3, avec 100 pour *premier reste*. On multiplie par le quotient 3 les 6 unités négligées dans le diviseur, et on a le produit 18, qui retranché de la centaine négligée d'abord dans le dividende, donne le *second* reste 82, *complément décadaire* de 18. Le reste total de la division est donc 182.

Remarquons comment Boèce indique la manière de *soustraire* 18 de 100: il dit que, pour avoir les unités simples du *reste*, il faut prendre la *différence entière*, c'est-à-dire 2, puisque 10—8=2; mais que, pour trouver les dixaines, il faut prendre la *différence diminuée d'une unité*, c'est-à-dire 8, tandisque la différence entière serait 10—1=9. Le fait est vrai et l'opération est juste ; mais l'explication du procédé de la soustraction est bien peu claire, surtout n'étant pas donné, comme ici, sur un exemple numérique: Boèce ne donne aucun exemple.

Là s'arrête le passage sur l'abacus, tel que Boèce l'a tiré de l'écrivain latin Archytas, et là se termine aussi la première partie (p. 212-218) du chapitre XV de M. Cantor. Il aurait pu remarquer que tout cela est insuffisant pour enseigner à diviser un nombre entier quelconque par un autre nombre entier quelconque, par exemple lorsque le diviseur aurait des unités simples, des dixaines et des centaines avec ou sans des unités d'ordres supérieurs.

Ensuite vient, dans le manuscrit d'Erlangen comme dans les éditions, le second livre de la *Géométrie* de Boèce, contenant des formules d'arpentage dignes du très médiocre savoir des arpenteurs romains, et parmi lesques il n'y a d'un peu meilleur, que ce que Boèce a emprunté à l'écrivain latin Archytas, probablement grec d'origine comme de nom.

C'est encore à ce même Archytas que Boèce a emprunté le seul passage important pour nous de son second livre, c'est-à-dire son dernier chapitre 4), concernant le calcul des divisions et subdivisions de l'unité *(minutiæ)*, avec le tableau qui accompagne ce chapitre, le tout occupant cinq feuillets entiers du manuscrit d'Erlangen. M. Cantor donne en latin, dans sa note 426 (p. 410-412), la première édition complète de ce chapitre de Boèce; il le traduit en allemand dans son texte (p. 218-220), et il reproduit le tableau dans la figure 42 de ses planches. Il remarque l'accord du manuscrit d'Erlangen et du manuscrit de Chartres avec le texte imprimé pour le tableau et pour le chapitre, jusqu'à l'endroit où celui-ci s'arrête dans les éditions, qui en remplacent la fin par une compilation évidemment apocryphe.

---

3) Un fait, signalé par M. Cantor, avait échappé aux historiens des mathématiques. C'est que, tandisqu'on ne trouve plus au XVI[e] siècle la *division à l'aide des différences*, c'était à la multiplication qu'on appliquait alors un procédé analogue et d'une complication plus inutile: on y avait recours, quand la somme des deux facteurs surpassait 10. Par exemple, pour multiplier 6 par 8, on posait 10—6=4, et 10—8=2. Le produit des *différences* 4 et 2 donnait 8 unités simples pour premier produit partiel. Ensuite, en retranchant du premier facteur 6 la second différence 2, ou bien du second facteur 8, la première différence 4, on obtenait 4 dixaines pour seconde partie du produit. Les 4 dixaines, ajoutées aux 8 unités simples, donnaient 48 pour le produit total. Au XVI[e] siècle, Pierre Laramée (Ramus) avait bien raison de se moquer des écrivains qui enseignaient en 7 règles ce procédé inutilement long et compliqué, dont on est d'ailleurs si facilement dispensé par l'étude de la table *de multiplication*. Laramée citait, comme le plus ancien écrivain sur la multiplication à l'aide des différences, l'auteur anonyme de l'*Algoritmus demonstratus*, c'est-à-dire probablement l'astronome du XV[e] siècle Régiomontanus. M. Cantor, qui n'a pu se procurer cet ouvrage, pose la question de savoir si, là ou ailleurs, la division à l'aide des différences et la multiplication à l'aide des différences ont été employées en même temps, ou bien si le procédé pour la multiplication n'a été introduit qu'après la désuétude du procédé analogue pour la division. — 4) P. 1353, l. 5 d'en bas - p. 1536, l. 4 d'en bas.

Dans le commencement, depuis longtemps imprimé, Boèce attribue aux anciens, et surtout aux Pythagoriciens, l'emploi de signes spéciaux, les uns grecs, les autres barbares, pour les subdivisions usuelles de l'unité de longueur. Suivant une conjecture de M. Cantor, que nous réfuterons tout à l'heure, ces signes, que Boèce ne donne pas, seraient ceux dont Bède s'est servi, et que Gerbert a employés, comme connus depuis longtemps, sans avoir besoin de les expliquer: ceux de Bède et de Gerbert sont semblables à ceux que M. Cantor a retrouvés dans un manuscrit de Berne, et M. Halliwell dans un manuscrit anglais 5). Boèce remplace les signes de l'once et des onze fractions de l'once, qu'il énumère, par les douze premières lettres de l'alphabet latin A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, dans le tableau qu'il donne et qui est une sorte d'*abacus*. La fin du chapitre, c'est-à-dire la partie qui suit le tableau dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, partie que M. Cantor publie pour la première fois, explique l'usage des *apices* et de leur valeur de position dans ce tableau, et spécialement l'usage d'une partie de ce tableau ajoutée par Boèce. M. Cantor aurait bien fait d'énoncer expressément une remarque qu'il sous-entend sans doute, savoir, que cette fin du passage, ayant pour objet la multiplication des nombres complexes et fractionnaires, est une partie essentielle du chapitre sur les subdivisions de l'unité, et que les copistes des manuscrits suivis dans les deux éditions avaient évidemment mutilé ce chapitre, en retranchant cette fin pour y substituer, comme œuvre de Boèce, une compilation de morceaux divers des arpenteurs latins.

M. Cantor avoue qu'il ne comprend pas bien quelques passages de ce chapitre de Boèce, et surtout ce qui concerne la partie ajoutée par l'auteur à ce tableau d'Archytas. Il me paraît, en effet, bien difficile de deviner le sens des explications trop insuffisantes de Boèce.

Ici se termine la seconde partie (p. 218-224) du chapitre XV de M. Cantor. La troisième partie (p. 224-230) renferme des considérations qui se rapportent au chapitre XIV aussi bien qu'au chapitre XV, et qui ont pour objet la réfutation des objections contre l'authenticité soit de la *Géométrie* de Boèce tout entière, soit surtout des deux passages discutés dans ces deux chapitres.

Mais je quitte M. Cantor, pour répondre d'abord à une objection qu'il n'a pas connue. Dans le chapitre XIII, j'ai prouvé, contre M. Wœpcke, que la fin du premier livre de cette *Géométrie* et tout le second sont de la même main que la partie principale du premier livre, reconnue authentique par M. Wœpcke lui-même. J'avais dit, en 1857, que le passage de la fin du premier livre sur la méthode de l'abacus se trouve dans *tous* les manuscrits. Je ne savais pas que M. Halliwell 6) avait cité deux manuscrits d'Angleterre où ce passage manque, et qu'il avait considéré ce passage important comme une interpolation. Je vais répondre à cette objection que M. Wœpcke 7) me signale. Nous avons vu que la figure du pentagone en étoile 8) manque dans le manuscrit d'Erlangen. Pourquoi? Parceque le copiste n'a pas compris le passage très obscur auquel cette figure se rapporte. Nous venons de voir que la fin du passage sur les fractions manquait dans les manuscrits qui ont servi aux deux éditions. Pourquoi? Parce qu'elle avait paru inintelligible aux copistes. Nous avons vu que la figure de l'*abacus* a été supprimée à la fin du premier livre dans l'édition de Venise, et qu'elle a été remplacée dans certains manuscrits et dans l'édition de Bâle par la *table de multiplication*, tandisque tout le passage demande la figure supprimée et repousse la figure intruse. Pourquoi celle-ci est-elle venue là? Parceque les copistes la comprenaient. Pourquoi l'autre a-t-elle disparu? Parcequ'ils n'y comprenaient rien. De même, pourquoi tout ce passage sur l'abacus, passage qui se trouve dans tous les manuscrits excepté deux, manque-t-il dans ces deux manuscrits? Parceque, ne comprenant pas ce passage, deux copistes ont eu la fantaisie de le supprimer. Depuis quand une lacune de deux manuscrit fait-elle autorité contre le texte plus complet de tous les

---

5) Il aurait fallu les comparer avec les signes employés pour les fractions dans les éditions et les manuscrits de Vitruve, X, 10-15 (15-21). Voyez aussi les *Gromatici veteres*, t. I, p. 339-340 (éd. Lachmann), et les traités métrologiques de Volusius Mæcianus et de Priscien. Comparez M. Hultsch, *Griechische und ræmische Metrologie*, II, 20, p. 112-113 (Berlin, 1862, in-8). — 6) *Rara mathematica*, p. 107, 2 éd. (Londres, 1841). — 7) *Propagation des chiffres indiens*, p. 16-17 (Paris, 1863, in-8). — 8) *Géométrie* de Boèce, I, p. 1514 (Bâle). Voyez ci-dessus, chap. XIII, note 24.

autres, surtout des plus anciens et des meilleurs? Je dis qu'il y a certainement lacune dans ces deux manuscrits. Car, dès 1857, j'ai montré 9), et M. Cantor (p. 221) répète avec raison, qu'une annonce de l'*abacus* se trouve (p. 1516, l. 8-10) un peu avant le passage supprimé; que ce passage tient d'ailleurs une place nécessaire dans l'ensemble de l'ouvrage, et que, dans ce passage même, l'auteur se réfère à tout le commencement de sa *Géométrie* et même à ses traités sur l'*Arithmétique* et sur la *Musique*.

M. Wœpcke me signale aussi les objections de M. A. Bœckh, qui, comme M. Lachmann, rejette l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce tout entière. Mais ici nous retrouvons M. Cantor, qui n'a pas laissé ces objections sans réponse. Avant de les aborder, il traite deux questions préparatoires, dans l'étude desquelles nous allons le suivre.

Sans comprendre entièrement le passage du second livre de la *Géométrie* de Boèce sur le calcul des fractions, il est aisé de voir qu'à l'époque du rédacteur ni les neuf signes employés par lui sur les *apices* de l'*abacus*, ni les signes de figure étrange qu'il n'a pas voulu employer pour les fractions, n'étaient entrés dans l'usage général, bien que les uns et les autres eussent été employés par l'écrivain latin Archytas: notre auteur avait adopté les premiers signes, comme peu nombreux et commodes: il aurait craint de trop innover à la fois, en adoptant aussi les derniers, trop difficiles à comprendre. Or, chez Bède, savant moine anglais de la fin du VII[e] siècle et du commencement du VIII[e], on trouve des signes bizarres pour les fractions, et, de la manière dont Bède en parle, il résulte que ces signes n'avaient alors rien d'insolite même en Angleterre. Au X[e] siècle, Gerbert, dans sa *Géométrie*, les emploie comme généralement connu, et même sans juger utile de les définir. A Berne, dans un manuscrit du X[e] siècle, M. Cantor les a retrouvés avec un tableau analogue à l'*abacus*. De ces faits M. Cantor conclut que la *Géométrie*, attribuée à Boèce, écrite à une époque où les signes des fractions n'étaient pas encore vulgarisés, a été écrite longtemps avant la fin du VII[e] siècle, et par conséquent vers le VI[e] siècle, époque de Boèce. Pourquoi ne serait-ce pas par Boèce lui-même?

Ce serait-là une preuve de plus en faveur de l'authenticité de ce passage; mais je dois dire qu'elle ne me paraît pas valable. Elle suppose 1° l'identité des fractions de Boèce avec celles de Bède et de Gerbert, 2° l'identité des signes employés par Bède et par Gerbert avec les signes que Boèce a connus sans les adopter. La seconde de ces suppositions est gratuite, et la première est certainement fausse, comme je m'en suis assuré par une comparaison que M. Cantor aurait dû faire. Les noms des fractions de Boèce, noms destinées à rappresenter surtout des longueurs, mais applicables à des fractions quelconques, sont empruntés les uns à la nomenclature des longueurs grecques, les autres à celle des poids grecs, quelques uns aux expressions grecques du temps, et ils sont en partie des mots grecs, en partie des équivalents latins des mots grecs. Au contraire, les noms des fractions de Bède, à l'exception d'un seul *(scripulum)*, sont tout autres que ceux de Boèce; ils sont tous purement latins, et identiques à ceux que Varron et Volusius Mæcianus 10) employaient, cinq siècles et demi et trois siècles avant Boèce, pour désigner les mêmes fractions. Mais voici, entre les fractions de Boèce et celles de Bède, une autre différence plus décisive que celle des noms. Les onze fractions de Boèce sont des divisions et subdivisions de l'once (οὐγγία), prise pour unité subsidiaire par les pythagoriciens suivant Boèce, ou plutôt par les néopythagoriciens, et considérée par eux comme douzième du *pied* grec (ποῦς), et comme intermédiaire entre le *palme* (παλαιστής), qui était le sixième du pied, et le *doigt* (δάκτυλος), qui en était le seizième 11). Reduites en fractions directes de l'once, ces divisions et subdivisions, d'après les définitions

9) *Rech. nouv. sur les origines de notre num. écrite*, p. 6. — 10) Voyez Varron, *De ling. lat.*, V, 171-172, et Volusius Mæcianus, *Distributio partium*, éd. Bœcking (Boun, 1831, in-12). Comparez Balbus, *De asse minutisque eius portiunculis* (à la suite de Volusius, éd. Bœcking). Au contraire, Priscien, qui vivait à Constantinople sous Justinien, donne un systéme gréco-romain de fractions de l'once, qui se rapproche de celui d'Archytas et de Boèce. Voyez Priscien, *Carmen de ponderibus et mensuris (Poët. lat. min.*, éd. Lemaire, t. 4, p. 443-446). Comparez Priscien, *De figures numerorum (Grammatici latini*, éd. Putsch, p. 1345 et suiv.) — 11) *Id quod palmo esset minus, digito autem majus, unciam vocare maluerunt* (pythagorici), dit Boèce, *Géom.*, II, p. 1536, l. 7-8. Le texte donné par M. Cantor (p. 410-412), d'après le manuscrit d'Erlangen, est très altéré pour cette phrase.

de Boèce, sont: *digitus* (δάκτυλος) = 3/4 d'once, *stater* (στατήρ) = 1/2, *quadrans* (τέταρτον) = 1/4, *dragma* (δραχμή) = 1/8, *scripulus* (γράμμα) = 1/24, *obolus* (ὀβολός) = 1/48, *ceratis* (κερατίς) = 1/96, *siliqua* (κέρατιον) = 1/144, *punctum* (στίγμή) = 1/192, *minutum* (λεπτόν) = 1/470, *momentum* (ακαρές) = 1/768. Des 18 fractions de Bede 12), les 12 premières, rapportées à l'*as* prise pour unité, sont; *deunx* = 11/12 d'as, *dextans* = 5/6, *dodrans* = 3/4, *bes* = 2/3, *septunx* = 7/12, *semis* = 1/2, *quincunx* = 5/12, *triens* = 1/3, *quadrans* = 1/4, *sextans* = 1/6, *sescuncia* = 1/8, et *uncia* = 1/12. Les six fractions inférieures, rapportées à l'once, sont: *semuncia* = 1/2 once, *sicilicus* = 1/4, *sextulæ duæ* = 1/3, *sextula* = 1/6, *dimidium sextulæ* = 1/12, *scripulum* = 1/24. Ainsi, des six fractions de Bède au dessous de l'once, trois seulement ont les mêmes valeurs que trois des onze de Boèce, et une seule a en même temps le même nom. Il est vrai que les signes des fractions identiques sont tout autres chez Bède que chez Volusius Mæcianus 13). Mais les signes donnés par Bède ne peuvent pas être identiques à ceux que Boèce avait sous le yeux puisqu'ils ne représentent pas du tout le même système de fractions. Celui de Boèce, avec son caractère grec, vient bien du néopythagoricien grec Archytas écrivant en latin, et non d'une source romaine.

Passons au second point: M. Cantor a parfaitement raison de constater, contre M. Bœckh, que dans le passage de Boèce sur les fractions de l'once, tel qu'il est complété par les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, il est question de l'*abacus* et des *apices* employés avec valeur de position pour le calcul de ces fractions.

Cela posé, M. Cantor aborde les objections de M. A. Bœckh 14), dont l'opinion se résume dans les trois propositions suivantes:

1°. L'ouvrage entier, tel que nous l'avons, serait une compilation, dont une des sources serait peut-être la *Géométrie* perdue de Boèce.

2°. Quant aux deux morceaux sur l'usage de l'abacus et sur le tableau pour le calcul des fractions, la partie principale de chacun d'eux remonterait à des sources grecques et peut-être très anciennes, par l'intermédiare d'un écrit faussement attribué au pythagoricien Archytas; mais la rédaction de ces deux morceaux serait d'un style détestable.

3°. Les phrases concernant les *apices* et les neuf chiffres ne seraient peut-être pas antérieures au XIe siècle de notre ère.

Persistant à croire à l'authenticité des deux livres de la *Géométrie* de Boèce, mais satisfait de la concession contenue dans la seconde proposition de M. Bœckh en faveur de l'antique origine de l'ensemble des deux passages controversés, M. Cantor porte toutes ses forces contre la troisième proposition, et n'insiste pas assez contre la première, que je vais combattre, en lui opposant des faits qui avaient échappé à M. Cantor.

Comme nous l'avons montré (chapitre XIII), des témoignages irrécusables établissent que Boèce avait écrit une *Géométrie* d'après Euclide. La *Géométrie* en deux livres que tous les manuscrits nous donnent comme œuvre de Boèce, est un extrait des quatre premiers livres des *Eléments* d'Euclide, avec des compléments qui adaptent cet extrait aux besoins pratiques des Romains. Le rédacteur de cette *Géométrie* latine rappelle par les mots *mi patrici* la dédicace *ad patricium Symmachum*, qui mise par Boèce en tête du recueil de ses œuvres mathématiques s'applique expressément à son *Arithmétique*, à sa *Musique*, et à sa *Géométrie*, et devait s'appliquer aussi à son *Astronomie* perdue, puisque Boèce, dans sa Préface et dans le chapitre Ier de son *Arithmétique*, annonce à son beau-père Symmaque l'intention d'embrasser les quatre parties du *quadrivium*. D'un autre côté, le rédacteur du complément ajouté à la suite de l'extrait

---

12) *De ratione unciarum*, OEuvres, t. I, p. 141 (Cologne, 1612, in-fol.). — 13) *Distributio partium* (éd. Bœcking). Voyez aussi un anonyme, dans les *Geomatici veteres*, t. I, p. 339-340 (éd. Lachmann), et Vitruve, X, 10-15 (15-21), t. I, p. 290-302, et la note *De notis mensurarum*, t. I, p. 309-312 (éd. Schneider). Comparez M. Hultsch, Métrologie, p. 112-114. — 14) *Index lectionum quæ auspiciis regis Aug. Fred. Guil. IV in universitate lit. Frid. Guil. per semestre æstivum MDCCCXLI instituentur*, p. X et suiv. Ce passage de M. Bœckh est cité textuellement par M. Cantor, p. 225-226.

d'Euclide pour l'usage des arpenteurs, se donne comme le rédacteur de cet extrait, et par conséquent de la *Géométrie* entière en deux livres, et il se donne en même temps comme l'auteur de l'*Arithmétique* et de la *Musique* qui précèdent. De plus, j'ai établi (chapitre XIII) un fait important qui avait échappé à M. Cantor: Le rédacteur de l'extrait latin d'Euclide sous sa forme actuelle n'avait fait lui-même que traduire un extrait grec comprenant les figures et les énoncés contenus dans les quatre premiers livres des *Eléments* sans les démonstrations, et en faisant cette traduction il avait cru mettre en latin le texte complet du géomètre grec. Ceci renverse entièrement la première proposition de M. Bœckh, qui fait des deux livres de la *Géométrie* attribuée à Boèce une compilation puisée à des sources latines, au nombres desquelles serait la *Géométrie* rédigée par Boèce d'après Euclide.

La seconde proposition de M. Bœckh ne résiste pas davantage aux fait constatés. Archytas, cité par Boèce comme un *écrivain latin non méprisable* sur la géométrie pratique, n'est ni le vieux philosophe *grec* Archytas de Tarante, ni un faussaire *grec* usurpateur de son nom.

Quant au style des deux passages sur l'abacus et sur les fractions, style indigne de Boèce suivant M. A. Bœckh, M. Cantor oppose à ce savant les doutes de son neveu M. L. Bœckh 15) sur cette appréciation littéraire. J'ajoute que le texte de ces deux passages a été très maltraité par les copistes, qui ne les comprenaient pas. D'ailleurs, M. Cantor remarque fort à propos que ces deux passages sont empruntés par Boèce à l'arpenteur Archytas, qui pouvait n'être pas un habile latiniste. Le mot les plus inquiétant pour l'authenticite me paraît être le mot *firmamentum* pour *cœlum* 16). C'est le *στερέωμα* des septante et des chrétiens grecs; c'est le *firmamentum* des vieilles traductions latines de la Bible et des chrétiens d'occident. Mais, depuis deux siècles que le christianisme était devenu la religion de l'État en Italie, ce mot avait pu s'introduire dans le langage ordinaire, et par conséquent ce mot peut-être soit de Boèce, soit de l'écrivain latin Archytas, pourvu que cet Archytas ne soit pas antérieur de plusieurs siècles à Boèce, comme M. Cantor (p. 223) le suppose gratuitement et à tort suivant moi.

Arrivant à la troisième proposition de M. Bœckh, M. Cantor prouve d'abord que malgré l'assertion contraire de ce savant, il est question des apices et de leur valeur de position dans le passage sur les fractions 17), et non pas seulement dans le passage sur l'abacus. Il prouve ensuite que les phrases concernant les apices et les neuf chiffres sont des parties essentielles de ces deux passages, au lieu d'y avoir été interpolées, comme M. Bœckh le prétend.

En vain M. Bœckh demande comment il pourrait se faire que Boèce, connaissant les neuf chiffres, ne les eût employés nulle part ailleurs. M. Cantor repond que, jusqu'à l'introduction du zéro, les neuf chiffres ne pouvaient pas servir a exprimer les nombres audessus de 9, ailleurs que dans les colonnes de l'*abacus*. Enfin, M. Cantor prouve, contre M. Bœckh, que la figure de l'*abacus*, nommé *table des géomètres* par Boèce (p. 1516, l. 8), comme par les abacistes du moyen-âge, et le passage par lequel Boèce en explique l'emploi, sont à leur place dans la partie pratique de la *Géométrie* de Boèce. Sur ce point, il répète les explications données par M. Chasles et par moi, et acceptées par M. Friedlein, qui pourtant sur tout le reste suit l'opinion de M. Bœckh. Quant au tableau pour le calcul des fractions, personne avant M. Cantor n'avait expliqué pourquoi, au lieu de se trouver au commencement du second livre, où l'auteur se contente de le promettre (p. 1520, l. 21-23), il est rejeté à la fin de ce livre. De même que le passage sur l'abacus est mis à la fin du premier livre, pour préparer les calculs numériques qui ne viennent que dans le second, de même le tableau des fractions est mis à la fin de ce second livre, où il n'y a que des calculs de nombres entiers, mais pour préparer à l'étude de l'*Astronomie* de Boèce, qui venait à la suite de la *Géométrie,* et qui, rédigée d'après le grand ouvrage de Ptolémée, devait faire, comme lui, un fréquent usage des nombres fractionnaires et complexes. En effet, dans le *Liber abaci*

---

15) *Ueber den Zusammenhang der Schriften, Welche der Pythagorees Archytas hinterlassen haben soll* (Appendice au Programme d'automne du Lycée de Karlsruhe, 1841). — 16) Voyez ci-dessus, chap. XIV, note 3. — 17) Voyez le texte complet, publié pour la première fois par M. Cantor, note 426, p. 411.

du manuscrit de Berne 18), écrit au Xe siècle, on lit que l'*abacus* a un double usage, comme instrument de la géométrie et comme *introduction à l'astronomie*. J'ajoute une remarque, qui vient confirmer celle de M. Cantor: Boèce lui-même (p. 1535, fin), avant de donner le tableau pour le calcul des fractions, dit que ce tableau, *merveilleux même pour cet art* (c'est-à-dire pour la géométrie pratique), *est absolument nécessaire pour d'autres parties des sciences mathématiques*, c'est-à-dire sans doute surtout pour l'astronomie et la mécanique 19).

Mais pourquoi Boèce n'a-t-il pas mis la méthode de l'abacus et le tableau pour les fractions dans son *Arithmétique*, à la quelle renvoie sa *Géométrie*, et dans laquelle se trouve (I, 26, p. 1314) la table de multiplication? Après avoir remarqué que Boèce n'aime pas à dire longtemps d'avance ce qui ne trouvera son application que beaucoup plus tard, M. Cantor ajoute une autre raison, que j'avais déjà donnée: c'est que *logistique* ou *arithmétique pratique*, à laquelle appartiennent les calculs des nombres entiers et des fractions sur l'abacus, est étrangère à l'*Arithmétique* de Nicomaque reproduite par Boèce, tandisqu'à cette arithmétique spéculative appartiennent la théorie des proportions 20), à laquelle Boèce renvoie dans le premier livre de sa *Géométrie* (p. 1514), et la *table de multiplication* 21), nécessaire pour la théorie de la composition des nombres.

M. Cantor termine ce chapitre, en formulant les deux conclusions auxquelles aboutissent ses chapitres XIV et XV, et que je viens de fortifier par quelques considérations nouvelles: 1°. La *Géométrie* de Boèce en deux livres, telle qu'elle se trouve dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, avec les deux passages sur l'abacus et sur les fractions, est bien de cet auteur. 2°. Boèce connaissait les neuf chiffres qui se trouvent dans le texte de ces deux manuscrits, et leur usage avec valeur de position sur l'abacus: il les avait empruntés à un écrivain latin nommé Archytas, à l'exemple duquel il les nommait *signes pythagoriques*. Il s'agit maintenant de savoir en quoi et jusqu'à quel point cette dénomination était fondée.

XVI. Signes Pythagoriques. 1)

Avant d'aborder cette question et pour mieux la résoudre, M. Cantor revient à la figure de l'abacus, telle qu'elle est donnée dans le passage, reconnu authentique et non interpolé, de la *Géométrie* de Boèce. Pour le texte de ce passage, les manuscrits de Chartres et d'Erlangen, copies faites au XIe siècle sur des manuscrits aujourd'hui perdus, sont d'accord; mais il n'en est pas de même pour la figure, comme le montre la comparaison des descriptions détaillées de M. Chasles 2) avec la planche de M. Cantor (figure 39). Les deux figures ont 12 colonnes, qui de droite à gauche ont en tête l'unité et les puissances croissantes de 10 écrites en chiffres romains, et au dessus, dans les dix premières colonnes à droite, neuf chiffres pour les nombres de 1 à 9, puis un dixième signe. Mais les formes de ces dix signes diffèrent notablement dans les deux figures, quoique ces formes soient presque identiques dans le texte des deux manuscrits, où ces dix signes se trouvent répétés en dehors de l'abacus. Dans le manuscrit d'Erlangen, les colonnes sont closes en haut par de petits arcs de cercle, qui manquent dans la figure du manuscrit de Chartres d'après la description détaillée de M. Chasles. Nous verrons (chapitre XX) que ces *arcs*, dont Boèce ne parle pas, ont été ajoutés, entre le VIe siècle et le Xe. Plus haut encore, dans des prolongements des neuf ou dix premières colonnes, les deux figures donnent dix mots, qui sont les noms des

---

18) Voyez la note 130 de M. Cantor, p. 412. C'est par erreur qu'il renvoie (p. 229, l. 3) à sa note 425. — 19) *Mirabilem et arti huic, cæterisque mathesios disciplinis necessariam figuram.* Pour l'emploi des fractions et de leurs signes dans la mécanique, voyez Vitruve, *De Architectura*, X, 10-15 (15-21), t. 1, p 290-302, éd. Schneider (Leipzig, 1807-1808, 3 vol. in-8). Comparez la note *De notis mensurarum*, t. 1, p. 309-312). — 20) *Arithm.* de Boèce II, 40 et suiv. Comparez Nicomaque, *Arithm.*, II, 21 et suiv.— 21) *Arithm.* de Boèce, I, 26, p. 1314. Comparez Nicomaque, *Arithm.* I, 19. — 1) *Pythagorische Zeichen*, p. 231-250. — 2) *Sur le passage de la Géométrie de Boèce* etc. p. 7-8 (Bruxelles, 1836, in-4. Extrait du t. XI des Mém. couronnés), et *Aperçu hist. sur le développement des méthode en Géométrie*, Note XII, p. 532-533 de la trad. allem. de M. Sohncke, *Gesch. der Geom.* (Halle, 1839, in-8).

neuf chiffres et du dixième signe. Dans les deux figures, les quatre premiers mots, le septième et le huitième de droite à gauche sont: *igin, andras, ormis, arbas, zenis, temenias.* Mais le cinquième et le sixième sont *quinas* et *calctis* dans le manuscrit d'Erlangen, tandisqu'ils sont écrits *quimas* et *caltis* dans le manuscrit de Chartres. Le neuvième et les dixième, *celentis* et *sipos*, sont placés dans les prolongements des colonnes 9 et 10 du premier manuscrit, tandisque le mot *celentis* et au dessus de lui le mot *sipos* sont dans le prolongement de la neuvième colonne du second manuscrit. Maintenant, descendant au dessous des chiffres romains, M. Cantor signale entre les parties inférieures des deux figures une discordance plus grande encore. Dans le manuscrit de Chartres, on trouve, jusqu'au bas de l'*abacus,* six autres rangées de chiffres romains, dont les trois premières expriment la moitié, le quart et le huitième des douze nombres supérieurs en chiffres romains qui forment les titres de colonnes et en marquent l'ordre décimal; les deux rangées suivantes expriment les fractions de l'*once* (douzième de l'unité), et la dernière offre les nombres de 1 à 12 en chiffres romains. Au lieu de ces six rangées horizontales, le manuscrit d'Erlangen n'en présente que trois, dans lesquelles on reconnaît une tentative mal réussie pour prendre la moitié, le quart et l'huitième des nombres écrits en chiffres romains dans la rangée au dessus.

Il me paraît évident, comme à M. Cantor, qu'après avoir copié fidèlement le texte de Boèce, les copistes des deux manuscrits ont voulu compléter la figure de son *abacus* sur le modèle des *abacus* usités de leur temps, abacus qui embrassaient le calcul des fractions, tandisqu'à la fin de la *Géométrie* de Boèce un tableau spécial est donné pour ce calcul. Mais le copiste du manuscrit d'Erlangen, plus ignorant en mathématiques que celui du manuscrit de Chartres, s'est arrêté après avoir mal rempli la moitié de cette tâche.

La figure de l'abacus ayant été ainsi altérée par les copistes, il faut s'en tenir aux figures des neuf chiffres, telles qu'elles sont données semblablement par le deux manuscrits dans le texte même de ce passage, d'où l'on ne pourrait les retrancher sans mutiler ce texte authentique, qui les suppose. Quant à la dixième figure, qui ne se trouve que sur l'abacus, et à laquelle le texte ne fait aucune allusion, il ne faut pas l' attribuer à Boèce.

M. Cantor veut prouver que ces neuf chiffres de Boèce viennent des *pythagoriciens grecs*, mais que ceux-ci les avaient empruntés eux-mêmes à des peuples étrangers. Sur ces deux points, je vais exposer brièvement les vues de M. Cantor, sauf à les examiner ensuite.

Boèce, dans son traité de la *Musique* (IV, 3, p. 1441-1442), a emprunté aux Pythagoriciens d'anciens signes musicaux tirés des lettres de l'alphabet grec diversement arrangées, et il déclare n'avoir voulu rien y changer. A la fin de sa *Géométrie* (II, p. 1536, l. 12-15), Boèce déclare n'avoir pas voulu adopter, pour les fractions, d'autres signes pythagoriques, dont l'explication lui est inconnue, et qui sont, dit-il, d'origine en partie grecque et en partie étrangère, c'est-à-dire babylonienne d'après une hypothèse de M. Bœckh. Suivant M. Cantor, qui incline vers cette même hypothèse, Boèce expliquait les signes musicaux, parce qu'il pouvait le faire en peu de mots. Ne connaissant pas l'explication des signes pour les fractions, il en faisait l'aveu, et il les remplaçait par d'autres signes tirés de l'alphabet latin. Bien qu'il crût comprendre la signification symbolique des figures des neuf chiffres, il ne l'expliquait pas, parcequ'il la jugeait trop difficile à communiquer aux profanes.

Arrivés à Boèce par l'intermédiaire des Pythagoriciens, les neuf chiffres pouvaient avoir une origine étrangère et plus antique. M. Cantor écarte sans discussion les considérations transcendantes par lesquelles M. de Paravey a prétendu appuyer l'hypothèse de Hager sur l'origine purement chinoise des neuf chiffres. Mais il emprunte à Hager 3) une remarque importante: c'est qu'en passant d'un peuple à un autre, un signe peut changer soit de position, soit de signification 4). En effet, si l'on compare les deux manuscrits du traité de Planude *Sur le calcul indien* qui existent à Venise, on voit que le 7 de l'un est semblable

3) *Memorie sulle cifre arabiche (Fundgruben der Orients*, t. 2, p. 65-81, Vienne 1811; et à part, Milan, 1813). — 4) Comme exemple, M. Cantor cite le mot *billion*, qui signifie en français l'unité suivie de 9 zéros à droite, et en allemand l'unité suivie de 12 zéros.

au 8 de l'autre, et que les chiffres pour les nombres 2 et 3 sont debout dans l'un et couchés dans l'autre. De même, les six chiffres pour les nombres 1, 2, 3, 5, 8 et 9, tels que Hager les donne comme très anciens en Chine, ressembleraient à six chiffres du manuscrit d'Erlangen, savoir, à ceux que ce manuscrit donne pour les nombres 1, 2, 3, 8, 7, 4. Mais M. Cantor ne trouve pas que la haute antiquité de ces chiffres, en Chine soit prouvée, et sans nier que quelques-uns de nos chiffres puissent être originaires de Chine, il doute fort qu'ils en viennent tous. Hâtons nous d'ajouter qu'il faudrait, avant tout, examiner: 1°. si les ressemblances signalées par Hager sont assez nombreuses et assez marquées pour ne pouvoir pas être fortuites; 2°. si les chiffres chinois cités par lui ne sont pas originaires de l'Inde, à laquelle la Chine a emprunté tant de choses.

M. Cantor n'est pas moins indulgent pour l'hypothèse de M. Piccard 5), qui veut que les neuf chiffres de Boèce soient les neuf premières lettres d'un alphabet mixte, formé en empruntant des lettres à divers alphabets dérivés de l'alphabet phénicien. Le premier chiffres serait l'*iota* grec, qui, comme nous l'avons vu (chapitre VIII), avait signifié 1 avant de signifier 10. Le second chiffre serait le *beth* hébreu en diverses variantes. Le troisième serait le *gamma* copte, auquel ressemblerait un peu le *gamma* d'une inscription de la collection Farnèse. Le quatrième chiffre serait le redoublement du second, comme 4 est le double de 2. Le cinquième chiffre serait soit l'*upsilon,* identique pour la forme au V romain signifiant 5, soit plutôt une des formes du *hé,* cinquième lettre de l'alphabet samaritain. Le sixième chiffre serait formé soit par le retournement du cinquième, soit par le redoublement du troisième, ou bien ce serait un *vav* chaldaïque avec changement de position. Le septième chiffre serait le *zêta* grec dans ses diverses variantes. Le huitième serait un *cheth* hébraïque. Le neuvième viendrait de la neuvième lettre de l'alphabet phénico-samaritain, ou bien du *thêta* grec. Au lieu de remarquer le caractère chimérique de cet alphabet hétéroclite commençant par l'*iota* grec, M. Cantor déclare qu'il peut y avoir une part de vérité dans ces rapprochements de M. Piccard.

La diversité d'origine des neuf chiffres transmis à Boèce par les Pythagoriciens est confirmée, au jugement de M. Cantor, par les recherches de M. Vincent 6) sur la signification symbolique des figures des neuf chiffres, et des noms étranges qui leur sont donnés: il accepte les conclusions générales de ce savant, sauf à modifier quelques détails. Mais il conteste avec raison l'importance attribuée par M. Vincent, en faveur de la haute antiquité des neuf chiffres dans l'école pythagoricienne, à un fragment de Moderatus 7), qui concerne la signification symbolique des *nombres eux-mêmes* depuis 1 jusqu'à 10, et nullement la signification symbolique de *signes hiéroglyphiques* destinés à représenter ces nombres. M. Cantor admet cependant, comme *vraisemblable,* que les Pythagoriciens de l'école alexandrine, *possédant d'avance les neuf chiffres,* trouvèrent des interprétations plus ou moins forcées pour ces neuf figures 8).

Au contraire, aucun auteur un peu ancien n'ayant jamais attribué à la vieille école pythagoricienne antérieure à Aristote un système de neuf chiffres symboliques pour les neuf premiers nombres, il me paraît très probable qu'au lieu de *posséder d'avance* et dès longtemps les neuf chiffres, les Néopythagoriciens en avaient formé eux-mêmes la série symbolique à Alexandrie, de même que, de l'aveu de M. Cantor, ce sont eux qui ont imaginé les signes pour les notes musicales. Mais, dans l'invention de la série des neuf chiffres, ils ont fait des emprunts à l'Egypte et peut-être aussi à l'Asie.

---

5) *Mémoire sur la forme et la provenance des chiffres servant à la numération décimale chez les anciens et chez les modernes (Société Vaudoise des sciences naturelles,* 20 avril et 4 mai 1859). — 6) *Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie (Revue Archéol.,* 15 janvier 1846). — 7) Dans Porphyre, *Vie de Pythagore,* p. 48-53 (éd. Küster). De même, les textes d'Aristote cités par M. Vincent concernant les *nombres* et nullement les *chiffres.*— 8) Comme exemples modernes d'interprétations forcées, M. Cantor cite l'étymologie latine *(s. ins.* pour *semis inscriptæ)* donnée par Godin au mot géométrique *sinus,* qui est la traduction du mot arabe *dschaib;* l'étymologie du mot *abacus,* qui viendrait d'*arabicus* suivant Pacioli, les diverses étymologies données au mot *algoritmus* avant que M. Reinaud eût indiqué la vraie; les explications proposées par Priscien pour les chiffres romains et par Abenragel pour les chiffres indiens.

*

Je dis que certainement ils ont emprunté des chiffres à l'Egypte. En effet, M. Cantor (p. 239) reconnaît avec moi que les chiffres pythagoriques de Boèce pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 ont une ressemblance incontestable avec les signes hiératiques des anciens Egyptiens pour les nombres ordinaux correspondants dans la désignation des jours du mois 9). Cependant, avec Hager, il incline à faire venir de la Chine les quatre premiers chiffres, et il pense qu'il peut y avoir du vrai dans l'hypothèse de M. Piccard, qui fait venir des alphabets sémitiques les chiffres 1, 2, 3, 4 et 9, de même que les quatre autres. Pour concilier ces adhésions complaisantes qu'il donne à des hypothèses contradictoires, M. Cantor n'aurait qu'un moyen : ce serait d'admettre encore une autre hypothèse, celle de M. de Paravey 10), d'après laquelle les alphabets et les chiffres de tous les peuples seraient identiques et remonteraient à un seul alphabet primitif. Mais M. Cantor, qui a écarté cette hypothèse, aime mieux déclarer vaguement que les neuf chiffres de Boèce sont empruntés aux sources les plus diverses.

Cette diversité est moins grande que M. Cantor ne le suppose. Car, puisque cinq des neuf chiffres de Boèce, avec le mêmes valeurs, sont très antiques dans l'écriture hiératique des Egyptiens, il ne reste plus à chercher que l'origine des quatre autres chiffres, origine peut-être sémitique, s'il y a du vrai dans les conjectures de M. Piccard. Quoi qu'il en soit, je ne pense pas, comme M. Cantor, que l'école néopythagoricienne ait seulement *mis son estampille* sur la série antiquement pythagoricienne des neuf chiffres ; je pense, au contraire, que les nouveaux pythagoriciens ont formé eux-mêmes cette série, sur laquelle ils ont imprimé le cachet de leurs doctrines. Si tout cela avait été connu des anciens Pythagoriciens, l'antiquité en aurait su quelque chose. Du reste, je reviendrai tout à l'heure sur cette question d'origine.

Après avoir remarqué le caractère arbitraire, vague, indécis et mobile du symbolisme des Pythagoriciens, caractère qui permet d'appliquer la même idée à des nombres différents et des idées tout-à-fait différentes à un même nombre, M. Cantor indique les modifications qu'il croit devoir apporter aux interprétations que M. Vincent a données aux figures des chiffres de Boèce en les comparant avec les idées que les Pythagoriciens attachaient aux nombres représentés par ces chiffres 11).

Pour les figures des trois premiers chiffres de Boèce, M. Cantor s'accorde entièrement avec M. Vincent, qui reconnaît dans ces trois chiffres la représentation du *principe femelle* 12) du *principe mâle* 13) et de l'*union de ce deux principes* 14).

Pour le quatrième chiffre, malgré sa ressemblance avec la *croix ansée* des Egyptiens, *clé* de la *vie* divine 15), M. Cantor croit plutôt que c'est le chiffre 2 redoublé. Mais il aurait dû reconnaître que les Néopythagoriciens, et même les anciens Egyptiens, qui avaient ce même chiffre, pouvaient y voir en même temps la *croix ansée,* symbole du nombre 4, *porte-clé de la nature* 16). Il faut donc admettre l'explication de M. Vincent, sans exclure absolument celle de M. Cantor.

Tous deux admettent que les Néopythagoriciens ont assimilé le chiffre 5, *nombre de la justice et de l'équilibre* 17) et *image de la balance* 18) avec le crochet au quel le fléau de la balance est suspendu.

---

9) Voyez ci-dessus, chap. I. — 10) *Essai sur l'origine unique et hiéroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples* (Paris, 1826). — 11) Les indications de M. Vincent et de M. Cantor, sur les textes qui constatent ces idées des Pythagoriciens, seront complétées par moi dans les notes suivantes. — 12) L'unité était considérée comme *mère,* en même temps que comme *père.* Voyez la *Théologie arithmétique* d'un néopythagoricien anonyme, ch. I, p. 5, l. 4-5 et l. 31-36 (éd. Ast, Leipzig, 1817, in-8), et Macrobe, *Somn. Scip*. I, 6, p. 38, éd. Janus (Quedl. et Leipzig, 1848, in-8). — 13) Le nombre *deux* était le Symbole du *courage viril.* Voyez *Théol. arithm.,* ch. 2, p, 7, et Aristide Quintilien, *Musique,* III, p. 155 de Meybaum. — 14) Le nombre *trois* était considéré comme la réunion de *un* et de *deux* (Voyez *Théol. arithm.*, ch. 3, p. 15, l. 4-5) et il était nommé *mariage* (p. 16, l. 21). — 15) Voyez Raoul-Rochette, *Acad. des Inscriptions*, t. XVII, II[e] partie, p. 134-135, et p. 375-387, et les autorités citées par M. Vincent, *Des notions scientifiques*, p. 5. — 16) Le nombre *quatre* était nommé *porte de la nature* par les Pythagoriciens. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 5, p. 29, l. 1-2, et p. 31, l. 4-5.— 17) *Théol. arithm.*, ch. 5, p. 26-29 et p. 31; Asclepius *Sur la Métaphys. d'Aristote*, I, 8, p. 541 *a*, l. 5-8 (Brandis), et un scoliaste, p. 541 *b*, l. 18 et suiv. et l. 28, et Jamblique, *Sur la science mathématique* (*Anecd. græc.* de Villoison, t. 2, p. 209, l. 17). — 18) C'est l'expression même de la *Théol. arithm.*, ch. 5, p. 29, l. 1-2, et p. 31, l. 4-5.

M. Cantor admet aussi que la forme primitive et authentique du sixième chiffre est bien celle que M. Vincent désigne, et qu'elle représente, par une ligne droite verticale à côté d'un cube, l'*once*, comme petite unité tant de longueur que de poids. En effet, suivant une lettre de Théodoric adressée précisément à Boèce 19), l'*once* est le symbole du nombre 6, *nombre parfait* 20), c'est-à-dire égal à la somme de ses facteurs (l'unité comprise).

Mais, pour les trois derniers chiffres, M. Cantor doute que M. Vincent ait eu raison d'y reconnaître la dernière des deux triades d'idées mentionnées dans le Commentaire d'Olympiodore sur le *Phédon* 21). En effet, c'est tout-à-fait arbitrairement que M. Vincent rapproche ces deux triades d'idées et les trois triades des neuf premiers nombres, et que, laissant de côté la première triade d'idées, il établit, entre la seconde triade d'idées et la troisième triade de nombres, un rapprochement auquel rien n'indique que les pythagoriciens aient jamais songé.

Cependant, pour d'autres raisons plus acceptables, M. Cantor admet, avec M. Vincent, que le neuvième chiffre signifie la *force*, représentée par la forme ithyphallique de ce chiffre sur l'abacus du manuscrit de Chartres 22), et que l'idée de *force* convient au nombre 9, parcequ'il est le premier *carré d'un nombre impair* 23), et que le *carré* d'un nombre se nomme *puissance* (δύναμις) en grec.

Mais M. Cantor refuse d'admettre, avec M. Vincent que dans le septième chiffre les Pythagoriciens aient vu un compas, symbole de la *grandeur*. En effet, aucun auteur ancien n'attribue cette significaton au nombre 7. Avec plus de vraisemblance, M. Cantor voit, dans la figure du septième chiffre de Boèce, une faux ou un gnomon, tous deux symboles du *temps*. En effet, les Pythagoriciens donnaient au nombre 7 un nom (ἀγελεία) qui suivant eux rappelait les sept planètes 24), nommées *instruments du temps* par Platon 25). Mais je dois dire qu'au lieu de nommer le nombre *sept* nombre du *temps* (χρόνος), comme M. Cantor le prétend, ils le nommaient 26) *temps favorable* (καιρός).

M. Cantor ne veut pas non plus admettre, avec M. Vincent, que dans la figure du huitième chiffre les Pythagoriciens aient vu un serpent, symbole de la *santé*. En effet, aucun texte ancien ne vient à l'appui de cette interprétation 27). Mais celle de M. Cantor n'est pas mieux autorisée, et elle est plus invraisemblable: il veut que le huitième chiffre ressemble à deux cercles représentant les *huit* sphères célestes. Quel rapport y a-t-il entre *deux cercles tangents l'un à l'autre* et *huit sphères concentriques?*

En résumé, l'explication symbolique de M. Vincent pour les figures des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 9 de Boèce, est très probable d'après ce que nous savons des idées des Pythagoriciens. Pour le chiffre 7, l'explication de M. Cantor a un peu de la vraisemblance qui manque à celle de M. Vincent. Pour le chiffre 8 de Boèce, une explication symbolique plausible d'après les idées des pythagoriciens est encore à trouver.

M. Cantor a raison de considérer comme bien établi ce fait général, que les néopythagoriciens attribuaient un sens symbolique aux figures des neuf chiffres, transmises à Boèce par Archytas le latin.

---

19) Cassiodori *Var. epist.*, I, 10, fol. 6 verso (Paris, 1588, in-4). — 20) Euclide, *Elém.* VII, Déf. 22; *Théol. arithm.*, ch. 6, p. 33; Théon de Smyrne, *arithm.*, ch. 74 et 77 (*Mus.*, ch. 42 et 45), p. 158-160 (Paris, 1644, in-4); Plutarque, *Questions de table*, IX, 2, § 2, et *De la procréation de l'âme suivant le Timée*, ch. 13; Macrobe, *Somn. Scip.* I, 6, t. 1, p. 39; *Saturn.*, VII, 13, t. 2, p. 622 (éd. Janus); Martianus Capella, VII, 736, p. 588-589 (éd. Kopp.). — 21) P. 24, l. 23-25, éd. Finckh, Heilbronn, 1847, in-8. M. Cantor se trompe, en disant que ce commentaire est inédit. — 22) Figure 43 de M. Cantor. — 23) Théon de Smyrne, *Arithm.* ch. 80 (*Mus.*, ch. 48), p. 165. Comparez Plutarque, *Questions de table*, IX, 14, § 2. — 24) *Théol. arithm.*, ch. 7, p. 42-43. — 25) *Timée*, p. 42 A. Comparez p. 38 C et p. 39 E. — 26) *Théol. arithm.*, ch. 7, p. 44, l. 25-26, et p. 53, l. 7-10; Alexandre d'Aphrod., *Sur la Métaphys.* d'Aristote, I, 8, p. 28-29 et p. 56 (éd. Bonitz); Asclepius, *Sur la Métaph.*, I, 8, p. 541 *a*, l. 9 et suiv. (éd Brandis), et un scoliaste, ibidem, p. 541 *b*, l. 31. — 27) C'était le nombre *six* qui était nommé *santé*. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 6, p. 34-35, p. 37, l. 15, et p. 38, l. 14. Le nombre *huit* n'était pas nommé *santé*, mais *stabilité*. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 8, p. 55, dernière l., et Macrobe, *Somn. Scip.* I, 5, t. 1, p. 35 (éd. Janus). Quant au nom Καδμεία donné au nombre *huit*, il signifiait *Harmonie*, fille de Cadmus, et n'avait aucun rapport avec le *serpent* de Cadmus, non plus qu'avec celui d'Esculape. Voyez *Théol. arithm.*, ch. 8, p. 54.

De plus, la lettre de Théodoric à Boèce autorise M. Cantor à penser que Boèce n'ignorait pas ces explications symboliques des neuf chiffres 28).

Mais, sur les figures de ces chiffres de Boèce, je dois placer ici une remarque importante, qui a échappé à M. Cantor. Ce n'est pas au hasard que ces figures, qui n'ont aucun rapport naturel avec les nombres qu'elles représentent, ont été choisies les unes dans l'écriture hiératique des Egyptiens, les autres peut-être dans des alphabets sémitiques: elles ont été choisies évidemment en vue des explications symboliques plus ou moins forcées qu'on voulait leur donner. Les auteurs de ce symbolisme des neuf chiffres, c'est-à-dire les néopythagoriciens d'Alexandrie, sont donc en même temps les formateurs éclectiques de cette série de signes numéraux au lieu de les avoir reçus des anciens pythagoriciens, comme M. Cantor le suppose. Ils y ont mis le cachet de leur secte, en les modifiant pour les adapter à leur symbolisme.

Ensuite M. Cantor aborde l'explication des dix mots bizarres écrits au dessus des neuf chiffres et du dixième signe sur l'abacus dans les manuscrits de Chartres et d'Erlangen. Ces mots se retrouvent, avec diverses variantes, dans d'autres manuscrits du XIe siècle. M. Chasles a rencontré les huit premiers, sans le neuvième *(Celentis)*, mais avec le nom du dixième signe *(sipos)*, dans une page du manuscrit de Chartres en dehors de la *Géométrie* de Boèce 29): ces neuf mots y sont expliqués par neuf vers latins; la plupart de ces vers ne donnent que la correspondance du nom et du nombre: l'*éclat* du *septimus honor* dans le septième vers, et le surnom de *béatifique* donné au nombre 8, n'offrent que des indications trop vagues pour être utiles; mais le sixième vers, en désignant le nombre 6 comme *parfait*, appuie un peu l'explication de M. Vincent, et le quatrième vers appuie celle que M. Cantor ajoute à celle de M. Vincent pour le chiffre 4 considéré comme double du chiffre 2.

Quant au sens des dix mots eux-mêmes, Huet, évêque d'Avranches, avait déjà remarqué le caractère sémitique de quatre d'entre eux. Les mots *arbas*, *quimas*, *et zenis* sont, suivant M. Cantor comme suivant M. Nesselmann et M. Vincent, des formes altérées des mots hébreux qui signifient 4, 5 et 7. Le mot *temenias*, suivant les mêmes savants, rappellerait plutôt le mot *araméen* signifiant *huit;* mais la forme *zementas*, fournie par un manuscrit d'Oxford, serait favorable à une étymologie hébraïque. M. Gildemeister se prononce pour une étymologie arabe des quatre mots, et M. Nesselmann ne la repousse pas absolument. M. Spiegel n'incline à admettre une étymologie arabe que pour le mot *sipos*, dont nous parlerons plus tard. Pour les cinq autres mots, les étymologies orientales proposées par MM. Nesselmann et Gildemeister sont inadmissibles 30).

Suivant M. Vincent, ces cinq mots, *igin*, *andras*, *ormis*, *calcis* (avec les variantes *caltis*, *calctis* et *chalcus*), et *celentis*, sont des mots grecs, traduits d'abord en hébreu, puis de l'hébreu en latin, et plus ou moins défigurés dans ces deux traductions 31). Les significations qu'il donne à ces mots s'accordent avec les symboles pythagoriques qu'il avait signalés dans les figures des chiffres pour les nombres 1, 2, 3, 6 et 9. Suivant lui, le mot *igin* vient de ἡ γυνή *(i gyni)*, *la femme; andras*, vient de ἀνήρ, ἀνδρός, *l'homme mâle (vir); ormis* vient de ὁρμή *(ormi)*, *appétit sexuel; calcis* ou *chalcus* vient de χαλκοῦς, synonyme de οὐγγία 32), *once; celentis* vient de ἀθήλυντος *(athélyntos)*, *viril*, et l'α initial a disparu par une

---

28) A ces propos, M. Cantor dit qu'un manuscrit du Vatican doit contenir un ouvrage de Boèce, en deux livres, *Sur les nombres.* Je présume que c'est tout simplement l'*Arithmétique* de Boèce. Cependant, suivant le vœu de M. Chasles répété par M. Cantor, il serait bon de s'assurer de l'existence et du contenu de ce manuscrit. — 29) Ces vers se trouvent dans la note 460, p. 414 de M. Cantor. — 30) Suivant M. Nesselmann, *Igin* et *Andras* viendraient des mots arabes *echad (un)* et *achar (l'autre)*, suivant M. Gildemeister, *Igin* viendrait du mot persan *yagân (un)*, et *Andras* du mot arabe *Annadir (point opposé)*.— 31) M. Bienaimé, cité par M. Wœpcke *(Propagation des chiffres indiens*, p. 25 *)*, veut que *caltis* vienne de καλότης *Zenis* de Ζηνές dans le sens de *fille de Jupiter*, et *celentis* de σελήνη. Mais les néopythagoriciens disaient κάλλος et non καλότης, et ils n'établissaient aucun rapport spécial entre le nombre 6 et la *beauté*, qui était l'attribut du nombre 3 (Voyez Aristide Quintilien, *Musique*, III, p. 155 de Meybaum, et la *Théol. arithm.*, ch. 3, p. 12). Ils n'établissaient non plus aucun rapport spécial entre le nombre 9 et la *Lune*, qui était la patrone du nombre 2 (Voyez *Théol. arithm.*, ch. 2, p. 12). *Sept* était le nombre de Minerve (Voyez *Théol. arithm.*, ch. 7, p. 53); mais Minerve (Athéné) ne se nommait pas Ζηνίς, et ces mot n'a jamais été grec. — 32) Οὐγγία, *uncia*, synonyme de χαλκοῦς. est un mot d'origine sicule, suivant Julius Pollux, *Onom.*, IX, 6.

mutilation opérée dans la transcription hébraïque 33). Les Kabbalistes juifs, alliés aux néopythagoriciens alexandrins ont transmis ces mots aux latins. Mais à quelle époque faut-il placer cette transmission? C'est là une question que M. Vincent n'a pas abordée.

Cette question a été traitée d'une manière malheureuse par M. Gerhardt 34): ayant constaté avec raison la ressemblance très grande des chiffres arabes *gobâr* avec ceux de Boèce, il veut que ces derniers soient arabes, mais qu'ils aient été attribués aux Pythagoriciens grecs par un faussaire juif du Ier siècle de notre ère, et qu'adoptés au IIe siècle par les Kabbalistes, ils aient été transmis par eux aux chrétiens. Mais M. Cantor a raison de soutenir, contre M. Gerhardt, que parmi ces noms bizarres des neuf chiffres il y en a qu'il est impossible de faire venir de l'hébreu ou de l'arabe, et que plusieurs sont des noms grecs transcrits en hébreu, puis de l'hébreu en latin. J'ajoute qu'il est très improbable que les Arabes eussent leurs chiffres *gobâr* dès le Ier siècle de notre ère, tandisqu'au commencement du VIIe siècle, possédant à peine une écriture 35), ils n'avaient pas de chiffres, ou bien ils avaient des chiffres très différents de ceux du système *gobâr* 36). J'ajoute encore qu'au Ier siècle il y avait aussi peu de relations entre les Arabes et les Juifs hellénistes, qu'entre les Arabes et les pythagoriciens grecs. Enfin, je remarque, avec M. Cantor, que si les neuf chiffres avaient figuré dès le premier siècle dans des écrits attribués aux anciens pythagoriciens, écrits grecs apocryphes qu'on lisait beaucoup alors, la connaissance en aurait été très repandue; l'écrivain latin Archytas et Boèce n'auraient pas été seuls à en parler, jusqu'au VIe siècle.

M. Cantor dit fort bien que Boèce a dû connaître, avec les neuf chiffres, les noms grecs par lesquels les néopythagoriciens en exprimaient la signification; mais qu'il est impossible que ces mots grecs aient été écrits par Boèce, ou par Archytas avant lui, sous des formes barbares telles qu'*igin, andras, ormis caltis* et *celentis*. Par conséquent, sur les *abacus* des manuscrits de Chartres et d'Erlangen, la ligne qui contient ces noms appartient aux copistes interpolateurs, comme plusieurs lignes déjà signalées. On trouve dans cette ligne et dans celle des neuf chiffres un dixième nom et une dixième figure évidemment inconnus à Boèce, qui ne parle pas de cette figure, tandisqu'il parle des neuf autres. Cette dixième figure, bien connue des copistes du XIe siècle, c'est le *sipos en forme de roue,* comme il est appelé dans le neuvième et dernier vers du manuscrit de Chartres, c'est-à-dire le *zéro,* nommé aussi *sipos* sur l'*abacus* dans les deux manuscrits.

M. Cantor pense, avec M. Vincent, que le mot *sipos* vient du mot hébreu *saph (vase)* 37); mais entre le *zéro* et un *vase* je vois peu de rapport soit de forme, soit de signification. Je persiste à croire, avec M. Chasles, que *sipos* vient plutôt du mot grec ψῆφος *(psiphos), jeton.* M. Cantor m'objecte que *les Grecs* n'ont pas connu le vrai zéro. Mais, outre l'o grec, employé anciennement par les astronomes grecs pour marquer l'absence d'un certain ordre de subdivisions du cercle et du jour 38), *les Grecs byzantins* purent connaître, avant le XIe siècle, le zéro indien des Arabes orientaux, qui lui conservèrent d'abord sa forme circulaire 39); les Byzantins purent lui donner le nom de ψῆφος à cause de sa forme, et les écrivains latins du moyen-âge peuvent avoir emprunté aux Byzantins ce nom, en l'altérant 40). Qu'on n'oublie pas

---

33) Le mot ἀθήλυντος se trouve employé en ce sens dans la *Théologie arithmétique,* ch. 7, p. 53; mais c'est au nombre 7 qu'il est appliqué. Un même nom était donné souvent à deux ou plusieurs nombres: par exemple, le nom ἀρσενόθηλυς à 1 et à 6 (*Théol. arithm.*, p. 5 et 33), le nom γάμος à 3 et à 6 (ibid. p. 16 et 33), et les noms ἀνδρογυνία et γαμήλια, synonymes des deux précédents, au nombre 5 (ibid. p. 32).—34) *Die Entdeckung der hæheren Analysis,* p. 96 et suiv. (Halle, 1855). — 35) Voyez Silvestre de Sacy, *Mémoire sur quelques papyres écrits en arabe et trouvés récemment en Egypte* (*Acad. des inscript.*, Nouv. série, t. IX, p. 78-80). — 36) Voyez le chapitre suivant. — 37) Mais M. Vincent rejette avec raison l'opinion de M. Nesselmann, qui fait venir *sipos* du mot arabe *cifra*, tandisque l'influence arabe a substitué ce dernier mot au mot *sipos*, antérieurement en usage chez les chrétiens. — 38) Voyez ci-dessus, chapitre VIII. — 39) Voyez le chapitre suivant. — 40) De l'étymologie, grecque ou hébraïque, et non indienne ou arabe, du mot *sipos*, M. Wœpcke (*Propagation des chiffres indiens*, p. 62-63, et note 2) croit pouvoir conclure que ce nom a été appliqué d'abord à ce qu'on peut appeler le *zéro grec*, qui différait du *zéro indien* et *arabe*, surtout par son usage. Mais ce *zéro grec* était la lettre grecque o, qui n'avait pas bésoin d'autre nom, et M. Wœpcke, comme M. Cantor, oublie les Grecs byzantins, qui ont pu connaître de bonne heure le *zéro indien des Arabes orientaux*, et chez qui le moine arithméticien Planude avait eu sans doute des prédécesseurs.

l'influence scientifique et littéraire des Grecs byzantins, ravivée en occident, dès le X[e] siècle, par la princesse grecque Théophanie, impératrice en Allemagne, et protectrice de Gerbert 41). Du reste, cette question de l'étymologie du mot *sipos* est peu importante.

Voici comment M. Cantor (p. 250) résume son opinion sur l'origine des neuf chiffres de Boèce et des interpolations signalées dans sa figure de l'*abacus*, telle que les manuscrits la donnent.

« 1° Les Alexandrins possédaient neuf signes pour les nombres de 1 à 9.»

« 2°. Il donnèrent à ces chiffres des noms grecs, qui répondaient aux significations symboliques lues par eux dans ces neuf figures.»

« 3°. La connaissance de ces signes, et peut-être aussi de leurs noms, fut transmise aux Romains, vers le I[er] ou le II[e] siècle de notre ère, par un certain Archytas; mais son écrit latin fut à peine lu, jusqu'à l'époque où il fut recommandé par Boèce au public savant.»

« 4°. Pendant ce temps, les mêmes connaissances avaient pénétré dans les écoles des Kabbalistes, et s'unissant avec le zéro inventé sur ces entrefaits, probablement dans l'Inde, elles avaient formé dans ces écoles une série de dix signes.»

« 5°. Dans ces écoles juives, une partie des anciens noms grecs des neuf chiffres s'était conservée, une autre partie avait disparu, et pour le dixième signe il n'y avait aucun mot donné d'avance.

« 6°. Pour combler ces lacunes, quelques noms hébraïques durent être introduits.»

« 7°. Quand, des écoles juives, les signes et les noms passèrent aux chrétiens d'occident, il rencontrèrent tout à coup des éléments dont la similitude témoignait d'une parenté antique, mais qui n'avaient pas gardé avec les éléments nouveaux une parfaite concordance, et les copistes du XI[e] siècle, étonnés de recevoir de côtés si différents des éléments semblables, songèrent à compléter et à améliorer les uns avec le secours des autres.»

Sur ces sept propositions, je crois devoir faire les réserves suivantes:

Dans les deux premières propositions, il faut savoir gré à M. Cantor de n'avoir pas reproduit sa fausse hypothèse, d'après laquelle les neuf chiffres de Boèce viendraient des *anciens* pythagoriciens antérieurs à l'école d'Alexandrie. Mais je voudrais qu'il eût indiqué, comme époque probable de l'invention de ces neuf signes symboliques, les derniers temps de l'école d'Alexandrie, c'est-à-dire l'époque du néoplatonisme et du néopythagorisme, l'époque de Porphyre et de Jamblique. Je voudrais qu'il eût remarqué que l'emploi de ces neuf chiffres pour les calculs à faire sur l'*abacus* n'était pas pratiquement plus avantageux que l'emploi semblable des neuf lettres grecques désignant les mêmes nombres, et qu'ainsi, pour les Grecs, l'introduction de l'abacus à colonnes, mais non celle des figures des neuf chiffres, a constitué un progrès. Je voudrais qu'il eût ajouté que les Néopythagoriciens d'Alexandrie avaient formé cette série de neuf chiffres en prenant cinq chiffres aux anciens Egyptiens, et en inventant les quatre autres, probablement à l'imitation de quelques lettres sémitiques, et qu'ils avaient modifié et interprété ces figures, de manière à les adapter à leurs idées symboliques sur les neuf premiers nombres, idées exprimées par les noms grecs qu'ils donnaient à chacun de ces neuf chiffres.

Sur la troisième proposition, je remarque que l'époque de l'écrivain latin Archytas est probablement beaucoup plus rapprochée de l'époque de Boèce que M. Cantor ne le suppose, et que l'invention des neuf chiffres pythagoriques peut elle-même n'être pas de beaucoup antérieure.

Sur les quatre dernières propositions, je remarque que le *zéro* des Indiens, probablement peu ancien dans l'Inde même 42), n'aurait pu être mentionné dans les écrits des Kabbalistes juifs qu'après l'époque de Boèce, que de même les noms hébraïques donnés aux chiffres 4, 5, 7 et 8 sont probablement d'une

---

41) Voyez ci-après, chapitres XXI et XXII. Le jeune empereur Othon III, fils de Théophanie, priait Gerbert de venir ranimer chez lui par ses enseignements l'esprit vivace *des Grecs* (Voyez Duchesne, *Script. hist. franc.*, t. 2, p. 824). La Géométrie de Gerbert, écrite en Allemagne près d'Othon III, est pleine de mots grecs. Voyez ci-après, chapitre XXII. — 42) Voyez ci-dessus chap. IV.

époque postérieure à Boèce, et que la traduction des neuf noms et de celui du zéro en un latin barbare n'est probablement pas de beaucoup antérieure au XIe siècle.

Du reste, les vues de M. Cantor sur l'étendue et la cause des interpolations que la figure de l'*abacus* a subies dans les manuscrits de Boèce de la part des copistes du XIe siècle, subsistent avec toute leur importance. Il est bien constaté que les neuf chiffres, figurant dans le texte même de Boèce, sont authentiques, tandisque le zéro, dont M. Cantor complétera bientôt l'histoire, et les noms barbares des neuf chiffres et du zéro, sont interpolés.

XVII. Signes numéraux des Arabes. 1)

Puisque neuf chiffres peu différents des nôtres se trouvaient dans les œuvres de Boèce, si étudiées au moyen-âge, et puisque Boèce ne les avait pas empruntés aux Arabes, mais aux néopythagoriciens grecs par l'intermédiaire d'un grec écrivant en latin, M. Cantor est fondé à dire que l'hypothèse d'après laquelle ces neuf chiffres nous seraient venus uniquement des Arabes, ou des Indiens par les Arabes, est suffisamment réfutée 2). Mais nous verrons qu'une des formes du système arabe des neuf chiffres, forme trop peu connue de M. Cantor, a eu avec la formation de nos neuf chiffres, tels qu'ils sont aujourd'hui, des rapports historiques qui ont échappé à ce savant.

Le plan très étendu de son livre lui ordonnant de parler de toutes les formes de notation numérale qui ont existé chez les Arabes, il s'excuse modestement de l'insuffisance des documents qui ont été accessibles pour lui et des notions sommaires qu'il en a tirées. Il s'excuse aussi de la liberté qu'il a prise d'insérer dans ce chapitre des renseignements qu'il n'avait pas trouvé l'occasion de placer ailleurs. Il faut le remercier de ne les avoir pas omis, bien qu'on en trouve l'équivalent dans l'ouvrage de M. Pihan.

Après avoir rappelé ce qu'il a dit sur la manière ingénieuse des Grecs pour compléter leur notation alphabétique des nombres 3), M. Cantor explique comment, au contraire, les Hébreux se contentèrent longtemps des 22 lettres de leur alphabet, dont 9 leur servaient pour les unités simples, 9 pour les dixaines, et les quatre autres pour les quatre premiers nombres de centaines. Pour exprimer un nombre de centaines audessus de 4, ils réunissaient deux ou trois des quatre dernières lettres par addition. Plus tard, ils exprimèrent les cinq derniers nombres de centaines par les formes particulières que cinq des 22 lettres hébraïques prennent à la fin des mots. Pour exprimer les milliers jusqu'à 9000, ils mirent deux points audessus des lettres exprimant les nombres depuis 1 jusqu'à 900. Un petit crochet, placé audessus de la dernière lettre numérale ou avant elle, avertissait que dans ces lettres il ne fallait pas chercher des mots, mais des nombres. L'écriture allant de droite à gauche, les unités simples se mettaient à l'extrême gauche 4).

Depuis le milieu du VIIe siècle environ, les Arabes eurent leur écriture *cufique*, de laquelle ils tirèrent un système alphabétique de chiffres, peu différent de celui des Hébreux. Quant à leur écriture antérieure, il n'en reste que peu de traces 5), et nous ignorons, dit M. Cantor, si un système de chiffres s'y rattachait. M. Wœpcke 6) est pour la négative. M. Cantor admet que les Arabes pouvaient avoir alors des chiffres analogues au système non alphabétique de Palmyre.

Les Palmyréniens et les Phéniciens avaient des systèmes de notation alphabétique des nombres 7): M. Cantor n'en dit rien. Eu outre, certaines inscriptions de Palmyre, des trois premiers siècles de notre

---

1) *Die Zahlzeichen der Araber*, p. 251-263. — 2) Cette hypothèse, réfutée par M. Chasles, a été reproduite encore par M. Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les Orientaux*, Introd. p. XVI-XXIV (Paris, 1860, in-8). Malgré ses doutes sur l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce, M. Wœpcke (*Prop. des chiffres indiens*, p. 18-28) n'hésite pas à déclarer que les chiffres des manuscrits de Boèce viennent des Pythagoriciens, et que ces chiffres sont devenus les nôtres. — 3) Voyez ci-dessus, chapitre VIII. — 4) Pour plus de détails, voyez M. Pihan, p. 169-176. — 5) Comparez le Mém. de Silvestre de Sacy, *Acad. des inscr.*, t. IX, p. 78-80. — 6) *Propag. des chiffres indiens*, p. 55-56. — 7) Voyez M. Pihan, p. 162-164, et ce que nous avons dit ci-dessus, à la fin du chapitre Ier.

ère, expliquées au XVIII$_e$ siècle par Swinton, présentent un système de quatre chiffres, qui, pris isolément, signifient 1, 5, 10 et 20, mais dont les combinaisons, aidées du trait horizontal, pouvaient exprimer tous les nombres par un procédé que M. Cantor décrit 8), et qui, malgré de notables différences, ressemble à la fois à celui de la notation hiéroglyphique des Egyptiens et surtout à celui de la notation cunéiforme des Babyloniens. Une forme un peu différente de ce système palmyrien et de ses quatre figures est donnée par M. Pihan (p. 167-168) d'après Hoffmann.

M. Cantor aurait dû ajouter que les Phéniciens avaient d'une part une notation alphabétique des nombres, d'autre part une notation non alphabétique, qui n'avait des signes particuliers que pour 1, 10, 20 et 100, et qui, pour la manière d'exprimer les autres nombres avec ces quatre signes, ressemblait à la notation hiéroglyphique des Egyptiens plus encore qu'à celle de Palmyre. M. Pihan (p. 164-167) fait connaître, d'après Gesenius, cette notation phénicienne.

Le système de signes numéraux constaté par M. Rœdiger dans des manuscrits syriens du VIe et du VIIe siècle, diffère peu du système non alphabétique de Palmyre, si ce n'est par la réunion de deux traits en un seul chiffre pour signifier 2, et par l'addition de ce chiffre avec les autres et avec lui-même 9).

En outre, les Syriens avaient une notation alphabétique, qui employait les 22 lettres de leur alphabet, sous la forme soit syriaque, soit nestorienne, soit estranghelo 10), pour exprimer, à la manière des Hébreux, tous les nombres jusqu'à 400. Pour les cinq nombres supérieurs de centaines, ils mettaient un point audessus de la lettre qui exprimait le même nombre de dixaines. Une virgule mise sous les dixaines en faisait des milliers, et cette virgule pouvait être omise, quand la valeur de la lettre était suffisamment indiquée par sa position à la droite de lettres exprimant des nombres plus petits. Un trait horizontal sous une lettre en multipliait la valeur par 10000. Deux virgules en sens inverse sous chaque lettre en multipliaient la valeur par un million.

Après avoir indiqué ainsi les méthodes de notation numérale employées par les peuples voisins des Arabes (p. 252-256), M. Cantor arrive à celles des Arabes eux-mêmes, en commençant par leurs notations alphabétiques des nombres. Mais, dans l'exposé de ces notations, il bouleverse trop l'ordre chronologique. C'est ainsi qu'après quelques mots sur l'alphabet arabe, il commence (p. 258) par les *chiffres diwânis,* abréviations des noms de nombre imaginées après coup par les Arabes pour le secret des opérations financières du *diwân*, comme les *chiffres syâks* des Persans pour le secret des opérations commerciales 11). C'est encore ainsi qu'il finit par l'usage arabe des lettres numérales (p. 259), c'est-à-dire par où il aurait dû commencer.

Comme le dit M. Wœpcke 12), les Arabes, d'abord illétrés, adoptèrent comme chiffres les lettres numérales des peuples conquis: en Syrie, les lettres numérales grecques, qu'ils gardèrent jusqu'à la fin du VIIe siècle; en Egypte, les chiffres koptes, qui sont les lettres numérales grecques altérées 13). Depuis l'an 639, ils eurent leur *alphabet cufique* (ainsi nommé de Cufa ou Coufa sur l'Euphrate); mais l'usage des *chiffres cufiques* 14), c'est-à-dire l'emploi numéral des lettres de cet alphabet, ne commença pas avant la fin du VIIe siècle; il prit alors la place des lettres numérales grecques, et dura jusqu'à la fin du IXe siècle 15). Les *chiffres niskys* sont les lettres de l'*alphabet nisky*, que les Arabes du Xe siècle substituèrent à l'alphabet cufique. M. Cantor ne remarque pas que les *lettres maghrebines,* dont l'ordre alphabétique n'est pas tout-à-fait le même et dont la forme est légèrement différente, étaient employées au même usage numéral chez les Arabes occidentaux. Jusqu'à la fin du Xe siècle, les Arabes employèrent à la manière

---

8) P. 254-255, et figure 48. M. Cantor remarque que les Aztèques sont le seul peuple chez lequel 20 ait de même un signe spécial, à l'exclusion des nombres de dixaines plus élevés.— 9) Voyez M. Cantor, p. 256. Comparez ci-dessus la fin du chapitre Ier. 10) M. Cantor (p. 256) ne fait pas cette distinction. Mais voyez M. Pihan, p. 194-198. — 11) Sur les *chiffres diwânis* et *syâks,* voyez M. Pihan, p. 210-212, p. 215-225 et p. 234-237, et M. Wœpcke, *Propag. des chiffres indiens,* p. 196. — 12) *Propag. des chiffres indiens,* p. 55-57. — 13) Voyez M. Pihan, p. 212-214. — 14) Ces chiffres manquent chez M. Pihan. — 15) Voyez M. Cantor, p. 259, et surtout M. Wœpcke, p. 55-56.

des Hébreux leurs 22 lettres soit cufiques, soit nisky, soit maghrebines, prises suivant l'ordre différent de ces alphabets, et, comme les Hébreux, ils procédèrent par addition audessus de 400. Mais, à partir du XI[e] siècle, pour exprimer les cinq derniers nombres de centaines et le nombre 1000, ils employèrent six lettres distinguées par des *points diacritiques*, qui marquaient aussi une différence de prononciation. C'est ce dernier système seul qui est donné par M. Pihan (p. 200-204), et il l'est à la fois en lettres *nisky* et en lettres *maghrebines*. M. Cantor ajoute que les lettres ainsi employées étaient soit les lettres finales, toutes d'une forme particulière en arabe comme en syriaque, soit les lettres ordinaires, mais surmontées d'un trait horizontal. Dans cette notation arabe, comme dans celle des autres peuples orientaux, les unités d'ordre supérieur se mettaient à droite des unités d'ordre inférieur. Mais, pendant que les Arabes perfectionnaient cette notation alphabétique des nombres, ils reçurent une autre notation d'origine étrangère, qui procédait de gauche à droite.

Les témoignages invoqués par M. Cantor (p. 259-260), et surtout ceux que M. Wœpcke a cités 16), nous font connaître l'histoire de l'introduction des sciences indiennes chez les Arabes orientaux, à Bagdad, dans la seconde moitié du VIII[e] siècle. Dans la première moitié du IX[e], le plus célèbre propagateur des sciences indiennes chez les Arabes, Mohammed ben Mousa Alkharizmi composa un traité du calcul indien, où se trouvaient employés les neuf chiffres indiens et le zéro avec valeur de position. Au milieu du IX[e] siècle, Alkindi écrivait, outre son traité d'arithmétique, un traité spécial sur le calcul indien, et Sind-ben-Ali écrivait un autre traité sur le même sujet vers la même époque 17). D'autres traités, en grand nombre, sur le calcul indien ont été composés au X[e] siècle et au XI[e] chez les Arabes orientaux 18). Cependant, chez eux, l'emploi des neuf chiffres avec le zéro et avec valeur de position n'est pas devenu vulgaire, comme chez les Européens 19), et la notation numérale en lettres arabes est restée prédominante 20). M. Cantor dit que chez les Arabes la notation en *chiffres indiens*, ainsi nommés par les Arabes eux-mêmes, est restée propre aux savants. M. Wœpcke 21) signale de plus ce fait, que, parmi les savants eux-mêmes, les astronomes arabes n'employèrent jamais que les lettres numérales dans leurs tables astronomiques, il remarque même que jusqu'au XV[e] siècle et au XVI[e] on trouve des traités arabes d'arithmétique où les nombres sont désignés par des mots numératifs, sans qu'on y rencontre un seul chiffre, et que, pour les opérations financières et commerciales, les chiffres *diwânis* et *syâks*, qui ne sont que des abréviations de la numération parlée, ont gardé la préférence.

Dans cet aperçu rapide de l'introduction de la notation indienne chez les Arabes d'Orient, j'ai suivi M. Cantor, en complétant ses indications par celles de M. Wœpcke. Dans l'histoire, plus importante pour nous, des chiffres employés par les Arabes occidentaux, il me semble nécessaire de suivre une autre marche, parceque les notions de M. Cantor sur ce point sont vagues et insuffisantes. Je vais donc exposer en peu de mots les faits que M. Wœpcke a mis en lumière; mais j'indiquerai quels sont ceux de ces faits que M. Cantor a signalés, et quels sont ceux qu'il a ignorés ou mal interprétés. Puis je combattrai des hypothèses ajoutées à ces faits tant par M. Wœpcke que par M. Cantor, et enfin j'oserai dire mon opinion sur cette question grave et difficile de l'origine des *chiffres gobâr*, et de leurs rapports avec nos chiffres modernes.

Les textes arabes cités par M. Wœpcke 22) mettent audessus de toute contestation ce fait, à peine entrevu par MM. Cantor, Friedlein et Gerhardt, que les neuf *chiffres gobâr* sont surtout les chiffres des

---

16) *Propag. des chiffres ind.*, p. 57-58, p. 60-62, p. 129-131 et p. 139-147, et *Introduction de l'arithmétique indienne en occident* (Rome, 1859, in-4), p. 51-52. Voyez aussi Cossali, *Lezioni II et III sull' aritmetica (Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni*, p. 323-334 (Roma, 1857, in-4). — 17) Voyez M. Wœpcke, *Prop. de chiffres ind.*, p. 156-157, et M. Cantor, p. 259-260. — 18) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 156 et suiv. — 19) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 129-131 et p. 194-196. — 20) Voyez M. Cantor, p. 260. — 21) *Introd. de l'arithm. ind. en occident*, p. 52-55, et *Propag. des chiffres ind.*, p. 129-132 et p. 195-196. — 22) *Propagations des chiffres indiens*, p. 32-44, et *Introd. de l'arithm. ind.*, p. 55.

*

Arabes occidentaux, par opposition aux *chiffres indiens,* transmis de l'Inde aux Arabes orientaux et par ceux-ci aux Byzantins. Ce sont les *chiffres indiens* qu'on trouve au XIV[e] siècles chez les moines byzantins Maxime Planude 23) et Néophytus 24). Cependant les mêmes textes arabes constatent que les neuf *chiffres gobâr* avaient aussi pénétré en orient, mais qu'ils y étaitent peu en usage, et qu'ils y avaient une forme un peu différente de celle des *chiffres gobâr occidentaux.* Les *chiffres gobâr d'Orient* sont les seuls que M. Cantor paraisse avoir connus et qu'il donne dans ses planches 25), mais sans savoir de quel peuple ils viennent (p. 262). M. Pihan, au contraire, dans son chapitre sur la numération arabe (p. 208-209), donne fort bien, sous le nom de *chiffres gobâr asiatiques,* les *gobâr orientaux,* et sous le nom de *chiffres gobâr maghrebins,* les *gobâr occidentaux.* M. Cantor (p. 261-262) croit que le système des neuf chiffres gobâr, en occident comme en orient, n'avait primitivement ni zéro ni valeur de position, l'ordre décimal de chaque chiffre étant toujours indiqué par autant de points mis audessus de chaque chiffre qu'il avait d'ordre décimaux audessous du sien, et cela soit qu'il y eût ou non des unités des ordres inférieurs. M. Pihan, au contraire, donne (p. 208-209) le système gobâr asiatique avec points audessus des chiffres sans zéro ni valeur de position, et le système gobâr maghrebin avec zéro et valeur de position. Mais M. Wœpcke 26) a prouvé que les Arabes ont employé de ces deux manières les neuf *chiffres gobâr* et les neuf *chiffres indiens*, en orient comme en occident, en mettant quelquefois des zéros circulaires au lieu de points audessus des chiffres 27).

De plus, M. Wœpcke 28) signale ce fait patent 29), qui a échappé à M. Cantor 30), que les *chiffres gobâr,* à peu près semblables aux *chiffres indiens* des Arabes pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, sont tout-à-fait différents de ces chiffres pour les nombres 5, 6, 7 et 8. En effet, Mohammed ben Mousa Al-kharizmi 31) déclare que, pour les figures de ces quatre chiffres seulement, *on n'est pas d'accord.* Au contraire tous les neuf chiffres des manuscrits de Boèce ont une ressemblance frappante avec les neuf chiffres gobâr, et surtout avec les neuf chiffres gobâr maghrebins, qui eux-mêmes sont tous très semblables à nos neuf chiffres modernes, de sorte que l'imitation des chiffres maghrebins explique la transition, qui s'est opérée, par l'écriture cursive du moyen-âge, entre les figures des chiffres des manuscrits de Boèce et les figures de nos chiffres 32). Enfin, M. Wœpcke 33) constate que les méthodes indiennes des Arabes orientaux s'introduisirent vers le X[e] siècle chez les Arabes Maghrebins de l'Afrique et de l'Espagne, qui gardèrent le zéro circulaire 34), tandis que les Arabes orientaux, ayant donné à leur 5 une forme presque circulaire et trop semblable à celle du zéro indien, remplacèrent celui-ci par un simple point, dont l'emploi avec la valeur du zéro n'était pas d'ailleurs sans exemple dans l'Inde même 35).

Connaissant fort peu les chiffres gobâr, et ne sachant pas même s'ils ont appartenu aux Arabes ou aux Juifs kabbalistes, M. Cantor (p. 161-162) est tenté de croire que leur ressemblance avec les chiffres

---

23) Voyez M. Wœpcke, *Introd.* etc., p. 27. Comparez *Propag.* etc., p. 193. — 24) Voyez M. A. Bœckh, Programme de l'Université de Berlin, semestre d'été de 1841, p. IX. Comparez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 193-194. — 25) Figure 45. Comparez les figures données par les textes arabes de M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 32-43, et celles de M. Pihan, p. 208. — 26) *Journal asiatique* de Paris, sept. et oct. 1854, p. 358, et *Propag.* etc., note 1 de la p. 63, et p. 182-183. Comparez les textes arabes (*Propag.*, p. 32-43), qui n'établissent entre la notation indienne et la notation gobâr aucune différence de méthode. — 27) Comme exemple des chiffres *indiens* avec un certain nombre de zéros placés audessus de chaque chiffre pour en marquer l'ordre décimal, M. Wœpcke cite une scolie du moine byzantin Néophytus, auquel M. Cantor (p. 262) n'aurait pas dû attribuer l'emploi des chiffres *gobâr.* Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., note de la p. 63 et p. 193-194. Comparez M. Cantor, note 497, p. 418. — 28) *Propag.* etc., p. 149-150 et p. 183-184. — 29) Voyez les chiffres *indo-arabes* mis à côté des chiffres *gobâr* dans un texte arabe publié par M. Wœpcke (*Propag.* etc., p. 37), ou bien la planche de M. Wœpcke (p. 49), ou bien encore les tableaux de M. Pihan, p. 207, et p. 208-209. — 30) M. Cantor (chap. XVI et XVII, p. 248 et 261) remarque seulement le grande ressemblance des chiffres gobâr avec les chiffres de Boèce. — 31) Traduction latine antique, sous le titre: *Algoritmi, de numero Indorum,* publiée par M. le prince Boncompagni, *Trattati d'aritmetica,* I, p. 1, l. 25, p. 2, l. 3. — 32) Voyez M. Wœpcke, *Introd. de l'arithm. ind.* p. 55-56; *Propag.* etc., p. 30-32 et p. 194; *Journal asiatique*, oct. et nov. 1854, p. 358. — 33) *Propag.* etc., p. 58-60, et p. 181-183. — 34) Voyez M. Pihan, *Exposé* etc., p. 209. — 35) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 151-154.

pythagoriques de Boèce vient de ce que les uns et les autres avaient été tirés d'un alphabet persico-babylonien, savoir: les chiffres pythagoriques par des grecs pythagoriciens d'une époque assez ancienne, et les chiffres gobâr probablement par des kabbalistes juifs. Après ce qui vient d'être dit, cette hypothèse n'a pas besoin de réfutation, et je pense que personne ne sera tenté de perdre son temps à la recherche de ce fabuleux alphabet persico-babylonien, dans lequel les neuf chiffres de Boèce et les neuf chiffres gobâr figureraient comme lettres.

Remarquant que tous les neuf chiffres gobâr ressemblent à tous les neuf chiffres pythagoriques de Boèce tandisqu'ils ne ressemblent qu'à ceux des chiffres indiens qui ont avec les chiffres de Boèce la même ressemblance, M. Wœpcke 36) n'hésite pas à déclarer que les chiffres gobâr sont les chiffres pythagoriques de l'abacus, empruntés par les Arabes occidentaux. En effet, pour des raisons que j'avais données 37) et que M. Wœpcke répète en me citant 38), l'usage de ces chiffres des Néopythagoriciens s'était peu répandu chez les Grecs, qui avaient une lettre numérale pour exprimer chaque nombre d'unités simples et d'unités d'ordres décimaux supérieurs; mais l'usage de ces neuf chiffres s'était répandu plus facilement, surtout depuis Boèce, chez les populations de l'occident romain, qui, ayant un système de notation numérale plus incommode que celui des Grecs, avaient avantage à accepter les neuf chiffres pour les calculs à faire sur l'abacus. Les Arabes occidentaux purent donc avoir ainsi de bonne heure les neuf chiffres, sans valeur de position en dehors de l'abacus, et sans zéro. Puis, vers le Xe siècle, initiés enfin à l'usage indien du zéro et de la valeur de position des chiffres en dehors de l'abacus, les Arabes occidentaux auraient abandonné l'abacus comme désormais inutile; ils auraient adopté la plus ancienne forme du zéro indien et indo-arabe, c'est-à-dire la forme circulaire; mais ils auraient gardé les chiffres de Boèce légèrement modifiés, et ils s'en seraient servis, sans *abacus,* pour les opérations du calcul indien, tout en gardant pour d'autres usages leurs lettres numérales; ils auraient donné a ces chiffres le nom de *gobâr,* qui signifie *poussière,* parcequ'au lieu de les tracer sur les *apices* destinés à être placés dans les colonnes de l'abacus, ils les écrivaient simplement avec le doigt sur un tableau couvert de poussière, soit que cet usage leur vînt des Indiens, comme M. Wœpcke paraît le croire 39), soit que les Arabes eussent déjà trouvé cet usage chez les peuples chrétiens de l'occident, comme il en reconnaît la possibilité 40), et comme c'est très probable d'après le témoignage de Jamblique sur l'antiquité de cet usage chez les Grecs 41).

A cette hypothèse si plausible M. Wœpcke a le tort d'en ajouter une autre inadmissible, pour expliquer l'origine des chiffres pythagoriques. Suivant lui, ces chiffres seraient les neuf chiffres indiens du IIe siècle de notre ère, transmis de l'Inde aux néopythagoriciens d'Alexandrie, mais sans la manière de les employer avec le zéro et avec la valeur de position hors de l'abacus. J'ai déjà combattu (chapitre IV) cette hypothèse: j'ai montré qu'elle s'appuie sur des rapprochements peu fondés, et surtout qu'elle est renversée par un fait que M. Wœpcke paraît n'avoir pas remarqué et que M. Cantor (chap. XVI, p. 239) et M. Piban (p. 41) ont constaté après moi, mais sans en tirer aucun parti. Ce fait, le voici.

Bien des siècles avant le IIe de notre ère, dès une haute antiquité, en Egypte, dans la notation hiératique des jours du mois, il n'y avait que cinq chiffres simples pour les nombres ordinaux audessous de 10, savoir ceux qui représentaient les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, les quatre autres nombres s'exprimant par la réunion de deux des quatre premiers chiffres. Or ces cinq chiffres hiératiques des Egyptiens étaient identiques pour la valeur numérale et très semblables pour la forme aux chiffres pythagoriques de Boèce, aux chiffres gobâr, aux chiffres indo-arabes et aux nôtres pour les cinq mêmes nombres 1, 2, 3, 4 et 9. Parmi les nombres audessous de 10, les quatre qui n'avaient pas de signes spéciaux et simples dans cette

---

36) *Introd.* etc., p. 55; *Propag.* etc., p. 31, p. 58-61, et p. 194. — 37) *Mém. sur les orig. de notre syst. de num. écr.*, VII, p. 43. — 38) *Propag.* etc., p. 54. — 39) *Propag.* etc. p. 59-60, p. 86-87, et p. 182-183. — 40) *Propag.* etc., p. 183, note 1. — 41) Voyez ci-dessus, chapitre X.

vieille notation hiératique ordinale des Egyptiens, c'est-à-dire les nombres 5, 6, 7 et 8, sont précisément ceux pour lesquels les chiffres indiens offraient beaucoup de différences de forme au Xe siècle suivant le témoignage d'Albirouni 42), et pour lesquels il y a différence complète entre les chiffres indiens et indo-arabes d'une part, et les chiffres pythagoriques, gobâr et européens modernes d'autre part. Ces faits si concordants ne peuvent pas être dûs au hasard, et toute hypothèse qui ne peut pas se concilier avec eux est par cela même condamnée. Or tel est le sort de l'hypothèse de M. Wœpcke, qui fait venir de l'Inde à Alexandrie au IIe siècle de notre ère ces neuf chiffres dont cinq étaient si antiques en Egypte.

Y a-t-il une hypothèse qui satisfasse à ces faits et en même temps à tous les autres faits bien constatés? Je le crois, et je vais la soumettre à l'examen des savants. Elle se résume dans les propositions suivantes, dont les unes sont certaines, dont les autres, prises isolément, me semblent au moins probables, et dont l'ensemble me paraît offrir un haut degré de probabilité.

1°. Suivant une supposition vraisemblable, que j'avais déjà émise 43) en 1857, les populations couchites, répandues primitivement en Ethiopie, dans le Sud de l'Arabie et sur les côtes méridionales de l'Asie jusqu'au delà des bouches du Gange 44), avaient une notation numérale analogue à celle des anciens Egyptiens. Pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, ces populations avaient des chiffres à peu près semblables aux chiffres antiques de l'Egypte pour ces mêmes nombres, chiffres qui se conservèrent dans la notation hiératique ordinale des Egyptiens pour les jours du mois, et chez ces peuples, de même que dans cette notation égyptienne, les nombres 5, 6, 7 et 8 s'exprimaient par la juxtaposition de deux des quatre premiers chiffres.

2°. C'est à cette vieille notation hiératique des Egyptiens pour les jours du mois, que les Néopythagoriciens d'Alexandrie ont emprunté ces cinq chiffres pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9, en les modifiant un peu et en donnant à leurs formes des interprétations symboliques. Ils y ajoutèrent, pour les nombres 5, 6, 7 et 8, quatre autres chiffres, dont les figures, probablement empruntées, avec des modifications, à des alphabets sémitiques, furent adaptées de même à leur symbolisme. Ensuite, à l'ancien *abacus* à rainures, où les nombres se marquaient avec des jetons ou avec des fiches mobiles, ils substituèrent un *abacus* dont les colonnes, tracées en couleur ou dans la poussière sur une surface plane, recevaient les neuf chiffres écrits sur des pièces mobiles nommés *apices*, et ces chiffres prenaient une valeur de position suivant la colonne où on les posait.

3°. Cet *abacus* des Néopythagoriciens, avec ses apices et ses neuf chiffres, trouva faveur surtout chez les peuples latins, auxquels il fut transmis par Archytas le jeune et recommandé par Boèce. En effet, cette invention des neuf chiffres était plus utile pour les latins, parce qu'ils n'avaient pas, comme les Grecs, une seule lettre pour exprimer chacun des neuf nombres d'unités de chaque ordre décimal. L'usage de cet abacus se perpétua chez les peuples de langue latine au moyen-âge. Mais on supprima les *apices*, et on écrivit directement les neuf chiffres dans les colonnes d'un abacus tracé sur un tableau ou sur du papier.

4°. D'un autre côté, peut-être dès avant de posséder une écriture alphabétique, les Indiens avaient probablement emprunté aux restes des populations couchites que leurs ancêtres avaient trouvées autrefois sur le sol de l'Inde en s'y établissant, le système de cinq chiffres peu différents de ceux de la notation hiératique ordinale des Egyptiens pour les jours du mois. Mais, au lieu d'exprimer par deux chiffres les nombres 5, 6, 7 et 8, ils imaginèrent pour ces nombres quatre chiffres entièrement étrangers par leurs figures au système couchite et égyptien, à celui des néopythagoriciens d'Alexandrie, au système gobâr

---

42) Voyez M. Wœpcke, *Propag.* etc., p. 149-150. — 43) *Rech. nouv. sur les orig. de notre syst. de num. écr.*, VIII, p. 56. — 44) Voyez la *Genèse*, X, 6-20. Comparez M. Lenormant, *Cours d'histoire ancienne*, chap. VI (Paris, 1838, in-8.); M. d'Eckstein, *les Ethiopiens de l'Asie* (*Athenæum français*, IIIe année (1854), p. 364-368, et *Questions relatives aux antiquités des peuples sémitiques* (*Revue archéol.*, XIIe année, p. 578-580, 583, 586 et 588), et M. Renan, *Hist. génér. des langues sémitiques*, 1, 2, § 1 et 3, p. 32-33 et p. 53-54 (1e éd.).

et au nôtre. Très adonnés aux calculs numériques, les Indiens avaient depuis longtemps une notation très nette de la distinction des différents ordres décimaux d'unités: ils comprirent la possibilité et l'utilité d'exprimer tous les nombres avec leurs neuf chiffres et avec le zéro, imaginé par eux pour marquer les plans vides dans les différents ordres décimaux. A une époque inconnue, mais certainement antérieure au Ve siècle de notre ère, ils arrivèrent ainsi à un système très préférable à celui de l'abacus des pythagoriciens.

5°. Les Arabes mahométans empruntèrent d'abord les notations numérales des peuples conquis; par exemple, les Arabes orientaux prirent ici les lettres coptes de l'Egypte, là les lettres numérales grecques restées en usage sous les Romains et les Byzantins dans l'ancien empire des Séleucides, sans valeur de position. Plus tard ils employèrent de même les lettres de leur alphabet *cufique,* puis celles de leur alphabet *nisky*, puis concurremment leurs abréviations *diwâni,* que les Persans et les Turcs imitèrent par leurs abréviations *siyâk.* Chez les Arabes d'orient, les notations numérales alphabétiques restèrent toujours dominantes. Cependant, dès le milieu du VIIIe siècle, ils avaient connu les sciences indiennes, et, dès la première moitié du IXe siècle au plus tard, ils avaient connu et adopté, mais pour des usages assez restreints, les neuf chiffres indiens, qu'ils employèrent tantôt à la manière indienne avec le zéro et la valeur de position, tantôt en marquant l'ordre décimal de chaque chiffre par des zéros ou des points placés audessus. Ils transmirent aux Grecs byzantins leurs chiffres indo-arabes avec ces deux manières de les employer. Cependant ils connurent aussi de bonne heure et ils employèrent, avec de très légères différences de forme, les chiffres gobâr venus de l'occident.

6°. Les Arabes occidentaux n'acceptèrent probablement pas la notation numérale alphabétique des Romains, si incommode pour les calculs. Quand ils eurent leur alphabet *maghrebin*, ils en firent le même usage numéral que les Arabes orientaux faisaient de leur alphabet *nisky.* Mais ils connurent sans doute de bonne heure l'abacus pythagorique des Latins, avec ses colonnes tracées en couleur ou dans la poussière, et avec ses *apices* portant chacun un des neuf chiffres pythagoriques, dont cinq ressemblaient à cinq chiffres ordinaux hiératiques des Egyptiens, et par conséquent aussi aux cinq chiffres indiens correspondants. Plus tard, vers le Xe siècle, initiés aux sciences des Arabes orientaux, ils leur empruntèrent leurs deux méthodes de notation numérale avec neuf chiffres, l'une indienne avec le zéro et la valeur de position, l'autre arabe avec les points où les zéros audessus de chaque chiffre pour en marquer l'ordre décimal. Mais, au lieu de prendre les chiffres indiens des Arabes orientaux, ils gardèrent et ils adaptèrent à ces deux procédés leurs neuf chiffres, qui étaient les neuf chiffres pythagoriques légèrement modifiés, et comme ils prirent l'usage grec et indo-arabe de faire les calculs sur un tableau couvert de poussière, ils donnèrent à leur méthode de notation et à leurs chiffres le nom de *gobâr,* qui signifie *poussière.*

7°. Depuis le commencement du XIIe siècle, chez les peuples chrétiens de l'occident, le terrain fut disputé aux *abacistes,* disciples des imitateurs de Boèce, par les disciples de la métode indo-arabe de notation numérale avec zéro et valeur de position. Mais l'imitation des chiffres *gobâr maghrebins* dans l'écriture cursive amena la transition des chiffres des manuscrits de Boèce à nos chiffres modernes.

8°. Ainsi les Néopythagoriciens d'Alexandrie avaient emprunté cinq de leurs neuf chiffres à l'Egypte, et nos chiffres modernes sont les chiffres des néopythagoriciens, mais altérés d'abord par des transcriptions successives, puis assimilés notablement aux chiffres gobâr, qui étaient ces mêmes chiffres pythagoriques un peu modifiés par les Arabes occidentaux. Nos neuf chiffres ne sont donc ni *arabes,* ni *indiens* ou *indo-arabes,* comme on l'a tant répété: ils sont *égypto-alexandrins,* avec quelque *influence maghrebine.* Si cinq d'entre eux ressemblent aux cinq chiffres indo-arabes correspondants, c'est parceque ceux-ci avaient, avec les cinq chiffres égyptiens correspondants, une ressemblance qui tenait à une très antique communauté d'origine.

9°. Ce qui est *indien* ou *indo-arabe,* et bien plus important que les figures arbitraires des neuf chiffres, dans notre notation numérale moderne, c'est le *zéro* et la méthode pour écrire tous les nombres avec les *neuf chiffres et le zéro, sans abacus à colonnes.* Mais, entre la notation numérale alphabétique

des Romains et notre notation moderne, la *méthode néopythagorique de l'abacus à colonnes, avec neuf chiffres et valeur de position,* avait été un intermédiaire d'une importance capitale, et dont l'introduction en occident avait constitué un grand progrès, par rapport à l'*ancien abacus à jetons et sans chiffres*, sur lequel la *valeur de position* existait, mais chaque jeton ne représentait qu'une unité de chaque ordre décimal.

XVIII. Art du calcul chez les Arabes. 1)

Après nous être laissé entraîner, à la suite de M. Wœpcke, dans des questions graves que M. Cantor avait à peine effleurées, revenons à ce dernier savant, pour ne plus le quitter que bien peu jusqu'à la fin de son livre. Dans son plan un peu vague, l'histoire de l'arithmétique se mêlant à celle des systèmes de numération, M. Cantor n'en a pas fini avec les Arabes. Au commencement de ce chapitre, il rappelle qu'à Bagdad, à la fin du VIIIe siècle et au IXe, sous le calife Almansor et sous ses successeurs, des Indiens apportèrent aux conquérants arabes des notions et des livres surtout astronomiques, tandisque des médecins nestoriens les initièrent aux connaissances de l'occident, et que dès lors des ouvrages grecs furent traduits en arabe. Il fait ressortir l'intérêt que les relations du calife Haroun-al-Rachid avec Charlemagne présentent pour l'histoire de l'astronomie et de la mécanique. Il mentionne la fondation de l'académie de Bagdad et des écoles de Coufa et de Bassora sous Almamoun, et les traductions d'ouvrages indiens, puis des principaux ouvrages grecs sur les mathématiques et l'astronomie, faites au IXe siècle sous ce même calife.

M. Cantor revient en passant 2), et d'une manière malheureuse, sur une question qui appartient au chapitre précédent, mais qu'il n'y avait qu'effluerée. Pour savoir si les *chiffres* nommés *indiens* par les Arabes orientaux venaient réellement de l'Inde, il les compare avec des chiffres indiens modernes 3) et avec des chiffres indiens des trois premiers siècles de notre ère, pour lesquels il adopte les fausses évaluations de M. Prinsep 4). De la différence observée, il croit pouvoir conclure que les *chiffres* dits *indiens* par les Arabes de Bagdad, au lieu de venir de l'Inde, avaient été empruntés aux Néopythagoriciens d'Alexandrie. Il ignore que l'origine vraiment indienne de ces chiffres est confirmée par la ressemblance que M. Wœpcke 5) a constatée entre des *chiffres indo-arabes* du Xe siècle 6) et les *chiffres dévanagaris* des Indiens de la même époque 7); tandisque, comme nous l'avons montré (chapitre XVII), les *chiffres pythagoriques* des derniers temps de l'Ecole d'Alexandrie, inconnus à tous les grands mathématiciens grecs, et propagés surtout chez les Latins avec l'abacus à colonnes tracées en couleur ou sur la poussière, devinrent les *chiffres gobâr* des Arabes occidentaux, très différents des *chiffres indiens* et *indo-arabes* pour les nombres 5, 6, 7 et 8.

Ensuite M. Cantor aborde l'objet principal de ce chapitre, c'est-à-dire les méthodes arabes de calcul. Il regrette de n'avoir à sa disposition que trois grands documents, mais heureusement choisis par le hasard pour faire connaître l'état de l'arithmétique au IXe siècle à Bagdad, au XIIe siècle chez les Arabes et chez les Juifs d'Espagne, et au XVIe chez les Musulmans orientaux.

Le premier de ces documents, l'*Arithmétique* de Mohammed ben Mousa *Alkharizmi* (c'est-à-dire né dans la province de Kharizm ou Khowarezm à l'est de la mer Caspienne), est le traité le plus concis et

---

1) *Arabische Rechenkunst*, p. 267-275. — 2) Chap. XVII, p. 260-261, et chap. XVIII, p. 265-266 et p. 270. — 3) Figure 50, et figures 21 et 22 de M. Cantor. — 4) Figure 50, et figure 23, ligne 3, de M. Cantor. Comparez le tableau de M. Pihan, p. 63, et ce que j'ai dit ci-dessus (chapitre IV) sur les chiffres indiens de M. Prinsep, comparés à ceux de MM. Thomas et Stevenson. — 5) *Propag.* etc., p. 149-150. — 6) Manuscrits arabe N. 952 du supplément Arabe de la Bibliothèque impériale de Paris. Comparez M. Wœpcke, *Rech. sur les ouvrages de Léonard de Pise*, I^e^ Partie, *Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits* III, p. 8 et 26 du tirage à part (Rome, 1861, gr. in-4.). Extrait des *Atti dell' Accad. pont. dei nuovi Lincei*, t. 14, janvier 1861. — 7) *Journal de la société asiatique du Bengale*, avril 1838, planche XX, en regard de la p. 348.

le plus clair sur la méthode indienne, et ce traité est resté le modèle des traités de calcul chez les Arabes et chez les Européens pendant l'influence arabe. Le mot *algoritmus,* qui désignait dans le latin du moyen-âge, l'*arithmétique de position,* mot pour lequel on inventa dès le XIII[e] siècle des étymologies aussi nombreuses que byzarres 8), est résulté d'une altération du mot *Alkarizmi,* surnom qui marquait la patrie de cet arithméticien par excellence, et qui servait à le distinguer de l'algébriste Mohammed ben Mousa ben Shaker 9). Cette étymologie, trouvée par M. Reinaud et vainement contestée, a reçu, comme le dit M. Cantor, une confirmation éclatante, quand M. le prince Boncompagni a découvert et publiée 10) un ouvrage latin qui, au jugement de M. Chasles, doit être une traduction littérale plutôt qu'une imitation de l'*Arithmétique* de Mohammed ben Mousa, et dont le rédacteur est probablement Adelart de Bath, moine anglais du commencement du XII[e] siècle. En tête de chaque article de cette *Arithmétique,* on lit: *Algoritmi* a dit. Or il est vrai qu'Albirouni était aussi surnommé Alkharizmi; mais il n'avait pas écrit sur l'algèbre, et l'auteur du traité traduit renvoie à son *Algèbre.* C'est donc bien Mohammed ben Mousa.

Après des invocations d'un caractère vraiment arabe au *Directeur de toutes choses,* Alkharizmi enseigne la manière indienne d'exprimer tous les nombres, grands ou petits, par neuf signes, sur les figures de quatre desquels, savoir, du 5, du 6, du 7 et du 8, *les hommes,* dit-il, *ne sont pas d'accord.* Albirouni dit que ces variétés de forme pour ces quatre chiffres existent *chez les Indiens.* M. Cantor (p.270) pense que le premier a voulu signaler un désaccord existant entre les Indiens et d'autres peuples pour les figures de ces quatre chiffres. Cette interprétation, qui me paraît être aussi celle de M. Wœpcke 11), est conforme au sens naturel des expressions d'Alkharizmi; mais M. Cantor n'aurait pas dû contester l'assertion d'Albirouni sur les variantes de ces quatre mêmes chiffres chez les Indiens 12), et il se trompe certainement, quand il prétend que les Arabes de Bagdad avaient emprunté aux Indiens la méthode seulement, et non les figures des chiffres. Le texte d'Alkharizmi me paraît indiquer, au contraire, que de son temps, tout en employant à Bagdad les *chiffres indiens*, on y connaissait aussi les *chiffres gobâr orientaux* 13). En effet, nous avons vu qu'entre les *chiffres indiens* des Arabes et leurs *chiffres gobâr,* la différence portait principalement sur les chiffres 5, 6, 7 et 8, et que cette différence s'explique, parceque les chiffres gobâr viennent des chiffres pythagoriques, tandisque les chiffres indo-arabes viennent bien réellement de l'Inde, quoique M. Cantor en puisse dire 14).

Mohammed ben Mousa Alkharizmi 15) dit que les neuf signes peuvent se trouver à diverses places, nommées *différences*, et que, si une *différence* reste vide, on y met un *petit cercle,* pour montrer qu'aucun nombre ne s'y trouve. Evidemment le mot *différence* signifie ici l'*ordre décimal,* et le *petit cercle* est le *zéro.*

La suite de l'*Arithmétique* d'Alkharizmi donne, pour l'addition et pour la soustraction, quelques règles, dont voici le résumé. Dans l'addition, si la somme des chiffres occupant une même *différence,* c'est-à-dire un même *ordre décimal*, donne un nombre supérieur à 9, on écrit à ce même ordre le chiffre exprimant le reste de la division par 10; si ce reste est nul, on met un petit cercle, c'est-à-dire un zéro, pour que l'ordre ne reste pas vide; le nombre des dixaines s'ajoute à l'ordre supérieur. Pour l'addition, Alkharizmi (p. 8) procède, comme nous, de droite à gauche en commençant par les unités simples. Mais, arrivant à la soustraction (p. 8-10), il conseille de procéder plutôt de gauche à droite en commençant par l'ordre décimal les plus élevé, et il dit (p. 9) qu'il vaut mieux procéder de même dans l'addition,

---

8) Voyez M. Cantor, p. 266-268. — 9) Contre cette confusion, commise aussi par Bailly et par Andres, voyez Cossali, *Lezione III sull'Aritmetica (Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni,* p. 332-334. Roma, 1857, gr. in-4). — 10) *Trattati d'Aritmetica*, I, p. 1-23 (Roma, 1857, gr. in-8), — 11) *Propag.* etc., p. 149-150. — 12) Voyez le chapitre précédent. — 13) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 14) Il est vrai, comme le dit M. Cantor (p. 270), que la position donnée par le traité d'Alkharizmi (p. 2) à l'unité *en dehors des nombres* repose sur une idée pythagorique, adoptée par les Juifs kabbalistes; mais, tout en accueillant cette idée occidentale, les Arabes de Bagdad ont pu adopter d'un autre côté les chiffres indiens, comme tant de preuves l'établissent. — 15) P. 3 et suiv. (éd. de M. le prince Boncompagni).

parceque c'est plus commode pour ces deux opérations. En ce qui concerne la soustraction, il mentionne (p. 8) le cas où, pour pouvoir faire une soustraction partielle, on est obligé d'emprunter à l'ordre décimal supérieur une unité, qui vaut 10. Mais, dans ses exemples de soustractions commençant par la gauche (p. 1-10), il n'y a aucun emprunt à faire. Une troisième et une quatrième opération consistent à doubler un nombre ou bien à en prendre la moitié (p. 10). Suivent les règles détaillées de la multiplication (p.10-12), avec celles de la *preuve par* 9 (p. 12-13), qui consiste à trouver, pour reste de la division par 9 du produit des deux facteurs, un nombre égal au reste de la division par 9 du produit des restes de la division par 9 de chacun des deux facteurs. Ensuite viennent les règles de la division (p.13-17), telle que nous la pratiquons de nos jours. Il n'y a dans le traité d'Alkharizmi aucune trace de la méthode de Boèce, dont l'usage resta général en Europe jusqu'au XIe siècle, c'est-à-dire de la *division complémentaire* ou *division à l'aide des différences* 16). Celle-ci vient de quelque néopythagoricien grec, qui l'avait transmise à Archytas le jeune, a qui Boèce l'a empruntée. Celle de Mohammed ben Mousa, qui n'est arrivée par l'influence arabe, est originaire de l'Inde.

Je m'arrête ici, pour remarquer que M. Wœpcke 17) a signalé chez Alkharizmi et chez des auteurs arabes postérieurs l'application de la *preuve par* 9 aux duplations, aux multiplications et aux élévations des nombres au carré et au cube: la place tenue par cette preuve dans le calcul indien montre, au jugement de M. Wœpcke, qu'elle est d'origine indienne. Nous verrons (chapitre XX) que telle est aussi la pensée de M. Cantor.

A la fin de son traité (p. 17-23) Mohammed ben Mousa rattache à la division le calcul des fractions sexagésimales: il remarque que les Indiens divisaient l'unité en soixante minutes, la minute en soixante secondes, la seconde en soixante tierces, et ainsi de suite. Mais les Indiens eux-mêmes avaient pu emprunter ces fractions sexagésimales aux astronomes grecs alexandrins, comme le dit M. Cantor, ou bien ajouterai-je; aux Babyloniens, chez qui nous avons constaté (chapitre II) l'usage antique de ces mêmes fractions.

De cette analyse, M. Cantor conclut que Mohammed ben Mousa ignorait ou omettait la *division complémentaire* de Boèce. Pour déclarer que les Arabes l'ignoraient, il attend à avoir examiné les deux autres ouvrages, qui vont nous faire connaître ce que l'arithmétique était devenue au XIIe siècle en Espagne et au XVIe en Orient.

M. Cantor rappelle les grandeurs des Ommiades en Espagne depuis le milieu du VIIIe siècle et surtout au Xe, et les merveilles de leur architecture, qui supposait des connaissances mathématiques. En effet, M. Wœpcke 18) a publié en 1854 des extraits d'une algèbre rédigée en Espagne dans la seconde moitié du XVe siècle, mais d'après les écrits d'Ibn Albannâ, qui vivait vers 1200 et qui lui-même avait puisé dans des écrits antérieurs d'Arabes d'Espagne, et cette *algèbre* est très supérieure, pour la notation algébrique, aux autres traités du XVe siècle. D'un autre côté, on connait la célèbre *algèbre* de Geber de Séville, contemporain d'Ibn Albannâ et considéré faussement comme ayant donné son nom à l'algèbre 19).

---

16) Voyez ci-dessus, chap. XV. — 17) *Propag.* etc., p. 163, note 4, et p. 167-172. — 18) *Journal Asiatique*, 1854, Série V, t. 4, p. 348-384. — 19) J'ajoute ici une explication que M. Cantor ne parait pas avoir bien connue. Le mot *aljebr* est le premier des deux mots arabes *aljebr v'almukabalah*, qui expriment deux opérations nécessaires pour la simplification des équations. Le procédé nommé *aljebr (rétablissement)* consiste à ajouter aux termes positifs d'un des membres de l'équation des quantités respectivement égales aux termes négatifs semblables qu'on efface dans l'autre membre. Le procédé nommé *almukabalah (opposition)* consiste à soustraire des termes positifs d'un des deux membres de l'équation des quantités respectivement égales aux termes semblables positifs qu'on efface dans l'autre membre. L'*art majeur*, ou *art de la chose*, c'est-à-dire ce que nous nommons l'*algèbre*, embrassait la mise en équation, la simplification des équations et leur résolution. Mais les Arabes donnaient vulgairement à l'*art majeur* tout entier le nom des deux opérations de simplification, *aljebr v'almukabalah*. Voyez Cossali, *Memorie Storico-Scientifiche*, *Rifl.* XVII, p. 381-384 *(Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni)*.

Quant à l'arithmétique des Arabes d'Espagne, M. Cantor l'a étudiée dans le traité rédigé au XII$_e$ siècle par le juif Jean de Séville 20), qui, à la prière de Raimond, archevêque de Tolède, de concert avec le chrétien Gondisalvi, avait traduit d'abord en castillan, puis du castillan en latin, des livres arabes de philosophie. Le *Livre d'Algorismi sur la pratique de l'arithmétique, publié par maître Jean de Séville,* a été imprimé par les soins de M. le prince Boncompagni 21). M. Cantor soupçonne qu'il a passé de même par deux traductions, et que dans la rédaction latine beaucoup d'expressions du texte arabe ont été altérées et assimilées à celles des traités latins de l'époque sur le même sujet. Telles seraient, par exemple, les expressions *nombres digitaux* et *nombres articulaires*, expressions étrangères aux Arabes soit d'orient soit d'occident, mais empruntées sans doute à Boèce et substituées par les traducteurs aux expressions arabes *unités* et *dixaines*. D'autres fois, certains mots traduits littéralement de l'arabe ont dans le latin du temps une tout autre signification: par exemple, le mot *différence*, chez Jean de Séville comme chez Mohammed ben Mousa Alkharizmi, désigne l'ordre décimal de chaque chiffre, et n'a rien de commun avec les *différences* employées dans la *division complémentaire* de Boèce. Cette méthode de division est inconnue à Jean de Séville comme à Mohammed.

Elle l'est de même à Beha-Eddin, persan du XVIe siècle, dont l'opuscule sur l'*Essence du calcul* 22) représente les connaissances arithmétiques des orientaux à cette époque. M. Cantor regrette de ne l'avoir connu qu'après la rédaction des dix-sept premiers chapitres de son livre. Cependant ce qu'il en a vu, joint à la lecture des traités de Jéan de Séville et de Mohammed ben Mousa Alkharizmi, a achevé de lui prouver qu'en Perse au XVIe siècle, comme en Espagne au XIIe et à Bagdad au IX$_e$, la *méthode complémentaire* pour la division est restée étrangère à l'arithmétique arabe en orient comme en occident.

Chez Jean de Séville, le zéro est encore nommé *petit cercle,* bien que la figure d'un simple point fût devenue prédominante chez les Arabes 23), et l'emploi du zéro est expliqué avec un peu plus de détails que chez Mohammed ben Mousa.

Jean de Séville et Beha-Eddin étendent la *preuve par* 9 à l'addition et à la soustraction. Mais, chez Jean de Séville 24), on trouve une innovation bien autrement importante, et à l'origine de laquelle M. Cantor regrette de n'avoir pas pu remonter. Après avoir enseigné l'extraction de la racine carrée avec *fractions* sexagésimales, à peu près comme le grec Théon dans son *Commentaire* sur Ptolémée, le juif espagnol disciple des Arabes ajoute l'extraction de la racine carrée avec *fractions décimales,* à peu près comme Jérôme Cardan, chez qui M. Cantor, avant de connaître le traité de Jean de Séville, avait cru en trouver la première trace. Ainsi, dès le XIIe siècle, l'emploi de l'arithmétique indienne de position avait conduit les Arabes à continuer la loi de position audessous de l'unité, et à comprendre l'avantage des fractions décimales ainsi notées.

XIX. Isidore, Bède, Alcuin. 1)

M. Cantor montre que les deux chapitres précédents, sur les chiffres et l'arithmétique des Arabes, se rattachent à l'étude des chiffres de Boèce et même à la question de l'antiquité des deux passages de sa *Géométrie* sur l'abacus et sur le calcul des fractions. En effet, ces deux chapitres prouvent que les procédés de calcul des Arabes (et M. Cantor aurait dû dire de plus: les chiffres indo-arabes eux-mêmes) sont autres que ceux de Boèce; que les méthodes sont différentes de part et d'autre par leurs principes

20) Jean de Séville, autrement nommé Jean Avendehut ou Jean David, florissait en Espagne de 1130 à 1150. Il est peut-être le même que David le Juif, mentionné par Albert le grand. Voyez M. Steinschneider, *Les ouvrages du prince Boncompagni concernant l'histoire des mathématiques*, p. 8 (Rome, 1859, in-4, 9 pages). — 21) *Trattati d'aritmetica*, II, p. 25-136. — 22) Traduction publiée par M. Nesselmann (Berlin, 1843). — 23) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 24) *Trattati d'aritmetica*, II, p. 87-90. — 1) *Isidor, Beda, Alcuin*, p. 276-291.

mêmes, et que la méthode de Boèce nécessite l'emploi de l'abacus, tandisque celle des Arabes n'en a pas besoin, à cause du zéro, qui se met dans les places vides. D'où M. Cantor conclut: 1°. que quiconque a été initié au calcul par les Arabes doit nécessairement leur avoir emprunté le zéro sous forme de cercle ou de point; 2°. que la *Géométrie* de Boèce dans sont entier, et spécialement les deux passages sur le calcul des nombres entiers et des fractions au moyen de l'abacus, ne peuvent pas être l'œuvre d'un mathématicien formé à l'école des Arabes, mais sont bien l'œuvre de Boèce, héritier, et vulgarisateur chez les Latins, de procédés arithmétiques imaginés à Alexandrie sous l'inspiration du néopythagorisme.

Déjà M. Cantor nous a signalé dans la *Géométrie* de Cassiodore et dans une lettre de Théodoric 2) des indications de l'influence scientifique que Boèce a exercée de son temps dans l'Europe occidentale. Le développement de cette influence se montre chez les écrivains occidentaux des siècles suivants.

M. Cantor interroge d'abord le saint évêque Isidore de Séville, postérieur d'un siècle à Boèce. Au commencement de ses *Origines*, Isidore, définit, comme Boèce et Cassiodore, les sept sciences dont se composent le *trivium* et le *quadrivium*. Dans son IIIe livre, l'arithmétique théorique tient la première place: il se réfère à Apulée et à Boèce. Après des étymologies étranges des noms de nombre latins, on retrouve dans ce IIIe livre quelques unes des considérations des Pythagoriciens, et de Boèce (abréviateur de Nicomaque), sur les propriétés générales des nombres. Quant à l'arithmétique pratique, c'est-à-dire à l'art du calcul, il n'en est pas question. La géométrie, la musique et l'astronomie d'Isidore de Séville, dans ce même livre des *Origines*, se réduisent à une maigre compilation de définitions.

Un siècle plus tard, écrivait le prêtre anglais Bède, moine et professeur sur la frontière d'Ecosse, dans un cloître riche en livres de mathématiques: il y composa de nombreux ouvrages pendant la première moitié du VIIIe siècle. Parmi ses œuvres authentiques, énumérées dans un catalogue dressé par lui quatre ans avant sa mort, il y a un traité de chronologie, auquel appartiennent, comme premier et quatrième chapitres, deux opuscules souvent considérés comme isolés, l'un *sur le calcul par les doigts*, l'autre *sur le calcul par onces*, c'est-à-dire par douzièmes et subdivisions plus petites d'une unité quelconque. Dans le premier opuscule, il décrit une manière d'exprimer les nombres par la position des doigts, et il déclare que certaines allusions de saint Jérôme prouvent qu'il connaissait cette méthode. Dans l'autre opuscule, en exposant la division de l'*as* ou unité en fractions composées chacune d'un certain nombre d'*onces* ou douzièmes, et la division de l'once elle-même en fractions, Bède annonce qu'il va donner à la fois les noms et les signes de toutes ces fractions. Ces signes, qui ont été omis à tort dans la bonne édition de Giles 3), mais qui se trouvent dans les éditions antérieures, sont presque tous identiques à ceux que M. Cantor à découverts dans un manuscrit de Berne, et à ceux que M. Halliwell a trouvés dans un manuscrit d'Angleterre. Mais ces 18 signes de Bède, dont 12 représentent des fractions de l'*as*, et dont 6 représentent des fractions de l'*once*, ne peuvent pas avoir été, comme M. Cantor le suppose, identiques aux 10 signes pythagoriques des fractions de l'*once*, donnés dans un ouvrage latin du grec Archytas, et que Boèce a remplacés par les dix premières lettres de l'alphabet latin 4). Car nous avons prouvé que les deux systèmes de fractions sont très différents indépendamment des signes, que celui d'Archytas et de Boèce est un système grec arrangé par les néopythagoriciens, mais que celui de Bède est le vieux système romain complet de Volusius Mæcianus, sur lequel l'autorité de Boèce n'a pas fait prévaloir celui d'Archytas. Cependant il est possible que l'ouvrage suivi par Bède ait contenu la série des neuf chiffres donnés par Boèce pour les nombres de 1 à 9; car Bède a pu omettre volontairement cette série des neuf chiffres, comme Boèce avait omis la série des signes pour les fractions. Quoi qu'il en soit, M. Cantor dit que le chiffre 4 de Boèce ressemble beaucoup au signe que Bède donne pour 4 onces. Cette ressemblance est réelle; seulement M. Cantor aurait dû remarquer qu'elle concerne une forme fautive donnée au 4 de Boèce sur la figure de l'abacus, altérée par les copistes, mais non la forme

---

2) Voyez ci-dessus, chapitre XIII, notes 2 et 10. — 3) Londres, 1843, 12 volumes in-8. — 4) Voyez ci-dessus, chapitre XV.

vraie, donnée dans le texte authentique des manuscrits. Parmi les 18 signes de Bède pour les fractions, quelques uns seulement ressemblent à ceux de Volusius Mæcianus pour ces mêmes fractions romaines, mais aucun ne ressemble à la forme authentique d'un des 9 chiffres pythagoriques de Boèce.

Quant à un traité *Sur l'abacus*, imprimé dans les œuvres de Bède, M. Cantor avoue qu'il est de Gerbert. Mais il promet de montrer, dans le chapitre XX, que probablement Bède connaissait l'*abacus* de Boèce et en avait décrit l'usage à ses élèves. Nous verrons que malheureusement M. Cantor s'appuiera sur une fausse interprétation d'un texte d'Odon de Cluny. Ici M. Cantor ajoute que Bède aurait pu lire la théorie de l'abacus chez son auteur nommé Victorius et dont M. Chasles 5) a trouvé le nom cité par des abacistes postérieurs à Gerbert. M. Cantor pense que ce Victorius doit être celui qui fut chargé par le pape saint Léon le Grand de fixer le comput pascal, quelques années avant la naissance de Boèce.

M. Cantor passe aux œuvres de l'anglo-saxon Alcuin, qui, né à York en 735, année de la mort de Bède, fut directeur de l'école d'York depuis 760 jusqu'à 781, propagateur de l'instruction dans les états de Charlemagne depuis cette dernière époque, et directeur de l'école de Saint Martin de Tours depuis 796 jusqu'à 804, date de sa mort. L'enseignement des éléments du calcul avait sa place dans les écoles, à côté de celui du comput ecclésiastique et des éléments de l'astronomie. Mais, quand on écrivait des livres, c'était plutôt sur ce qui dépassait cet enseignement élémentaire. Ainsi un ouvrage intitulé *Problèmes et solutions arithmétiques*, ouvrage imprimé dans les éditions de Bède et dans celles d'Alcuin, mais qui certainement n'est pas du premier et qui paraît être du dernier, résout des problèmes dont quelques uns sont analogues à ceux du grec Diophante, que peut-être Alcuin ne connaissait même pas; car, ayant à traiter un problème indéterminé, il ne donne qu'une des sept solutions possibles. Un de ces problèmes enseigne à faire la somme d'une progression arithmétique, d'après cette remarque, que l'addition de deux termes placés symétriquement à partir des deux extrémités de la progression donnent toujours la même somme. D'autres problèmes plus faciles supposent pourtant une main exercé à la multiplication et à la division, et quelques uns supposent la connaissance de certaines formules d'arpentage.

Cet ouvrage est attribué à Alcuin par un très ancien manuscrit de Reichenau. De plus, en faveur de cette attribution, M. Cantor cite un passage d'une lettre par laquelle Alcuin annonce à Charlemagne l'envoi de *quelques exemples de calculs subtils d'arithmétique*. Tel me paraît être le sens des mots: *aliquas figuras arithmeticæ subtilitatis*. M. Cantor traduit *figuras* par *essais (Proben)*: ce qui, sans traduire exactement le mot, ne s'écarte pas du sens général de la phrase. Mais ensuite il propose une autre explication, que je ne puis accepter, et d'après laquelle le mot *figuras* signifierait soit les neuf *chiffres*, soit la *figure de l'abacus*. Mais la figure unique de l'*abacus* ne comporte pas le pluriel *aliquas figuras*; le nombre précis de *neuf* chiffres ne comporte pas le mot vague *aliquas*, qui va bien à un recueil de problèmes plus ou moins nombreux; de même, le mot *subtilitatis* convient bien à des *problèmes*, et non à des *chiffres*.

Une découverte faite, il y a environ 17 ans, par M. Bethmann dans la bibliothèque capitulaire d'Ivrée 6) paraît à M. Cantor offrir une preuve de la connaissance qu'Alcuin aurait eue des neuf chiffres et des méthodes de calcul de Boèce. Un manuscrit in-folio du XIe siècle, écrit tout entier de la même main, et contenant l'ouvrage de Martianus Capella et les traités de saint Augustin et de Boèce sur la musique, a pour garde deux feuillets d'un autre parchemin, dont le premier porte une *Introduction à la division*, écrite par une main du Xe siècle, et où deux vers nomment Flaccus et le Franc Aribert. Or, parmi les savants réunis autour de Charlemagne, Flaccus était le pseudonyme d'Alcuin, qui était connu sous ce nom, même en dehors de l'académie impériale. M. Bethmann dit que dans cet opuscule les *chiffres arabes* sont employés à côté des chiffres romains dans un même exemple. M. Cantor ne doute pas que M. Bethmann

---

5) *Geschichte der Geometrie*, p. 591, note 233, traduction allemande de M. Sohncke. — 6) Voyez les *Archives de la société pour l'histoire ancienne d'Allemagne*, recueil allemand publié par M. Pertz, t. 9, p. 623.

ne nomme ici *chiffres arabes* les neuf chiffres de Boèce, et il pense que, si M. Bethmann avait tenu sa promesse de faire mieux connaître cet opuscule, on verrait qu'il contient la méthode de Boèce pour la division, c'est-à-dire la *méthode complémentaire* ou *des différences*. Ainsi Alcuin aurait connu le calcul avec les neuf *signes pythagoriques* de Boèce sur un abacus tracé à la main 7).

Je dois dire qu'un autre renseignement, trop vague aussi, communiqué par M. Bethmann à l'académie de Berlin et signalé par M. Wœpcke 8), me semble ne pouvoir que difficilement se plier à la même interprétation: d'après certaines données, que M. Bethmann n'a pas précisées, Charlemagne aurait proposé aux personnes de sa cour des problèmes d'arithmétique fondés sur l'emploi des neuf chiffres *et du zéro*. Si les données de M. Bethmann étaient vraiment probantes en faveur de l'emploi des neuf chiffres, *avec le zéro,* et *sans abacus*, à la cour de Charlemagne, il faudrait dire que dès l'an 807 la célèbre ambassade du calife Haroun-al-Rachid aurait apporté en occident cette connaissance, à peine introduite alors à Bagdad même 9). Mais M. Bethmann devrait être moins prompt à lancer des assertions, ou moins lent à les justifier par des documents. En attendant les preuves, le plus sûr pour nous est de douter.

XX. Odon de Cluny. 1)

Sur Odon, abbé de Cluny au commencement du Xe siècle, M. Cantor donne une notice beaucoup moins développée que celle de M. Hauréau 2), mais plus exacte et plus complète sur les points qui concernent spécialement l'histoire de mathématiques.

Dans le recueil de traités musicaux publié au XVIIIe siècle par Martin Gerbert, abbé de Saint Blaise en Autriche, se trouvent plusieurs écrits dont l'auteur est nommé Odon. M. Cantor me félicite de les avoir signalés le premier à l'attention des historiens des mathématiques, et d'avoir soutenu qu'ils devaient être tous de l'abbé de Cluny. Le premier, *sur la série des tons, et leurs différences,* est tiré d'un manuscrit du XIe siècle, qui appartenait à l'abbaye du Montcassin, où Odon de Cluny avait résidé quelque temps. Le second traité est un *Dialogue sur la musique* 3), dont l'auteur est nommé expressément *Odon de Cluny* par un anonyme du XIIIe siècle, de Melk en Autriche. Le troisième est un traité plus étendu *Sur la Musique*, attribné à *Odon* dans le manuscrit de saint Blaise qui a servi à l'éditeur, mais donné à Bernon, prédécesseur d'Odon, par un manuscrit de Leipzig cité par M. Cantor. Le quatrième traité, dans lequel Boèce est cité, est intitulé *Règles de l'Arithmomachie.* Ce nom grec est celui d'un petit jeu arithmétique 4), dont l'origine remonte probablement jusqu'aux pythagoriciens grecs 5). Enfin, le cinquième traité est intitulé *Règles sur l'abacus.*

Admettant, malgré les doutes de l'éditeur Martin Gerbert, qu'Odon, auteur du *Dialogue sur la Musique* était bien Odon, abbé de Cluny au Xe siècle 6), j'en avais conclu que vraisemblablement les autres

---

7) En faveur de cette pensée, M. Cantor avait cru trouver une autre preuve dans la découverte des neuf chiffres, faite par M. Pertz au feuillet 50 d'un manuscrit de la Bibliothèque de la ville de Zurich, manuscrit du Xe siècle, qui contient, entre autres matières très diverses, une *Vie de Charlemagne,* probablement par Angilbert. Mais, ayant vu lui-même ce manuscrit, trop brièvement décrit par M. Pertz, M. Cantor a constaté que les neuf chiffres s'y trouvent tout-à-fait isolés sur le feuillet 50, et que ces chiffres y sont d'une main très postérieure à celle qui a écrit le reste du manuscrit. — 8) *Propag.* etc., p. 147, note 2. — 9) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 1) *Odo von Cluny,* p. 292-302. — 2) Dans la *Nouvelle Biographie universelle,* t. 38, p. 487-490 (Paris, 1862) — 3) M. Hauréau n'a connu que ce second opuscule d'Odon sur la musique, et l'a cru inédit. — 4) Comparez Lefèvre d'Etaples, *Ritmimachie ludus, qui et pugna numerorum appellatur,* à la fin d'un recueil qui contient: 1°. l'*Arithmétique* de Jordanus Nemorarius, 2°. La *Musique* de Lefèvre d'Etaples, 3°. Son *Abrégé de l'Arithmétique de Boèce,* 4°. Son *Arithmomachie* avec la figure (Paris, 1496, in-folio). M. Cantor dit qu'un traité sur le même sujet se trouve dans un manuscrit de Berne. — 5) Voyez mon Mémoire *Sur le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon,* p. 16-17 (Extrait de la *Revue archéol.,* XIIIe année). — 6) M. Hauréau, dans l'article cité, suppose que ce doit être un autre Odon, parceque dans la Préface (manuscrit latin 7211 de Paris) on voit que l'auteur l'écrivait dans un monastère placé sous l'invocation de la Sainte Vierge, et parceque dans l'ouvrage même (manuscrits latins 7211 et 7369 de Paris) Odon de Cluny se trouve cité. Mais, outre qu'il pourrait y avoir une interpo-

traités, et spécialement le traité des *Règles sur l'abacus*, contenu avec le *Dialogue* dans un manuscrit de Vienne du XIII[e] siècle, devaient être du même auteur. M. Cantor pense que cette conclusion avait besoin de motifs plus sûrs: il les a cherchés dans l'étude du traité des *Règles sur l'abacus*, étude que je n'avais pu faire, n'ayant ni l'édition donnée par Martin Gerbert, ni un manuscrit de cet opuscule, qui ne m'était connu, comme les quatre autres, que par des notices insuffisantes.

L'*Introduction* de cet opuscule 7) est reproduite dans la note 563 de M. Cantor, et traduite en allemand dans le texte de son chapitre XX. S'appuyant sur les expressions de cette Introduction, M. Cantor essaie d'établir les deux points suivants, dont nous allons examiner les preuves.

1°. Du temps de l'auteur, dit M. Cantor, *des livres de Bède le Vénérable sur l'art du calcul (de computo)* étaient en usage. D'où il conclut que Bède avait traité du *calcul sur l'abacus*, et que, ce traité s'étant perdu sans que le souvenir s'en fût effacé, les copistes l'avaient remplacé par celui de Gerbert. Ainsi s'expliquerait, suivant M. Cantor, la présence de ce dernier traité parmi les œuvres de Bède. Cette induction ingéniense a le malheur de s'appuyer sur un contresens. En effet, voici ce que dit Odon : *Si quelqu'un désire avoir la connaissance de l'abacus, il est nécessaire qu'il étudie la théorie des nombres. Cet art* (celui de l'abacus) *a été inventé par Pythagore.* Sans ce même art, *on peut à peine atteindre la perfection du CALCUL (calculationis)*, c'est-à-dire (par exemple) *comprendre les arguments du COMPUT* ecclésiastique *(computi). Si les saints docteurs avaient considéré comme oiseux cet art* (l'art de l'abacus) *transmis par les païens, ils n'auraient jamais appuyé sur son autorité les RÈGLES RÉCESSAIRES A L'ÉGLISE. Car,* continue l'auteur, *si l'on veut lire les livres de Bède le vénérable sur le COMPUT* ecclésiastique *(de computo), l'on y avance peu sans la connaissance de cet art* (de l'abacus). En résumé, suivant Odon, Bède le vénérable avait écrit *des livres sur le comput ecclésiastique,* et non sur le calcul par l'abacus; mais ce calcul était très utile pour la lecture des livres de comput. Telle me paraît être la cause pour laquelle on avait inséré dans les œuvres du computiste Bède, à titre d'auxiliaire pour les lecteurs, le traité de Gerbert sur l'abacus. Ainsi tombe la preuve du premier des deux points que M. Cantor croyait avoir établis. Passons à l'autre point.

2°. Non content d'attribuer à Pythagore l'invention de l'abacus, Odon dit que *cet art avait été écrit anciennement en grec, et nous croyons,* ajoute-t-il, *que Boèce l'a traduit en latin. Mais, parceque le livre de cet art est difficile à lire, nous avons pris soin d'en détacher quelques règles...* De ces mots, M. Cantor conclut qu'Odon connaissait parfaitement l'origine grecque de l'art de l'abacus, qu'il avait sous le yeux les deux textes de la *Géométrie* de Boèce sur cet art, et qu'il les jugeait authentiques. Au contraire, les phrases citées prouvent qu'Odon avait sous les yeux *tout un livre sur l'abacus,* et qu'il le croyait *traduit du grec par Boèce lui-même,* tandisque les deux passages de la *Géométrie* de Boèce sur l'abacus sont donnés par Boèce lui-même comme *tirés de l'écrivain LATIN Archytas.* Ainsi Odon ne connaissait ni la *Géométrie* de Boèce, ni les deux passages sur l'abacus; mais il considérait à tort comme œuvre de Boèce un traité de l'abacus rédigé d'après ces deux passages de Boèce, ou d'après le traité latin d'Archytas, entre le VI[e] siècle et le X[e].

Ainsi l'art de l'abacus avec neuf chiffres, introduit en occident par l'écrivain latin Archytas, s'était transmis par des traités sur cet art, composés entre l'époque de Boèce et celle d'Odon de Cluny, qui abrégea un de ces traités, considéré par lui comme œuvre de Boèce. Puis, peu d'années après l'époque d'Odon, Gerbert retrouva, comme nous le verrons, à Mantoue un manuscrit de la *Géométrie* même de Boèce, et

---

lation, les citations d'un auteur par lui-même à la troisième personne ne sont pas sans exemple, et comme M. Hauréau le remarque l'abbaye de Bourgdéols en Berry, placée sous l'invocation de la Sainte Vierge, était aussi, suivant quelques uns, sous le gouvernement d'Odon de Cluny, bien que les Bénédictins inclinent à distinguer l'un de l'autre Odon abbé de Cluny et Odon abbé de Bourgdéols. — 7) *Scriptores ecclesiastici de musica,* éd. Martinus Gerbertus (St Blasien, 1784), t. 1, p. 296-302: *Regulæ domini Oddonis super abacum.* Les quatre traités précédents occupent les p. 247-295.

il composa un traité de l'abacus, qu'on insera dans le recueil des œuvres de Bède, pour la commodité de lecteus. Telle est la conclusion importante qui ressort d'une interprétation exacte de l'Introduction du traité d'Odon sur les *Règles de l'abacus.*

Le corps même de l'ouvrage d'Odon, excepté en ce qui concerne la division, présente des explications plus complètes et plus claires que celles de Boèce. Ceci indique les progrès que les abacistes avaient réalisés en quatre siècles depuis Boèce. Mais l'identité du fond ne prouve pas, comme M. Cantor le suppose, qu'Odon ait puisé directement dans l'ouvrage authentique de Boèce lui-même.

Odon appelle *arc* chaque colonne de l'abacus. Ce nom est le plus fréquent chez les abacistes du XIe siècle. Mais Boèce (p. 1518-1519) les nomme *paginulæ* et non *arcus,* et il suppose (p. 1518, dernière ligne) que chaque colonne est close en haut par une *ligne (linea):* il ne parle pas d'*arcs.* Ces arcs, qu'on voit dans le manuscrit d'Erlangen, mais non dans le manuscrit de Chartres 8), avaient été ajoutés à la figure de Boèce. M. Cantor aurait dû noter ces différences entre Odon et Boèce.

Ensuite Odon donne les noms et les signes pour les nombres de 1 à 9. Les noms sont latins. Les signes manquent dans le texte imprimé; mais la description que l'éditeur en donne dans une note 9), convient aux neuf de Boèce, tels qu'ils sont dans les manuscrits d'Erlangen et de Chartres. On ne trouve chez Odon ni le zéro, ni les noms barbares des neuf nombres. Par conséquent, ni le zéro, ni ces noms étranges ne se trouvaient dans le traité *de l'abacus* dont Odon attribuait faussement la rédaction à Boèce. Mais ces noms, dont plusieurs sont des noms grecs altérés et motivés par des idées pythagoriciennes, devaient se trouver, dès avant l'époque d'Odon, dans d'autres traités de l'abacus, et, quoi qu'en dise M. Cantor, il est possible que, dès avant cette époque, ils se trouvassent sur des figures interpolées de l'abacus dans des manuscrits de la *Géométrie* de Boèce.

Comme Boèce, Odon nomme *nombres digitaux* les unités simples, et nombres *articulaires* les dixaines.

Comme Boèce, mais avec plus de clarté, il donne d'abord les règles de la multiplication. Le *multiplicande (summa)* se place *au haut des colonnes (summitate arcuum).* Le *multiplicateur (fundamentum)* se met audessous, et le produit (encore audessous, mais) entre deux lignes (horizontales). M. Cantor aurait dû remarquer que ces sens des mots *summa* et *fundamentum* sont aussi étrangers à Boèce que celui du mot *arcus* désignant les *colonnes.* Ensuite vient un exemple, à propros duquel il est dit que les rôles du multiplicande et du multiplicateur sont réciproques: remarque juste, qui ne se trouve, dit M. Cantor, ni chez Boèce, ni chez les abacistes du XIe siècle. Dans cet exemple, le multiplicande 5 et le multiplicateur 7 étaient ecrits en chiffres pythagoriques, que l'éditeur a remplacés par nos chiffres dits arabes, et le produit XXXV est donné en chiffres romains, parceque, jusqu'à l'introduction du zéro, les chiffres ne pouvaient servir en dehors de l'abacus pour exprimer un nombre supérieur à 9, lorsqu'un ordre d'unités venait à manquer. Les autres règles d'Odon, pour les cas où l'un des deux facteurs ou bien tous les deux ont des unités de différents ordres à écrire dans différentes colonnes de l'abacus, sont données par Odon avec beaucoup de clarté, mais sans exemples.

Ensuite, comme Boèce, Odon distingue trois espèces de division, suivant que le diviseur n'a que des unités d'un seul ordre, ou bien qu'il a des chiffres à placer dans des colonnes immédiatement consécutives de l'abacus, ou bien qu'il a des chiffres séparés par une colonne vide. De même que Boèce il donne au *quotient* le nom de *denominatio,* nom qui est, au contraire, celui du *dénominateur* des fractions dans les écrits latins d'origine arabe. De même que Boèce, il dit *secundare,* pour dire de placer un chiffre dans la colonne suivante. Quant au mot *differentia,* Odon ne l'emploie pas dans le même sens que Boèce, et son exposition des règles de la division est si obscure, dit M. Cantor, qu'il est difficile d'entrevoir s'il a voulu enseigner, comme Boèce, le *procédé complémentaire,* qu'on peu appeler *division à l'aide des*

8) Voyez ci-dessus, chap. XVI. — 9) Cette note est reproduite par M. Cantor, note 566, p. 424-425.

différences 10). M. Cantor remarque que l'obscurité des règles de la division n'est guères moindre chez d'autres écrivains habituellement fort clairs: Odon lui-même déclare que, pour être bien comprise, cette opération a besoin que l'enseignement oral supplée à l'insuffisance des préceptes écrits.

De la division, Odon passe aux fractions. Il dit que chez les anciens toute unité entière se nomme *as*, que l'*as* se divise en 12 *onces*, et l'*once* en 24 *scrupules*. Il indique les noms latins qui désignent par un seul mot la réunion d'un certain nombre d'onces ou de scrupules. Son fractionnement de l'as en divers nombres d'onces est conforme à l'ancienne division romaine. Pour les subdivisions de l'*once* jusqu'au scrupule inclusivement, Odon ne suit ni le vieux système romain de Volusius Mæcianus, ni le système pythagorique d'Archytas le jeune et de Boèce, mais bien (ce que M. Cantor n'a pas remarqué) le système gréco-romain de l'empire d'Orient et des derniers temps de l'empire d'occident, tel qu'on le trouve chez Priscien 11). Mais ce système ne descend pas audessous du *scrupule*. Pour les fractions inférieures, nous retrouvons chez Odon quatre fractions de Boèce, savoir: *obolus*, moitié du scrupule; *ceratis*, qui en est le quart; *siliqua*, qui en est le sixième, et *calculus*, qui en est le huitième 12), mais que Boèce nomme *punctum*. Odon ne descend pas jusqu'au *minutum* et au *momentum*, dernières fractions de Boèce.

Les signes de toutes ces fractions de l'as manquent dans l'édition. Mais une note de l'éditeur Martin Gerbert sur le traité de *Musique* de Bernelinus, compris dans le même recueil 13), montre que les signes qu'il donne pour les fractions dans ce traité sont les mêmes que ceux du manuscrit de l'opuscule d'Odon, et ils sont identiques aux signes employés de même par Bède pour désigner les fractions de l'as et de l'once.

Odon expose assez longuement le calcul de ces fractions, et il termine en remarquant qu'audessous de la plus petite espèce la division peut encore donner un reste, parceque rien n'est parfait, *si ce n'est le Père éternel de toutes choses*.

De cette intéressante analyse, dont nous lui sommes redevables, M. Cantor conclut qu'Odon était très instruit dans l'art de l'abacus, qu'il en avait recherché l'origine, et qu'il tenait pour certain qu'une grande partie de cet art, et notamment les neuf chiffres, venaient des Grecs par l'intermédiaire de Boèce.

D'après les observations présentées plus haut, voici ce qu'il me paraît nécessaire d'ajouter: Odon avait pris ses *règles de l'abacus* dans un traité latin qu'il avait considéré à tort comme une traduction, faite par Boèce, d'un traité grec; la source principale de ce traité antérieur à Odon se trouvait dans les deux passages arithmétiques de la *Géométrie* de Boèce; mais, à la place de plusieurs des termes mathématiques employés par le géomètre romain, d'autres termes tout différents s'étaient introduits dans ce traité.

Dans l'opuscule d'Odon, il est question de la langue hébraïque. Quant aux Arabes, il n'en dit pas un mot, et son traité ne contient rien de ce qui caractérise les traités arabes sur le calcul arithmétique, savoir: ni le zéro, ni la preuve par 9, ni les fractions sexagésimales, ni des expressions techniques prises dans le sens qui vient des écrits arabes.

D'un autre côté, l'opuscule d'Odon offre des caractères qui ne peuvent pas convenir à une époque plus récente que le XIe siècle, et cet opuscule est même probablement d'une époque antérieure, puisqu'il ne dit rien des noms *igin, andras*, etc., répétés dans tous les traités du XIe siècle et dont il aurait vraisemblablement parlé, s'il les avait connus. Tout se réunit pour désigner le Xe siècle comme époque de la rédaction des *Règles de l'abacus*, et Odon de Cluny comme l'auteur véritable 14).

J'ajoute que de l'*Introduction* du traité il résulte qu'avant l'époque de l'auteur, c'est-à-dire avant le Xe siècle, il existait depuis longtemps un traité de l'abacus rédigé d'après les principes de Boèce; car, si ce traité avait été récent, Odon, en s'en servant, n'aurait pas pu, comme j'ai montré qu'il l'a fait, le croire rédigé par Boèce lui-même.

---

10) Voyez ci-dessus, chapitre XV. — 11) Voyez ci-dessus, chap. XV, note 10, et comparez M. Hultsch, *Métrologie*, p. 113-114. Peu fort en etymologies, Odon dit que le nom du quart de l'once, *sicilicus*, se dit *siclus* en grec et *sichel* en hébreu. — 12) Le texte imprimé donne ici *calques (calcos)*. Mais un autre passage prouve que c'est *calculos* qu'il faut lire. *Le chalque* grec était le huitième de l'*obole*, et non du *scrupule*. — 13) P. 315, note f. voyez cette note reproduite par M. Cantor, note 572, p. 425. — 14) A la fin du XIIe siècle, un autre Odon, abbé de Morimond, avait laissé, entre autres ouvrages, un traité *Sur les significations des nombres*.

XXI. Vie de Gerbert. 1)

Ce chapitre offre un résumé critique de la vie de Gerbert, surtout d'après le recherches de M. Hock 2), de M. Büdinger 3) et les miennes 4). En voici les points principaux.

Né en Auvergne, de parents pauvres, vers la fin de la première moitié du Xe siècle, Gerbert trouva dans Raimond, écolâtre du couvent de Saint Géraud à Aurillac, et dans Géraud abbé du même couvent ses premiers maîtres et amis, dont le premier était probablement élève d'Odon de Cluny.

Le premier voyage de Gerbert qui soit bien attesté 5), est celui qu'il fit d'Aurillac dans le comté de Barcelone, avec le consentement de ses supérieurs, en compagnie du comte Borel, pour y compléter son instruction près d'Hatton, évêque de Vich, ville où les études mathématiques étaient en honneur chez les moines. Cette ville du comté de Barcelone, prise par Charlemagne en 778, reprise par les Maures, puis délivrée en 812 par l'assistance de Louis d'Aquitaine, était restée depuis ce temps sous l'autorité chrétienne, malgré les attaques fréquentes des Maures. Il y avait trève entre eux et les Chrétiens, lorsque Borel, comte d'Urgel depuis 950, devint, en 967, comte de Barcelone, en vertu d'un testament du comte Séniofred, qui cependant laissait deux frères. M. Büdinger conjecture avec vraisemblance qu'aussitôt Borel vint en France, pour faire confirmer par l'investiture royale de Lothaire ses droits contestés, et qu'ainsi ce fut en 967 ou 968 qu'il emmena Gerbert du couvent d'Aurillac. Hatton ou Haiton était devenu évêque de Vich en 960. En 962, il fut du nombre des évêques de la Marche d'Espagne qui protestèrent contre la reconnaissance de l'autorité archiépiscopale de l'abbé Césarion, consacré irrégulièrement archevêque de Tarragone par les évêques de Galice. En 970, le pape Jean XIII transporta à Vich le siége de l'archevêché, parceque Tarragone était tombée au pouvoir des infidèles.

La bulle de translation constate la présence d'Hatton et de Borel à Rome, où Gerbert les avait accompagnés. Richer, moine contemporain, raconte qu'à la demande du roi Othon, le pape, c'est-à-dire Jean XIII, engagea Borel et Hatton à laisser leur jeune et savant compagnon de voyage en Italie, où la musique et l'astronomie avaient besoin d'être enseignées par un étranger. Mais Gerbert déclara à Othon qu'avant d'enseigner les mathématiques il voulait continuer en Italie ses études sur la dialectique. Il s'agit évidemment ici d'Othon Ier, qui est les premier des trois Othons, désignés par Gerbert lui-même comme ayant été ses protecteurs. Cet entretien eut lieu au plus tard au commencement d'août 972, puisqu'au 18 de ce mois Othon avait quitté l'Italie et datait de Constance la confirmation des immunités du monastère de Rheinau. Le pape Jean XIII mourut le 5 septembre suivant.

Vers le même temps, un savant dialecticien, l'archidiacre G. (Garamnus suivant M. Büdinger), ambassadeur de Lothaire près d'Othon Ier, obtint le consentement de l'empereur pour emmener Gerbert à Reims, où, d'abord élève en dialectique, il devint bientôt professeur de mathématiques. Pendant les dix années de son séjour à Reims, il eut tout le temps de se lier avec l'évêque Adalbéron, avec Constantin, écolâtre de Fleury, et avec d'autres amis mentionnés dans ses lettres 6). Par ses leçons, l'école de Reims acquit une grande renommée, et elle eut pour élèves beaucoup d'hommes qui devinrent puissants. Robert, fils du roi de France Hugues Capet, fut un des élèves de Gerbert.

A noël de l'an 982, Gerbert était à Ravenne 7), à la cour d'Othon II; il soutenait contre Ohtric, le

---

1) *Gerberts Leben,* p. 303-313. — 2) *Gerbert oder Pabst Sylvester II und sein Jahrhundert* (Wien, 1837). — 3) *Ueber Gerbert's wissenschaftliche und politische Stellung* (Marburg, 1851).— 4) *Rech. nouv. sur les origines de notre syst. de numération écrite,* p. 9-32. — 5) Hock suppose, sans preuves, un premier voyage, dans lequel Gerbert aurait visité les écoles claustrales du nord la France, telles que celles de Reims, de Fleury et de Tours, et y aurait contracté dès lors des relations d'amitié. — 6) C'est donc inutilement que, pour expliquer les amitiés de Gerbert, M. Hock a imaginé un premier voyage qu'il aurait fait dans le nord de la France avant d'aller en Catalogne. — 7) La date donnée par M. Cantor (p. 308, l. 7) est 980, mais probablement par une faute d'impression pour 982; car c'est 982 qu'il donne (p. 308, l. 17-22) pour la date de la lettre écrite de Mautoue par Gerbert *vers la même époque ;* il dit que Gerbert vint enseigner à Reims *en* 982, et qu'il resta 10 *ans* (p. 307), *jusqu'en* 982 (p. 321).

plus savant homme de la cour, une discussion philosophique et mathématique, et il recevait d'Othon l'abbaye de Bobbio. C'était vers cette même époque, que, de Mantoue, il annonçait à Adalbéron 8) sa découverte de *huit livres de Boèce sur l'astronomie,* et de livres du même auteur sur la *Géométrie* et sur d'autres objets 9).

Othon II étant mort le 7 décembre 983, Gerbert, entouré de jalousies et de haines, et mal vu du pape Jean XIV, quitta l'abbaye de Bobbio et revint à Reims près de l'évêque Adalbéron, sous le prétexte d'y continuer ses études, mais avec l'intention d'user de son influence sur Hugues Capet, pour s'opposer à l'union du roi de France Lothaire avec Henri de Bavière contre les droits d'Othon III, âgé de quatre ans. Ayant réussi à obtenir, en 985, une paix favorable à ce dernier, il eut la pensée d'aller en Saxe près de la princesse grecque Théophanie, veuve d'Othon II et mère du jeune empereur. Mais le roi de France Louis le Fainéant étant mort le 19 mai 987, Charles de Lorraine, frère de Lothaire et héritier le plus proche, fut écarté, Hugues Capet fut élu roi, et fit couronner aussi son fils Robert avant la fin de janvier 988. Adalbéron, à qui Gerbert avait espéré succéder, mourut vers la même époque. Mais, en présence des succès de Charles de Lorraine, on voulut gagner au parti des Capétiens Arnulf, fils naturel de Lothaire, en lui donnant l'archevêché de Reims. Traître à ses serments, Arnulf livra la ville à son oncle Charles. Secrétaire d'Arnulf, mais surveillé de près, Gerbert réussit, vers la fin de 989, à fuir vers Hugues Capet. En 991, il alla avec ce prince au siége de Laon, où Charles de Lorraine et Arnulf s'étaient retirés. Du milieu du camp, Gerbert écrivait à Rémi de Trèves une lettre concernant l'arithmétique. La ville de Laon fut prise au bout de quelques mois; Charles resta prisonnier à Orléans jusqu'à sa mort, et Arnulf fut déposé, le 16 juin 991, par un synode de Reims. Le même synode appela Gerbert à l'archevêché de Reims, pour lequel il avait été désigné par l'archevêque Adalbéron mourant. Mais le pape Jean XV refusa de confirmer la décision du synode. Pendant trois ans, Gerbert négocia, refusant sa démission et demandant un nouveau synode. Enfin, en 994, cédant aux instances d'Othon III, il quitta Reims, pour le rendre à la cour impériale. Au mois de juin 995, il vint se présenter au synode de Mouson, qui renvoya l'affaire à un synode convoqué pour le 1er juillet: en attendant, Gerbert, sans renoncer à son titre, dut s'abstenir du service divin.

Peu de temps avant le synode de Mouson, il dressait à Magdebourg un cadran solaire, en s'aidant de l'observation de l'étoile polaire, sans doute pour trouver la hauteur du pole et par conséquent la latitude du lieu, ou bien pour tracer la méridienne. Aussitôt après le synode, en accompagnant Othon III dans une expédition contre les Slaves de l'Elbe et de l'Oder, il écrivait sa *Géométrie.*

Pendant ce temps, Rome était en proie aux plus grands désordres. Au printemps de l'an 996, accompagné de Gerbert, Othon III, avec une armée, passait les Alpes. A Ravenne, il apprenait que Jean XV était mort le 9 mai. Dès le 21 mai, Bruno, de la maison de Saxe, élu pape sous le nom de Grégoire V, sacrait à Rome Othon III empereur, et Gerbert devenait conseiller du jeune pape, pendant qu'Othon III retournait en Allemagne.

Au milieu de ces événements, Gerbert engageait Othon III à orner d'un monument le tombeau de Boèce à Ravenne, et il en composait lui-même l'inscription. Vers ce même temps ou peu après, il terminait son traité *De la division,* dédié à Constantin, moine de Fleury.

Bientôt le patricien Crescentius chassait Grégoire V et Gerbert; mais Othon revenait à Rome et faisait périr Crescentius et ses partisans. En 998, Gerbert était nommé évêque de Ravenne. Le 5 février 999, Grégoire V mourait, et le 2 avril suivant Gerbert devenait le pape Sylvestre II. Il mourait le 12 mai 1003, après quatre ans de souverain pontificat. Il avait vu Othon III battu dans une troisième expédition contre les Romains révoltés; le jeune empereur était mort à Paterno, à l'âge de 22 ans, le 22 janvier

---

8) Cette lettre, placée en 972 par les Bénédictins, est bien plutôt de 982, suivant MM. Hock et Cantor. — 9) Voyez ci-dessus, chapitre XII.

*

de l'an 1002, soit de maladie, soit de poison; et Gerbert, ce grand homme, irréprochable dans ses intentions, sinon dans toute sa conduite, avait peut-être compris, dit M. Cantor, que la domination allemande en Italie, et le *saint empire germanique* avec Rome pour centre, n'étaient qu'un funeste rêve.

Tel est le résumé de l'histoire de Gerbert, d'après des documents irrécusables. En la donnant avec moins de détails, j'y avais joint une étude 10), à la quelle M. Cantor se contente de renvoyer dans une note (598, p. 428), mais qui me paraît importante pour l'objet de son livre: en faisant connaître les opinions sur Gerbert, depuis ses contemporains jusqu'à la fin du XIIIe siècle, j'avais suivi pas à pas la formation de la légende fabuleuse qui a fait de ce savant moine et de ce grand pape un apostat et un sorcier, et j'avais montré que la tradition prétendue historique qui fait de Gerbert un disciple des Arabes de Cordoue, est un des éléments essentiels de cette fable absurde, tandisque cette tradition apocryphe est entièrement etrangère à l'histoire véritable de ce personnage, calomnié surtout par les ennemis de la maison de Saxe, dont il avait été le protégé.

XXII. Connaissances mathématiques de Gerbert. 1)

Nous ignorons quelle fut la méthode de l'enseignement que Gerbert reçut à Aurillac sous la direction de l'écolâtre Raimond et de l'abbé Géraud, puis à Vich près de l'évêque Hatton, et nous ne savons pas quel fut dans cette dernière ville son maître de mathématiques. M. Hock désigne un certain Joseph, mais sans dire ses motifs. M. Cantor, qui les a devinés, en montre l'insuffisance.

Dans un manuscrit de Saint Emmeran de Ratisbonne, l'auteur G. s'adresse à son *père en Jésus-Christ le théologien J.* Sans doute, M. Hock aura cru, comme Pez avant lui, et comme M. Chasles lui-même l'avait pensé d'abord, que G. était Gerbert, et il aura supposé que J. devait être Joseph, dont Gerbert parle dans deux de ses lettres. Mais, plus récemment, M. Chasles a prouvé que le G. du manuscrit de Ratisbonne est Gerland, écrivain de la fin du XIe siècle. D'un autre côté, rien n'indique que l'espagnol Joseph, dont Gerbert parle dans deux lettres, et que, dans l'une des deux, il nomme *le sage Joseph*, ait été un de ses maîtres. Dans ces deux lettres, on voit que Gerbert voulait procurer à Adalbéron de Reims un traité de Joseph sur la multiplication et la division, et que lui-même désirait beaucoup connaître ce traité: il le demande d'une part à un ecclésiastique de la Marche d'Espagne, d'autre part à l'abbé d'Aurillac, à qui l'abbé catalan Guarin en avait laissé un exemplaire. C'est d'une tout autre manière que Gerbert a coutume de parler de ses amis et de ses maîtres.

M. Cantor rejette, à plus forte raison, l'hypothèse de M. Büdinger, d'après laquelle l'auteur de ce traité sur la multiplication et la division, que Gerbert désirait tant de connaître et de procurer à Adalbéron, serait l'arabe Joseph ben Omar Algiaheri. Cet astronome arabe est mort en 1043, tandisque les deux lettres de Gerbert sont de 973. Il serait peu vraisemblable que *le sage Joseph* eût mérité ce titre et composé un ouvrage important 70 ans avant de mourir. D'ailleurs, le traité de Joseph demandé par Gerbert était *en latin*. Or, dans une autre lettre, en demandant à un certain Lupitus de Barcelone la traduction latine que celui-ci avait faite d'un ouvrage astronomique, Gerbert ne nomme pas même l'auteur de l'ouvrage original. Il est donc bien probable que la rédaction latine du traité de Joseph sur la multiplication et la division était le texte original de Joseph lui-même. Joseph n'était donc pas un arabe. M. Cantor conjecture que ce pouvait être un juif d'Espagne, ou bien un Maure élevé parmi les Chrétiens et instruit dans leurs langues el dans leurs sciences. Mais il me paraît bien plus probable que ce Joseph était tout simplement un chrétien espagnol 2). *Joseph* était un nom très convenable en tout pays pour

---

10) *Rech. nouv. sur les origines de notre système de numération écrite*, § IV, p. 20-27. — 1) *Gerbert's Mathematik*, p. 314-329. — 2) Voyez Cossali, *Memorie scientifiche sulla origine dell'odierna aritmetica*, Rifl. VIII, p. 366-367 *(Scritti inediti di Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni)*.

un chrétien du Xe siècle. Tel était le nom du *théologien Joseph*, que Gerland, à la fin du XIe siècle, applait son *père en Jésus-Christ*, comme nous venons de le voir.

Si nous ne connaissons pas les maîtres de Gerbert en mathématiques, nous connaissons sa méthode d'enseignement, que son contemporain le moine Richer expose en détail. Les élèves étudiaient la philosophie dans des traités latins traduits du grec, surtout dans les traductions du *consul Manlius*, c'est-à-dire de Boèce. Ensuite venait la rhétorique, à laquelle se joignait l'étude des poètes latins; puis venaient les exercices de dialectique sous un maître spécial. Une autre série d'études était consacrée aux mathématiques, dont Gerbert s'occupait particulièrement, savoir: 1°. à l'arithmétique; 2°. à la théorie du monochorde et de toute la musique, alors à peine connue en France; 3° à l'astronomie, que Gerbert tâchait de rendre intelligible à l'aide d'instruments énumérés par Richer; 4° à la géométrie. M. Büdinger a prouvé que les instruments astronomiques de Gerbert, de même que le monochorde, venaient d'une tradition gréco-romaine et non arabe. Les traités employés par Gerbert devaient avoir une origine semblable. Ce devaient être, dit M. Cantor, ceux de Boèce, dont Gerbert cite la *Géométrie*, ou bien ceux d'auteurs qui avaient pris Boèce pour modèle. M. Cantor oublie qu'il a placé vers le mois de décembre 982, c'est-à-dire après la fin des dix années de professorat de Gerbert à Reims, la date de la lettre où Gerbert témoigne tant de joie d'avoir découvert à Mantoue l'*Astronomie*, la *Géométrie* et d'autres traités de Boèce. Il ne connaissait donc, avant cette époque, que des imitateurs de la *Géométrie* du savant romain. J'ai montré (chapitre XX) qu'un demi-siècle auparavant il en était de même pour Odon de Cluny.

Richer nous apprend que Gerbert, avant d'aborder la géométrie, commençait par enseigner le calcul, à l'aide d'un *abacus* en bois, qu'il avait fait fabriquer: d'après la description, cet abacus devait être semblable à celui de Boèce, et Gerbert y employait même, comme Boèce, les *apices* mobiles portant les neuf nombres, au lieu de les écrire sur l'abacus. Ce n'était pas en tête de la première partie de sa *Géométrie*, mais avant la seconde partie, que Boèce exposait la méthode de l'abacus. Ce léger déplacement n'empêche pas de reconnaître la tradition de Boèce dans l'enseignement de Gerbert.

Mais comment se fait-il que Gerbert ait placé l'astronomie avant la géométrie, tandisque Boèce la plaçait après? M. Cantor répond que Richer a pu se tromper sur l'ordre des sciences, de même qu'il s'est trompé en omettant la grammaire dans le *trivium*, et que, d'ailleurs, l'enseignement astronomique de Gerbert, étant tout pratique, pouvait se passer d'être précédé par la géométrie. Rappelons-nous aussi que le traité astronomique de Boèce, aujourd'hui perdu, n'avait été découvert par Gerbert que vers la fin de 982, losqu'il avait cessé d'enseigner.

Ce que Richer dit de la méthode de Gerbert pour la division sur l'*abacus*, confirme que le traité *de la division* adressé *à C.* est bien un traité de Gerbert adressé à son ami Constantin, quoique ce traité se trouve aussi parmi les œuvres de Bède.

Une lettre de Gerbert à Rémi de Trèves 3), malgré les corrections très heureuses apportées au texte par M. Friedlein 4), reste très obscure, parcequ'elle ne répète pas les difficultés arithmétiques que Rémi avait proposées dans une lettre aujourd'hui perdue, et auxquelles Gerbert répond. On entrevoit seulement qu'il s'agissait de deux questions distinctes, l'une sur les racines des nombres carrés, à commencer par l'unité, qui seule est elle-même son propre carré, l'autre sur un problème analogue au XXIXe d'Alcuin, et dans lequel, le nombre 10 étant répresenté par le chiffre 1 dans la seconde colonne à droite de l'abacus, il fallait diviser ce nombre en deux parties (6 et 4) dont la seconde fût le deux tiers de l'autre 5).

---

3) *Epist.* CXXXIV (Duchesne, *Hist. Franc. Script.*, t. 2, p. 820). — 4) La plus grave et la plus nécessaire des corrections de M. Friedlein consiste à lire *de numero* 1, au lieu de lire *de numero D*, dans la première phrase. Le texte corrigé par M. Friedlein est reproduit par M. Cantor dans sa note 586 (p.427), et il en donne la traduction en allemand (p.318). — 5) M. Büdinger conservait la lettre D signifiant 500; mais alors la première phrase était inintelligible. De plus, il voulait que dans la seconde phrase le nombre 10 fût représenté par le chiffre arabe 1 suivi d'un point arabe équivalent au zéro, tandisque, dans le texte de Gerbert, il est dit que le chiffre 1 vaux *dix*, parcequ'il est placé audessous du nombre X, c'est-à-dire dans la colonne des dixaines, de l'abacus. Ces deux erreurs de M. Büdinger n'avaient fait qu'embrouiller la question et fausser le sens de la lettre de Gerbert, pour faire de lui un disciple des Arabes.

La *Géométrie* de Gerbert, écrite en Allemagne, probablement en 995 suivant M. Hock, serait rédigée, suivant lui, non-seulement d'après des sources grecques, mais aussi d'après des sources arabes, parce-qu'elle contiendrait des mots tirés les uns de l'arabe, les autres du grec. Mais il est faux, dit M. Cantor, qu'on y trouve un seul mot venant de l'arabe, tandisqu'on y rencontre à chaque page, d'après le manuscrit du XIIe siècle comme d'après l'édition de Pez, des expressions grecques écrites quelque fois en lettres latines et quelquefois en lettres grecques. Les auteurs qui y sont cités sont Pythagore dans les chapitres IX et XI, le *Timée* de Platon dans le chapitre XIII, Eratosthène dans le chapitre XCIII, le *Commentaire* de Chalcidius *sur le Timée* dans le chapitre Ier, le *Commentaire* de Boèce *Sur les Catégories* d'Aristote dans le chapitre VIII, et enfin l'*Arithmétique* de Boèce dans la Préface et dans les chapitres VI et XIII. Ainsi toutes les citations, de même que les locutions employées dans l'ouvrage, indiquent une source gréco-romaine; mais elles n'ont pas pour source immédiate la *géométrie* de Boèce. Il en est de même du contenu scientifique de l'ouvrage, comme M. Cantor l'affirme en se référant aux preuves données par M. Chasles. Il ajoute seulement que dans la *Géométrie* de Gerbert on trouve les signes bizarres des subdivisions de l'*as*, signes employés, avant l'époque de Gerbert, par Bède, par Odon et par d'autres auteurs moins connus, de sorte que ces signes, bien qu'ils diffèrent de ceux de Volusius Mæcianus, ont certainement une origine romaine, comme le système de fractions qu'ils représentent 6).

C'est d'Allemagne, en 997, que Gerbert doit avoir écrit sa lettre au moine Constantin, et le traité qui s'y rattache, *sur la multiplication et la division.* Pour ce traité, M. Cantor renvoie à l'édition, à la traduction française très exacte et à l'excellente explication que M. Chasles 7) en a données. Quant à la lettre d'envoi à Constantin, que M. Chasles n'avait pas traduite, M. Cantor en donne une traduction allemande. Gerbert y prend le titre d'*écolâtre* et le ton d'un maître avec un ancien élève devenu un ami. Depuis 972 jusqu'à 982, Gerbert avait enseigné les mathématiques à Reims. Dans sa lettre écrite quinze ans plus tard, il dit que *depuis quelques lustres* il a perdu l'habitude de l'enseignement, et qu'il n'a pas entre les mains *le livre*, dont il va essayer de retrouver dans sa mémoire le sens et en partie les paroles. Evidemment il s'agit d'un certain livre d'arithmétique, dont autrefois Gerbert répétait à ses élèves les expressions mêmes.

Quel était ce livre? Suivant M. Friedlein, ce serait une œuvre de Gerbert, et cette œuvre serait la *Géométrie* imprimée dans les œuvres de Boèce. M. Cantor nie avec raison que cette *Géométrie* soit de Gerbert, et que les expressions de la lettre à Constantin se rapportent à un ouvrage de Gerbert lui-même. Mais M. Cantor dit que la ressemblance, constatée par M. Friedlein, entre le passage de la *Géométrie* de Boèce sur la multiplication et la division, et le traité envoyé par Gerbert à Constantin, est trop grande pour être due au hasard. Il se réfère aux preuves qu'il a données de l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce 8); il rappelle que l'auteur de cette *Géométrie* renvoie à son *Arithmétique* et à sa *Musique,* et qu'on n'a jamais cité d'ouvrages de Gerbert sur ces deux sujets. Nous avons de Gerbert une *Géométrie* écrite après l'époque de son enseignement à Reims: elle est très différente de celle de Boèce, que M. Friedlein veut lui attribuer. Si cette dernière, celle qui se trouve dans les œuvres de Boèce, était de Gerbert, comment n'en parlerait-il pas dans son œuvre plus récente sur le même sujet? s'il voulait la faire oublier, pourquoi en parlerait-il dans sa lettre à Constantin? Dira-t-on que le silence de Gerbert sur une *Géométrie* considérée par lui comme œuvre de Boèce ne serait pas moins inexplicable? Non; car la *Géométrie* de Boèce est très inférieure à son *Arithmétique,* citée par Gerbert. D'ailleurs, dans sa fuite de Bobbio en 983, et surtout dans sa fuite de Reims en 989, Gerbert pouvait n'avoir pas emporté avec lui cette *Géométrie,* trouvée par lui à Mantoue en 982; il pouvait donc fort bien ne pas l'avoir en Alle-

---

6) Voyez ci-dessus, chapitres XV, XIX et XX. — 7) *Explication des traités de l'abacus et particulièrement du traité de Gerbert*, p. 47-65 du tirage à part (*Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences*, 23 et 30 janvier et 6 février 1843). — 8) Voyez ci-dessus, chapitres XIII et XV.

magne en 997. Au contraire, il avait sans doute à sa disposition l'*Arithmétique* de Boèce, lorsqu'il la citait trois fois dans sa *Géométrie*, écrite en Allemagne en 995. Il avait envoyé un exemplaire de cette *Arithmétique* au jeune empereur Othon III, qui l'en remerciait dans une lettre écrite en 994, et qui l'invitait à lui enseigner la *science des Grecs* sur le calcul. Gerbert acceptait cette invitation, en félicitant le jeune prince, né d'une mère grecque et chef de l'empire romain, de rechercher *les trésors du savoir des Grecs et des Romains* 9).

L'hypothèse de M. Friedlein étant ainsi écartée, il faut en chercher une autre. M. Cantor avait supposé autrefois que le livre dont Gerbert s'était servi pour son enseignement, mais auquel, en 997, il regrettait de ne pouvoir plus recourir pour traiter de la multiplication et de la division, devait être la *Géométrie* authentique de Boèce. Il faudrait alors que Boèce eût possédé cet ouvrage à l'époque de son enseignement. Mais sa lettre écrite de Mantoue vers la fin de 982 prouve que ce fut après avoir cessé d'enseigner qu'il fit la première découverte d'un exemplaire de cet ouvrage.

Obligé de renoncer à cette hypothèse, M. Cantor pense, avec beaucoup de vraisemblance, que le livre dont Gerbert s'était servi à Reims pour enseigner la multiplication et la division, devait être un traité tel que ceux de Bède, d'Alcuin, d'Odon de Cluny, ou du catalan Joseph, dans lesquels ces opérations arithmétiques étaient enseignées d'après la méthode de l'abacus de Boèce, mais avec plus de développements.

Quant au contenu du traité envoyé par Gerbert à Constantin, les règles de la multlplication et de la division y sont enseignées d'une manière qui rappelle celle de Boèce: Ce sont les méthodes de calcul du savant romain, et le mérite de Gerbert est de les avoir propagées. Mais, entre le traité de Gerbert et les deux passages arithmétiques de la *Géométrie* de Boèce, il y a deux différences essentielles: 1°. Gerbert suppose l'usage de l'abacus, sans l'expliquer comme Boèce, parceque c'était chose connue à la fin du Xe siècle. 2°. Gerbert ne mentionne pas les neuf chiffres pythagoriques de Boèce, parcequ'il les considère sans doute comme un accessoire non indispensable de la méthode de l'abacus, dans les colonnes duquel les chiffres romains peuvent les remplacer. Ainsi, bien loin d'avoir emprunté les neuf chiffres aux Arabes de Cordoue, et de les avoir introduits chez les Chrétiens, Gerbert les a trouvés chez Boèce et chez ses imitateurs, tels qu'Odon de Cluny, et loin de s'en faire le propagateur, il n'en a pas même parlé dans ses écrits sur l'arithmétique.

D'où vient donc cette fausse traduction, si répandue, d'après laquelle Gerbert aurait été disciple des Arabes et aurait introduit les chiffres arabes chez les chrétiens? Le moine Richer, contemporain de Gerbert, connaît tous les détails de sa vie, et la narration qu'il en fait s'accorde parfaitement avec les textes de Gerbert lui-même. Richer et tous les témoins voisins de la même époque, à l'exception d'un seul, n'attribuent à Gerbert aucun voyage en Espagne en dehors du territoire occupé par les chrétiens, ni aucun rapport avec les Arabes. Adhémar de Chabanon seul parmi les contemporains dit que Gerbert *parcourut la France et ensuite Cordoue.* Suivant la remarque de M. Büdinger, les expressions mêmes de ce moine aquitain prouvent que pour lui *Cordoue* était un *pays* comme la France, et non une *ville:* c'était pour lui une vague dénomination de l'Espagne, qui appartenait presque entière au califat de Cordoue. D'ailleurs, le peu qu'Adhémar dit de Gerbert prouve que les circonstances de sa vie et spécialement de son voyage en Espagne lui étaient inconnues. M. Cantor dit fort bien que, si Gerbert était allé chez les Arabes avec le consentement de ses supérieurs, Richer, les amis de Gerbert et Gerbert lui-même auraient parlé de ce voyage, et que, s'il y était allé malgré ses supérieurs, il ne serait pas resté en si bonnes relations avec eux, et ses ennemis, par exemple au synode de Mouson, n'auraient pas manqué de signaler sa faute.

Si M. Cantor avait voulu profiter des témoignages que j'ai réunis 10), il aurait pu ajouter que Ben-

9) Voyez Duchesne, *Script. hist. Franc.*, t. 2, p. 824. — 10) *Rech. nouv. sur les origines de notre système de numération écrite*, IV, p. 20-25,

non, les autres ennemis de la mémoire de Gerbert en Allemagne sous la maison de Franconie, et les rares échos que leur haine contre ce protégé de la maison de Saxe trouva en France au XI[e] siècle, accusent Gerbert de maléfices, mais qu'ils se taisent entièrement sur ses rapports prétendus avec les Arabes. J'ai montré que les premier auteur connu de cette fable, d'après laquelle Gerbert aurait emprunté aux Arabes l'abacus en même temps que tout un trésor de sortiléges, est l'anglais Guillaume de Malmesbury, chroniqueur du XII[e] siècle, aussi ami du merveilleux que mal renseigné sur les affaires du continent, et que, de la chronique romanesque de Guillaume, cette fable a passé, à la fin du XII[e] siècle et au XIII[e], dans les écrits de Gui de Bazoches, d'Albéric de Trois-fontaines, de Vincent de Beauvais et de Martin de Pologne, qui en ont été les premiers propagateurs. Cette fable pouvait paraître vraisemblable alors, parceque, depuis le commencement du XII[e] siècle, les traités mathématiques de Boèce et de ses imitateurs étaient négligés pour des traités plus récents, traduits ou imités de l'arabe par Adelhart de Bath et par d'autres, de sorte que les Arabes étaient regardés alors comme les maîtres par excellence en fait d'arithmétique. Quant aux disciples et amis de Gerbert et à ses imitateurs du X[e] siècle et du XI[e] ils s'accordent avec lui-même pour indiquer l'origine purement gréco-romaine de son savoir mathématique, et la *Chronique de Verdun* le nomme un *second Boèce*. Enfin, M. Cantor aurait pu m'emprunter aussi cette remarque, que Gerbert, dans ses écrits, n'a mentionné les Arabes que deux fois, et uniquement comme ennemis des Chrétiens.

Dira-t-on que les chrétiens de Catalogne ont enseigné à Gerbert l'arithmétique arabe? Non, répond M. Cantor, et il en donne deux raisons, dont la dernière est décisive. 1°. Le système de numération emprunté par les Arabes aux Indiens s'est propagé si lentement chez les Arabes occidentaux, qu'il est douteux qu'il fût en usage au X[e] siècle dans le califat de Cordoue 11). 2°. En supposant, avec peu de vraisemblance, que dès l'époque du séjour de Gerbert en Catalogne ce système eut passé des Arabes aux Chrétiens de la Marche d'Espagne, il faudrait dire que Gerbert, accoutumé d'avance à la pratique de l'abacus gréco-romain et aux procédés arithmétiques de Boèce développés par Bède, par Alcuin et par Odon de Cluny, n'aurait pas compris l'avantage de les remplacer par la méthode indo-arabe. Car c'est la méthode gréco-romaine, avec l'abacus, sans le zéro, et sans aucun des caractères propres à la méthode indo-arabe, que nous trouvons dans les écrits mathématiques de Gerbert, comme dans ceux de ses prédécesseur que nous venons de nommer 12). J'ajoute que, ni dans son traité *de la multiplication et de la division*, ni ailleurs, Gerbert n'a même mentionné les neuf chiffres pythagoriques de Boèce et d'Odon de Cluny.

XXIII. Les abacistes et les algoritmiciens. 1)

Dans ce chapitre, M. Cantor se borne, comme il le déclare, à résumer les résultats des recherches de M. Chasles 2) sur l'histoire de l'arithmétique entre l'époque de Gerbert et celle de Léonard de Pise.

Les *abacistes*, ainsi nommés déjà par Gerbert dans sa *Géométrie*, sont les continuateurs de la pratique gréco-romaine de l'abacus. Tel est Bernelinus, qui, disciple immédiat de Gerbert, signale la Lorraine d'alors, c'est-à-dire l'antique Austrasie tout entière jusqu'aux bouches du Rhin, comme comptant depuis longtemps de nombreux abacistes. En effet, la plupart des abacistes du XI[e] siècle dont nous connaissons la patrie, et que M. Cantor énumère, sont de cette contrée et surtout de la célèbre école de Liège.

---

11) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 12) La différence essentielle qui existait entre la méthode de Boèce et de Gerbert et la méthode indo-arabe, avait été déjà parfaitement établie par Pietro Cossali, *Mémorie storico-scientifiche sulla origine dell' odierna aritmetica*, Rifl. IX, p. 367-372, et *Lezione IV sull'aritmetica*, p. 334-340 (éd. de M. le prince Boncompagni). — 1) *Abacisten und Algorithmiker*, p. 334-340. — 2) *Comptes rendus de séances de l'Académie des sciences*, 23 et 30 janvier, 6 février, 26 juin et 24 juillet 1843.

Bernelinus, Guido d'Arezzo et beaucoup d'autres auteurs disent que l'*abacus* est une table couverte de poussière. Ainsi, dans ces *abacus*, du XIe siècle, et sans doute dans ceux des siècles antérieurs, de même que dans l'abacus attribué à Pythagore par Jamblique 3), les lignes tracées sur la poussière remplaçaient les rainures de l'abacus romain, et sans doute les chiffres écrits sur la poussière remplaçaient les *apices* mobiles de Boèce, employés pourtant encore par Gerbert dans son enseignement, suivant le témoignage de Richer. Le traité de Bernelinus, d'après ce que M. Chasles en a dit, paraît ressembler beaucoup à celui d'Odon, et il paraît qu'on n'y trouve ni les noms barbares des neuf chiffres pythagoriques, ni ces neuf chiffres eux-mêmes, au lieu desquels Bernelinus, sans doute à l'exemple de Gerbert 4), emploie les chiffres romains dans les colonnes de l'abacus.

Vers la fin du XI[e] siècle, Gerland, disciple des Bénédictins de Besançon, a écrit un traité de calcul dans lequel il emploie les neuf noms barbares *igin, andras, ormis*, etc., non seulement en tête des colonnes de l'abacus, mais dans le texte même de ses indications sur les opérations à exécuter.

Ces mots barbares se trouvent employés de même par Raoul de Laon, qui vers 1100, marque la transition entre les abacistes et les algoritmiciens, disciples des Arabes. Dans un passage publié en latin par M. Chasles et traduit en allemand par M. Cantor, Raoul exprime avec netteté et précision des conclusions identiques aux notres sur l'origine gréco-romaine du calcul de l'abacus, presque oublié en Occident pendant les siècles qui suivirent l'époque de Boèce, puis remis en honneur par Gerbert et par d'autres. Mais à cette tradition romaine de l'abacus Raoul mêle quelques éléments étrangers, venus peut-être de la cabbale juive, savoir: non seulement les neuf noms *igin, andras, ormis*, etc., mais le mot *sipos*, nom d'un signe semblable, dit-il, à une petite roue. Cependant, pour lui, ce signe n'a pas encore la valeur du zéro: l'unique usage qu'il en fait est de l'écrire successivement audessus de chacun des chiffres du multiplicateur, de peur d'oublier à quel point de la multiplication l'on est arrivé.

C'est à l'époque de Gerland et de Raoul que M. Cantor rapporte l'interpolation qui a introduit sur l'abacus, dans les manuscrits de Boèce tels que ceux de Chartres et d'Erlangen, les dix mots *igin*, *andras*, *ormis*, *arbas*, *quimas*, *caltis*, *zenis*, *temenias*, *celentis* et *sipos*, et la figure du signe correspondant à ce dernier mot. J'ajoute que la position du mot *sipos* audessus du mot *celentis* dans le manuscrit de Chartres peut indiquer précisément un usage identique à celui auquel Raoul l'emploie.

Si Raoul ne possède pas encore l'usage du zéro arabe, il ne comprend plus l'usage des trois lignes horizontales complémentaires qui, sur l'abacus des manuscrits de Boèce, présentent chacune douze nombres dont chacun est la moitié, le quart ou le huitième d'un des douze nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., écrits en tête des douze colonnes verticales. M. Chasles a montré que Raoul avait sous les yeux ces colonnes horizontales complémentaires de l'abacus, mais sans comprendre qu'elles étaient destinées à faciliter la multiplication par 1/2, par 1/4 et par 1/8, et par conséquent la division par 2, par 4 et par 8. De même, Raoul ne comprend plus le motif du nombre, d'ailleurs variable, des colonnes verticales de l'abacus, réunies trois à trois pour correspondre aux tranches de la numération parlée des Romains 5): Raoul veut que l'abacus ait 27 colonnes verticales, et la raison qu'il en donne, c'est que 27 est le cube de 3.

La transition des abacistes aux algoritmiciens se montre aussi dans l'ouvrage anonyme sur les *Règles de l'abacus* 6). Il est vrai qu'il n'y est question ni du *sipos* ni de sa figure, mais on y lit les noms des neuf premiers nombres depuis *igin*, jusqu'à *celentis*, et dans la première phrase on lit que le mot *abacus* est arabe et qu'il signifie *table*. M. Cantor aurait bien fait d'ajouter qu'aucun mot arabe signifiant *table* ne ressemble au mot *abacus*: c'est le mot grec ἄβαξ qui signifie *tablette sans pied, plateau* 7).

---

3) Voyez ci-dessus, chapitre X.— 4) Voyez le chapitre précédent.— 5) Voyez ci-dessus, chapitres X et XI. — 6) Voyez M. Chasles, *Explication des traités de l'abacus*, p. 11-47 du tirage à part (Extrait des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences*, 26 et 30 janvier 1843. — 7) Voyez ci-dessus, chapitre X.

Au milieu du XII$_e$ siècle, paraît en Angleterre l'ouvrage intitulé *Algoritmi de numero Indorum*. Nous avons vu (chapitre XVIII) que cet ouvrage, publié par les soins de M. le prince Boncompagni, est une traduction latine de l'*Arithmétique* indo-arabe de Mohammed ben Mousa Alkharizmi. Si Adelhart de Bath est vraiment le traducteur, il a cultivé à la fois la méthode greco-romaine de l'abacus et la méthode indo-arabe avec le zéro. Car il avait écrit un traité d'après l'ancienne méthode, et il y présentait l'abacus comme une invention des Pythagoriciens 8).

En ce même siècle, paraît en Espagne le *liber algorismi de practica arismetrice,* ouvrage publié aussi par M. le prince Boncompagni, et qui est une imitation latine de l'ouvrage arabe de Mohammed ben Mousa Alkharizmi par Jean de Séville 9).

Au commencement du XIIIe siècle, la méthode indo-arabe domine en Angleterre, où elle est cultivée par Jean de Holywood (Sacrobosco), et où Guillaume de Malmesbury, confondant les deux méthodes, prétend faire venir aussi des Arabes l'*abacus* de Gerbert, qui vient de Boèce. Cette erreur était favorisée par le discrédit dans lequel était tombée alors en Angleterre la lecture des ouvrages anciens, suivant le témoignage de Jean de Salisbury, cité par M. Cantor (note 623).

Depuis lors, les traces de la méthode gréco-romaine de l'abacus s'évanouissent de plus en plus, et à peine quelques écrivains, jusqu'au commencement du XVIe siècle, se rappellent encore que cette méthode vient de Boèce.

XXIV. Léonard de Pise. 1)

Cultivée jusqu'alors surtout par des moines français et anglais, l'arithmétique, qui devait prendre en Italie de si grands développements, y fut transplantée tout à coup, au commencement du XIIIe siècle, par Léonard de Pise, fils du marchand Bonacci et marchand lui-même. La vie et les écrits de ce personnage ont été mis en lumière par M. Libri d'abord, et ensuite, d'une manière beaucoup plus exacte et plus complète, par M. le prince Boncompagni 2), éditeur des œuvres de Léonard 3). En Italie, ce grand arithméticien du XIIIe siècle n'avait eu pour prédécesseurs bien connus que deux traducteurs de la première moitié du XIIe siècle, Platon de Tivoli 4) et Gherardo de Crémone 5). Né dans la seconde moitié du XIIe siècle Léonard de Pise fut instruit par son père dans la pratique de l'*abacus*. Des affaires de commerce le conduisirent à Bougie, en Egypte, en Sirie, en Grèce, en Sicile, en Provence; il connut les méthodes de numération écrite et de calcul usitées dans tous ces pays; il y ajouta de nouveaux perfectionnements; il résuma cet ensemble de notions d'arithmétique pratique et d'algèbre dans son traité *De l'abacus* 6), composé en 1202 et retravaillé par lui vers 1228. En 1220, il avait publié sa *Géométrie prati-*

---

8) Le traité *De l'abacus,* par Adelhart de Bath, se trouve à Paris dans le manuscrit latin 533 du fonds de Saint Victor, et dans le manuscrit latin n. 1 de Scaliger. L'invention de l'abacus y est attribuée à Pythagore, comme M. Chasles l'avait dit le 20 janvier 1843 (*Comptes rendus des séances de l'Acad. des sc.* t. XVI, p. 238, note 7). Il l'a répété à l'Académie des sciences, en renvoyant aux deux manuscrits de Paris, dans la séance du 24 juillet 1843 (Extrait du *Compte rendu,* p. 3, note 3, du tirage à part). Ceci répond à un doute exprimé par M. Cantor, qui dit (note 513 *a*, p. 420) qu'après avoir parlé du traité d'Adelhart de Bath sur l'abacus dans la séance du 20 janvier 1843, M. Chasles n'en parle plus dans un travail plus récent. Adelhart dit que le mot *abacus* est moderne et signifie *décuple,* mais que le nom ancien de l'abacus était *table de Pythagore.* — 9) Voyez ci-dessus ch. XVIII. — 1) *Leonardo von Pisa,* p. 341-354. — 2) *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano,* 128 p. in-4. (Rome, 1852); et *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano,* 400 p. in-8 (Rome 1854). — 3) *Scritti di Leonardo Pisano,* 2 vol. gr. in-4. (Rome, 1857-1862). — 4) Voyez M. le prince Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino,* 42 p. gr. in-4 (Rome, 1851). — 5) Voyez M. le prince Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabbionetta, astronomo del secolo decimoterzo,* 109 p. gr. in-4 (Rome, 1851). M. Cantor renvoie à la notice détaillée de M. le prince Boncompagni sur les ouvrages mathématiques traduits par Platon de Tivoli; mais il parait ne pas connaitre la notice non moins détaillée du même savant sur les ouvrages mathématiques traduits par Gherardo de Crémone. — 6) *De abaco,* 459 p. gr. in-4. (*Scritti,* t. 1, Rome, 1857).

que 7). En 1225, à Pise, il avait été présenté à l'empereur Frédéric II, et il avait improvisé la solution de problèmes difficiles d'analyse déterminée et indéterminée, posés par Jean de Palerme et par Théodore: pour trouver ces solutions, il avait employé des méthodes dont il possédait seul le secret; il les fit connaître dans trois traités que nous avons 8). Son *Commentaire sur le livre X des Eléments d'Euclide,* et son *livre des marchands* sont perdus 9). Les renseignements manquent sur les derniers temps de sa vie et sur la date de sa mort.

Dans les œuvres de ce mathématicien si heureusement doué, M. Cantor ne s'arrête pas à ce qui constitue ses plus beaux titres de gloire, mais seulement à la partie élémentaire de son traité *De l'abacus*, c'est-à-dire à ce qui intéresse l'histoire de la numération écrite. Au commencement de ce traité, Léonard distingue: 1°. la *méthode de l'abacus de Pythagore;* 2°. la *méthode d'Alkharizmi,* et 3°. la *méthode indienne,* qu'il met beaucoup audessus des deux autres. Suivant M. Cantor, il avait pu connaître cette troisième méthode surtout à Bougie, qui était, dans la Méditerranée, le principal centre du commerce des Arabes avec l'Orient, au XIIIe siècle. Or, cette *méthode indienne* n'est par la numération avec neuf chiffres et avec le zéro, puisqu'à ce compte elle ne différerait pas de la méthode indo-arabe d'Alkharizmi. Ce n'était par non plus l'algèbre, empruntée de même depuis longtemps aux Indiens par les Arabes, qui en développèrent heureusement quelques parties, mais qui en détériorèrent la forme générale, bien loin de la perfectionner. Ce devait être une méthode indienne que les Arabes ne s'étaient pas encore appropriée au commencement du XIIIe siècle. M. Chasles 10) conjecture que c'était spécialement la *Regula falsi,* récemment empruntée aux Indiens par les Arabes, qui la nommaient *elchataym,* c'est-à-dire règle des *deux parties (alkitain)* 11). M. Cantor pense que la *regula falsi,* ou *règle des deux fausses positions* 12), faisait bien partie de cette méthode indienne vantée par Léonard de Pise, mais que celle-ci comprenait de plus divers procédés indiens qui n'étaient pas encore entrés, ou qui n'étaient entrés que depuis peu de temps, dans la pratique des Arabes.

De ce nombre seraient, suivant M. Cantor, les deux méthodes de multiplication que les Indiens nommaient *vajrâbhyâsa,* multiplication *en zigzag,* et *shabacah,* multiplication *en réseau* 13). Or il est bien vrai que la multiplication en *zigzag (vajrâbhyâsa)* se trouve chez Léonard de Pise, dont elle est même le procédé habituel et presque unique 14), procédé extrêmement ingénieux et très expéditif, mais un peu difficile, qui n'est autre que la *moltiplica per crocetta* ou per *casella* de Fra Luca Pacioli 15), et qui consiste à faire les multiplications d'un chiffre par un autre dans un ordre aussi régulier que compliqué, qui avec des additions faites de mémoire à mesure que les produits partiels se présentent, permet de trouver successivement tous les chiffres du produit définitif, quelque grands que soient les deux facteurs, sans avoir écrit aucun chiffre des produits partiels. Mais il n'est par vrai que la *multiplication en réseau (shabacah),* procédé aussi facile qu'ingénieux 16), qui est la *moltiplica per gelosia* ou *per craticola* de

---

7) *Practica Geometriæ*, p. 1-224 (*Scritti.* t. 2, Rome, 1862). — 8) *Flos super solutionibus quarumdam quæstionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium* (*Scritti*, t. 2, p. 227-247); *De modo solvendi quæstiones avium et similium* (p. 247-252); *Liber quadratorum* (p. 253-283). — 9) Voyez M. le prince Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, p. 241-248. — 10) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences,* 6 juin 1859.— 11) M. Cantor abandonne ici (p. 350) l'interprétation qu'il avait donnée de ce mot arabe dans le chapitre XVIII (p. 266). — 12) Comparez Cossali, *Memorie Storico-Scientifiche sulla origine dell' odierna aritmetica*, Rifl. XIV, p. 377-378 (*Scritti ined. di P. Cossali*, *pubbl. da B. Boncompagni.*) — 13) M. Cantor (notes 646 et 647) renvoie, pour la méthode *Shabacah*, à la description qu'il en a donnée dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (II, 359), et, pour la méthode *Vajrâbhyâsa*, au *Vijaganita* de Bhascara et au commentaire de Ganesa sur le *Lilavâti* du même auteur indien. — 14) *Liber abaci*, p. 11-18. — 15) *Scritti inediti di P. Cossali, pubblicati da B. Boncompagni*, p. 116-117. — 16) Ce procédé consiste à tracer un damier rectangulaire, qui ait autant de rangées verticales de cases, qu'il y a de chiffres dans le multiplicande, et autant de rangées horizontales, qu'il y a de chiffres dans le multiplicateur, à placer chaque chiffre du multiplicande audessus de la colonne verticale de même rang et chaque chiffre du multiplicateur en côté de la colonne horizontale de même rang, à diviser les cases par des diagonales, à écrire dans l'un des triangles rectangles ainsi formés le chiffre des unités et dans l'autre le chiffre des dixaines du produit des deux chiffres qui correspondent simultanément à chaque case, et à faire les additions suivant les colonnes obliques formées par les diagonales.

*

Pacioli 17), se trouve chez Léonard de Pise: la seconde méthode de multiplication que, dans le passage 18) indiqué par M. Cantor, Léonard ajoute après coup, comme plus facile que la multiplication *en zigzag* pour les grands nombres, est celle que Pacioli nomme *moltiplica per quadrilatero* 19): elle ne diffère de notre méthode ordinaire, c'est-à-dire de la multiplication *par échelons (per scaletta)* des abacistes 20), que par un petit détail de disposition, qui consiste à mettre dans une même colonne verticale d'un damier tracé d'avance le premier chiffre à droite de chaque produit du multiplicande entier par chaque chiffre du multiplicateur, à mettre dans la seconde colonne verticale le second chiffre de chaque produit partiel, et ainsi de suite, puis à faire les additions suivant les diagonales non tracées des petits carrés du damier. Cette méthode n'a aucun avantage sur notre méthode ordinaire, qui a celui de n'avoir pas besoin de cases tracées d'avance.

M. Cantor soupçonne que dans la *méthode indienne* Léonard, comprenait aussi certaines considérations théoriques sur les nombres, dont il n'a donné que les premiers éléments dans son traité *De l'abacus*, mais qui depuis ont été portées à un point qui n'avait jamais été atteint ni par les Arabes, ni par les mathématiciens européens du moyen-âge, ni même, ajoute M. Cantor, par les Indiens.

Comme exemples des considérations que Léonard a trouvées dans la tradition gréco-romaine et en même temps chez les Arabes, M. Cantor cite la théorie des nombres premiers 21), et la décomposition d'une fraction en plusieurs autres fractions qui aient toutes pour numérateur l'unité 22).

C'est aux Arabes, et spécialement à Mohammed ben Mousa, que Léonard a emprunté l'algèbre, à laquelle il conserve son nom arabe 23), et qu'il a emprunté aussi le zéro, dont le nom arabe *sifra* devient chez lui *zephirum* 24) au neutre (et non *zephirus*, comme le dit M. Cantor).

Quant au *calcul sur les doigts* 25), à la *division complémentaire* 26) et à d'autres procédés de moindre importance, ce sont des emprunts faits par Léonard à la tradition de Boèce, de Bède, d'Odon de Cluny, de Gerbert et des abacistes postérieurs.

Mais Léonard emprunte avec choix et sait perfectionner ce qu'il emprunte. Les Arabes avaient l'usage empirique de la *preuve par* 9: il en donne la démonstration à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en substituant des lignes aux nombres.

Dans la soustraction, lorqu'un emprunt est nécessaire, Léonard, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre suivant du nombre principal, prescrit d'augmenter d'autant le chiffre suivant du nombre à soustraire 27): pratique qui donne moins de prise aux distractions, suivant M. Cantor.

Enfin, Léonard s'est occupé 28) de certaines séries de fractions, dans le dénominateur de chacune desquelles on sous-entend comme facteurs les dénominateurs écrits de toutes les fractions précédentes.

M. Cantor dit, en terminant, qu'il aurait pu trouver beaucoup d'autres choses intéressantes à noter dans le traité de Léonard de Pise sur l'abacus. Mais, ne pouvant pas tout dire, il fallait s'arrêter quelque part. Il aurait pu même s'arrêter plus tôt; car il avoue que tout ce chapitre et même le précédent forment une sorte d'appendice à la fin de son livre, qui, malgré le caractère vague de son titre, concerne

---

17) *Scritti ined. di P. Cossali*, p. 118. Les Arabes nommaient aussi cette méthode *chabaqah.* Voyez M. Wœpcke, *Traduction du traité d'Arithmétique d'Alkalçâdî*, p. 13 et 14, et note 2 de la p. 13 (Rome, 1859, in-4.). Pour plus de détails sur cette méthode, voyez M. Wœpcke, *Sur quelques anciennes méthodes de multiplication*, *Arte de labbacho*, Tableaux III et IV, p. 6-18 (Rome, 1863, in-4)—18) *Liber Abaci*, p. 19.— 19) *Scritti inediti di P. Cossali*, p. 117. Comparez M. Wœpcke, *Anciennes méthodes des multiplication, Arte de labbacho*, Tableau II, p. 4-6 et p. 10. — 20) Voyez M. Wœpcke, *Anc. méth. de mult. Arte de labbacho*, Tableau I, p. 4, 10 et 11, La *Moltiplica per scachieri* de Pacioli (*Scritti inediti di P. Cossali*, p. 116), l'une des huit qu'il énumère, ne diffère de la *moltiplica per scaletta*, identique à la nôtre, que par la précaution inutile de tracer une case pour chaque chiffre. La *moltiplica per castelluccio* di Pacioli supprime les cases, mais, commençant par en bas, elle place les uns *audessus* des autres les produits partiels du multiplicande entier, et elle remplit par des zéros les places vides à droite des produits supérieurs. C'est une autre variété insignifiante de notre méthode ordinaire.— 21) *Liber abaci*, p. 30. — 22) *Liber abaci*, p. 78-83. — 23) *Liber abaci*, p. 406 et suiv. sur les mots arabes *aljebr v'almukabalah*, voyez ci-dessus, chapitre XVIII, note 19.— 24) *Liber abaci*, p. 2, l. 4; p. 3, l. 22, etc. 25) *Liber abaci*, p. 5. Comparez p. 7, l. 2, 14, 15, 29, 33, 34 et 43; p. 8, l. 14; p. 17-18; p. 30, etc. — 26) *Liber abaci*, p. 31. — 27) *Liber abaci*, p. 22. — 28) *Liber abaci*, p. 24.

principalement l'histoire des systèmes de signes numéraux. Ajoutons que, dans les chapitres précédents et dès les premiers, il y a bien des excursions sur des domaines qui ne touchent que de loin à cet objet principal. Les *Considérations finales* dans lesquelles nous allons suivre notre auteur, n'ont pas la prétention d'établir l'unité sévère de son ouvrage, mais plutôt d'en avouer et d'en excuser la marche un peu vagabonde: marche excusable, en effet, puisque l'auteur a su rencontrer sur son chemin tant de notions historiques d'un haut intérêt, et les communiquer à ses lecteurs.

Considérations finales. 1)

Dans les recherches principales sur les signes numéraux des peuples de l'antiquité et du moyen-âge, comme dans les recherches accessoires qu'il y a mêlées, M. Cantor s'est proposé un but général, qu'il exprime modestement la crainte de n'avoir pas atteint autant qu'il le désirait: « Je voulais, dit-il, faire voir par des considérations tirées de l'histoire des mathématiques, quelle marche on doit attribuer à la cultu intellectuelle et morale des peuples, et montrer que, pour arriver jusqu'à nous, la science mathématique a suivi la même route qui, d'après les traces d'autres porteurs de la civilisation, nous est indiquée comme ayant été suivie aussi par eux. » Cette conclusion, que je viens de traduire, est un peu vague, comme le titre de l'ouvrage. M. Cantor aurait mieux fait de la préciser en rappelant *quelle route* la science mathématique et surtout la numération écrite ont suivie dans leurs progrès.

Au lieu de nous présenter ce résumé naturel de son livre, M. Cantor se borne à rappeler, parmi les points traités, ceux qui, par leur nouveauté, lui paraissent dignes d'une attention spéciale, soit de la part des mathématiciens, soit de la part des autres lecteurs. C'est aux mathématiciens qu'il s'adresse d'abord (p. 355-356). Nous allons renverser cet ordre, afin d'obtenir une gradation ascendante d'intérêt.

M. Cantor me paraît se faire illusion, lorqu'il attribue une haute importance et un caractère sévèrement historique à son roman de la vie de Pythagore (chapitres V, VI et VII), tel que M. Rœth le lui a inspiré, et je ne suis nullement touché de l'apologie qu'il en présente dans ses *Considérations finales* (p. 357-361).

Ensuite il renvoie (p. 362) les *lecteurs non mathématiciens* à l'étude des anciens temps de la Chine. Ils pourraient commencer cette étude, d'une manière aussi brève qu'utile, dans le mémoire d'Ideler sur la *Chronologie des Chinois,* et la compléter ensuite par la lecture des recherches d'Abel Rémusat, de M. Stanislas Julien et d'autres savants. Mais, s'ils abordaient sans précaution la lecture du Chapitre III de M. Cantor, à côté de quelques notions justes sur la langue et l'écriture de ce peuple, ils y trouveraient d'une part une erreur de fait sur l'antiquité des porcelaines chinoises découvertes en Egypte et en Babylonie, d'autre part les fausses conséquences que l'auteur en déduit et qu'il développe dans son chapitre VII.

Il rappelle (p. 361) qu'il a signalé (p. 33-38) la Babylonie comme un centre important de connaissances. Il a eu raison; mais M. Weber était arrivé avant lui à la même conclusion, en l'appuyant sur des faits plus nombreux et plus décisifs.

Les vues que M. Cantor (p. 361-362) emprunte à M. Oncken sur l'origine probablement babylonienne de la division sexagésimale, reposent sur des inductions vraisemblables. Mais nous avons vu que le fait de l'emploi perpetuel des fractions sexagésimales chez les Babyloniens est prouvé par des documents que M. Cantor aurait pu trouver dans l'ouvrage de M. Pihan.

Il y a beaucoup de vérité dans les considérations de M. Cantor (chapitres XIX-XXIII et p. 363) sur la persistance des études grecques et latines au moyen-âge, en ce qui concerne les mathématiques. Mais ce point, de même que le précédent, intéresse plus les *lecteurs mathématiciens* que les autres, auxquels M. Cantor s'adresse en ce moment.

---

1) *Schlussbetrachtungen*, p. 355-363.

Quant aux *lecteurs mathématiciens,* voici les points sur lesquels il réclame surtout leur attention (p. 356).

Dans son chapitre III, il croit avoir montré l'antiquité au moins possible du zéro chez les Chinois. J'ai dit, au contraire, que probablement le zéro a été introduit assez tard par l'influence indienne dans le système des *barres numérales* des Chinois, système analogue à la notation hiérogliphique des nombres chez les Egyptiens.

Il renvoie avec confiance à ses chapitres VI et VII: on y trouve, sur l'origine des connaissances mathématiques de Pythagore, des conjectures dans lesquelles il donne beaucoup trop de place, d'une part à la légende sur les fonctions sacerdotales du philosophe grec en Egypte, sur son voyage à Babylone et sur ses relations prétendues avec Zoroastre, d'autre part à l'hypothèse fabuleuse des relations directes entre les anciens Babyloniens et les Chinois, et à une opinion peu juste envers le génie grec et beaucoup trop favorable à la science des Egyptiens et des Babyloniens. Mais il a le mérite d'avoir très bien montré le rapport qui existe entre le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse et les notions du même philosophe sur l'arithmétique et sur ses rapports avec la géométrie.

La comparaison que M. Cantor a établie (chapitre X, p. 150) entre la *méthode d'exhaustion* et la méthode d'Archimède pour exprimer verbalement de très grands nombres, n'ajoute pas autant qu'il semble le croire (p. 356) aux excellentes considérations de M. Chasles, que, du reste, il accepte complètement.

M. Cantor me paraît de même ajouter trop d'importance à sa négation absolue de l'existence du zéro chez les Grecs (chapitre VIII, p. 121-127). Entre cette négation, telle que M. Cantor l'explique lui-même, et l'affirmation de M. Wœpcke en faveur de l'existence de ce signe chez les Grecs avec une forme et une signification analogues, mais avec un usage différent, il y a une question de mot plutôt que de fait.

M. Cantor fait bien de rappeler l'explication qu'il a donnée (chapitre X, p. 148-154) sur le rapport entre la numération parlée des Grecs et les tranches de quatre chiffres d'Apollonius, de même qu'entre la numération parlée des Romains et nos tranches de trois chiffres.

Il a de même raison d'attacher de l'importance aux considérations nouvelles par lesquelles il a confirmé l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce en deux livres, et spécialement des passages sur les neuf signes pythagoriques si analogues à nos neuf chiffres modernes (chapitres XI-XVI, XIX, XX et XXII). Mais nous avons vu qu'il restait encore beaucoup à dire après lui en faveur de la même thèse, et sur la nature de l'œuvre de Boèce, dont le premier livre presque entier est une traduction d'un maigre extrait grec de la *Géométrie* d'Euclide.

Il a le mérite d'avoir prouvé (Chapitre XIII, p. 182-185; chapitre XV, p. 228-229, et chapitre XXI, p. 308) que Boèce avait écrit une *Astronomie*, et d'avoir montré que cet ouvrage était préparé par le morceau sur les fractions, mis par Boèce à la fin de sa *Géométrie.*

Enfin, il a fortifié (chapitres XXI et XXII) les preuves données avant lui de l'origine gréco-romaine et nullement arabe des connaissances mathématiques de Gerbert.

Je m'empresse d'ajouter que M. Cantor est loin d'avoir mentionné ici toutes les observations neuves et utiles que son livre renferme. Par exemple, il n'a pas rappelé le service qu'il a rendu en analysant (chapitre XX) le traité d'Odon de Cluny sur l'abacus. Seulement il aurait dû ajouter, comme je l'ai montré, qu'Odon, un demi siècle avant Gerbert, au lieu d'avoir sous les yeux les deux passages de la *Géométrie* de Boèce sur l'abacus, abrégeait un traité de l'abacus rédigé d'après les principes de Boèce, et qu'Odon prenait à tort ce traité pour une œuvre du savant contemporain de Théodoric.

Quant à l'histoire des chiffres et de leur usage, M. Cantor ne s'attribue guères que le mérite d'avoir réuni et disposé dans un ordre nouveau et plus lumineux des faits déjà connus. Sur quelques points, cet ordre m'a semblé laisser encore à désirer (voyez surtout la fin du chapitre Ier), et j'ai signalé des lacunes, dont quelques unes étaient faciles à combler, et dont d'autres méritaient la peine de s'en occuper. Mais, d'un autre côté, je trouve qu'ici M. Cantor ne se rend pas assez de justice à lui même. Car quelques points de ses recherches, qui viennent d'être rappelés, et d'autres qui auraient mérité de l'être,

contribuent à jeter un nouveau jour sur l'origine des figures des chiffres et du zéro et sur l'origine de leur valeur de position.

Sur ces deux questions liées entre elles, mais pourtant bien distinctes, M. Cantor a fait faire un pas à la science historique; M. Wœpcke en a fait faire un autre; profitant de leurs excellents travaux, j'ai essayé de faire un pas de plus, et d'ajouter le plus que j'ai pu aux notions contenues dans le livre que j'avais à analyser.

Je pourrais, à mon tour noter ici les points qui me paraissent les plus importants dans ce que j'ai ajouté. Mais j'aime mieux laisser ce soin aux lecteurs, et clore d'une manière plus utile ce travail plein de détails si multipliés, en formulant, et en développant, s'il en est besoin, les résultats généraux qui me paraissent en ressortir, pour ce qui concerne l'histoire de la numération écrite, objet principal du livre de M. Cantor, mais qui tient trop peu de place dans ses *Considération finales*. C'est là, dans son estimable travail, une dernière lacune, que je vais essayer de combler en partie.

L'ensemble des noms de nombre employés dans une langue, et la manière de combiner ces noms entre eux pour exprimer tous les nombres, impliquent un certain système de numération, qui est celui des peuples parlant cette langue 2).

Un peuple qui, dans son langage, serait réduit à exprimer les nombres par la répétition du mot signifiant *un*, serait bien misérable. Il faudrait plaindre, bien moins sans doute, mais beaucoup encore, un peuple qui, réduit à la fameuse *arithmétique binaire* de Leibniz, n'aurait de mots que pour 1 et 2 unités simples, mais aurait ensuite un luxe embarrassant de mots pour les puissances de 2, et serait condamné à exprimer longuement tous les nombres avec ces deux petits nombres d'unités et avec toutes ces puissances dont la sixième est très inférieure à la seconde puissance de 10. Il faudrait plaindre aussi un peuple qui aurait, au contraire, le luxe gênant de cent mots différents pour exprimer les cent premiers nombres d'unités, et qui, au dessus de ces unités simples si nombreuses, n'aurait d'autres noms de nombres que pour exprimer les puissances de 100, puissances trop rapidement croissantes, dont la troisième est déjà un million.

Portée jusqu'à ce point, l'exagération de ces deux défauts contraires est sans exemple connu 3). Mais des peuples nègres de l'Afrique occidentale sont réduits à une *arithmétique quinaire*. *L'arithmétique quaternaire* est signalée par Aristote chez des peuplades de la Thrace, et quelques vestiges à demi effacés semblent en indiquer l'existence primitive chez les Egyptiens, qui, en triplant la base de cette numération, seraient arrivés à une *arithmétique duodécimale,* avant de s'arrêter définitivement à l'arithmétique décimale, également éloignée des deux excès que nous venons d'indiquer 4).

Les peuples indo-européens ont un mot simple pour chacun des nombres depuis 1 jusqu'à 10, et ils ont aussi des mots simples, sinon pour toutes les puissances de 10, du moins pour quelques unes. Ces mots, combinés par addition et par multiplication, leur permettent d'exprimer clairement, facilement et brièvement un nombre quelconque. Si de plus, ils ont des mots particuliers pour les multiples de 10 par chacun des neuf premiers nombres, ce luxe inutile n'a du moins rien d'incommode. Le système de numération de ces peuples est donc essentiellement décimal, et des considérations étymologiques prouvent que le calcul sur les dix doigts des mains en est l'origine 5). Ce même système de numération est aujourd'hui celui de tous les peuples civilisés, quels que soient d'ailleurs leurs systèmes de mesures et de fractions. La numération décimale a toujours été celle de tous les peuples déjà arrivés à une certaine culture des sciences: elle a été, dès une haute antiquité, celle des Chinois, des Chaldéens, des Egyptiens, des Grecs et des Romains. Mais ce n'est que dans ces derniers temps, et par l'initiative de la France, que le système décimal de numération a introduit ses applications dans le système des mesures.

---

2) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, kap. III. — 3) Voyez M. Al. de Humboldt, *Ueber die bei verschiedenen Vœlkern üblichen systeme von Zahlzeichen* (dans le Journal de mathématiques de Crelle, t. 4, p. 205-231). — 4) Voyez ci-dessus, chapitre Ier. — 5) Voyez ci-dessus, chapitre II.

L'emploi systématique des fractions décimales a été inconnu dans l'antiquité: il s'est introduit au moyen-âge, lorsque l'arithmétique indienne avec le zéro a offert un moyen si commode de les exprimer par la valeur de position continuée audessous de l'unité. Les Egyptiens procédaient par fractions très-simples, qui toutes, excepté 2/3 et 5/6, avaient l'unité pour numérateur sous-entendu, et ils décomposaient en plusieurs fractions de cette espèce les fractions plus compliquées 6). Les Babyloniens ou Chaldéens procédaient par soixantièmes, en énonçant le numérateur variable et en sous-entendant le dénominateur invariable 7). Les savants grecs ont emprunté aux Chaldéens la division sexagésimale de l'unité, et aux Egyptiens la décomposition d'une fraction en plusieurs qui eussent toutes l'unité pour numérateur; mais, de même que les Romains, ils employaient aussi des fractions à numérateurs et dénominateurs divers 8). Les fractions décimales paraissent nous être venues par les Arabes: le plus ancien auteur chez lequel on les ait signalées jusqu'à ce jour est le juif Jean de Séville, qui vivait chez les Maures d'Espagne au XIIe siècle 9).

Les idées des nombres, comme celles des autres objets de la pensée, s'expriment aux yeux par l'écriture. Avant de connaître les écritures *phonétiques*, qui représentent les mots et par eux les pensées correspondantes, l'espèce humaine a employé des écritures *idéographiques*, qui représentent directement les objet de la pensée, abstraction faite des mots, savoir: les objets visibles par une représentation grossière ou abrégée, et les objets invisibles par des représentations d'objets visibles pris pour symboles, ou par des signes arbitrairement choisis. En découvrant l'Amérique, les Européens y ont trouvé des peuples habitués à un système d'écriture qui peignait les objets. Les caractères de l'écriture chinoise sont idéographiques et paraissent avoir eu leur origine dans des peintures grossières et abrégées, dont les traits sont devenus méconnaissables. L'écriture égyptienne, autrefois purement idéographique, est devenue en partie phonétique. Le phonétisme est le caractère dominant des écritures des peuples sémitiques et indo-européens. Mais ces peuples ont deux manières d'exprimer les nombres aux yeux, savoir: phonétiquement en écrivant les noms de nombre, et idéographiquement par des signes indépendants des mots et de la diversité des langues.

Ces signes idéographiques des nombres, bien plus commodes que les mots dans les calculs, sont nommés *chiffres*, et il y en a de deux espèces, savoir: les *chiffres alphabétiques* ou *lettres numérales*, qui sont des lettres choisies chacune pour représenter un nombre, et les *chiffres proprement dits*, qui sont des signes spéciaux pris en dehors des alphabets.

Les peuples à écriture purement idéographique ont naturellement des chiffres proprement dits; car, pour avoir des chiffres alphabétiques, il faudrait qu'ils les empruntassent à une écriture étrangère. Mais il leur est possible de peindre aux yeux les nombres, sans chiffres d'aucune espèce, par la répétition du signe idéographique de l'objet représenté. Cette représentation *concrète* est la manière la plus grossière d'écrire les nombres. Les Européens l'ont trouvée chez d'anciens peuples de l'Amérique 10).

Dans l'écriture hiéroglyphique des Egyptiens, le signe idéographique d'un objet se trouve répété trois fois ou neuf fois, non pas pour signifier trois ou neuf objets semblables, mais pour exprimer le pluriel sans désignation précise de nombre. Répété de même trois ou neuf fois dans cette écriture, le signe idéographique de *cent*, de *mille*, de *dix-mille*, de *cent mille* ou d'un *million* est employé quelquefois pour signifier vaguement *des centaines*, *des milliers*, *des myriades*, *des centaines de mille* ou *des millions* 11). Mais, dans cette même écriture, les nombres précis s'expriment d'une manière *abstraite* par des signes placés auprès du signe de l'objet qu'il s'agit de nombrer 12). L'unité est représentée par un trait verti-

6) Voyez ci-dessus, chapitre Ier et M. Pihan, p. 38-39. — 7) Voyez ci-dessus, chapitre II, et M. Pihan, p. 44. — 8) Voyez M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, kap. IV, p. 112-115. M. Pihan et M. Cantor ont omis la notation grecque des fractions. — 9) Voyez ci-dessus, chapitre XVIII, fin. — 10) Voyez M. Al. de Humboldt, cité ci-dessus, note 3. — 11) Voyez M. Lepsius, *Ueber die Gœtter der vier Elemente bei den Ægyptern*, p. 224-234 (Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 1856, in-4). — 12) Voyez ci-dessus, chapitre I.

cal, qu'on répète depuis deux jusqu'à neuf fois pour exprimer les nombres de 2 à 9. Mais ces traits, quand il y en a plus de quatre, sont distribués en groupes, dont chacun ne comprend jamais plus de *quatre* traits. Pour que cette combinaison représentât fidèlement une *arithmétique quaternaire,* il faudrait que dans l'expression d'un nombre ainsi figuré, il n'y eût jamais qu'un dernier groupe contenant moins de *quatre* traits. Il n'en est pas ainsi, puisque dans cette notation 5 se décompose en 3+2, 6 en 3+3, et 9 en 3+3+3. Mais le groupement par quatre, qui subsiste dans l'expression du nombre 7 décomposé en 4+3, et dans l'expression du nombre 8 décomposé en 4+4, avait peut être été primitivement en usage. D'autres particularités de la numération égyptienne semblent appuyer cette conjecture. Dans la langue égyptienne, 8 était le duel de 4. La vieille notation hiératique possède, pour les nombres ordinaux des jours du mois, un signe affecté à chacun des quatre premiers nombres; mais, pour exprimer les nombres de 5 à 8, elle juxtapose deux des quatre premiers signes. *Quatre* est le nombre des mois de chacune des trois saisons de l'année égyptienne: dans la désignation ordinale des mois de l'année, l'écriture hiéroglyphique ne dépasse jamais le nombre 4, exprimé par 4 traits verticaux, et elle indique la raison à laquelle le mois appartient. Cependant la langue égyptienne avait acquis une série de douze noms pour les *douze* mois de l'année. De même, dans la numération, le système *quaternaire,* en triplant sa base, avait pu produire un système *duodécimal*, dans lequel la *période quaternaire* ne marquait plus qu'une division, comme la *période quinaire*, dans le *système décimal* de quelques peuples. Quoi qu'il en soit de cette hypothèse sur l'existence antérieure d'une *arithmétique duodécimale* en Egypte, il est bien certain que l'*arithmétique décimale* a dominé dans ce pays dès une époque très reculée. La notation hiératique pour les nombres ordinaux des jours du mois n'a pas un signe particulier pour chacun des nombres 5, 6, 7 et 8; mais elle en a un pour 9, et la notation hiératique des nombres cardinaux a un signe particulier pour chacun des nombres de 1 à 9. En général, la notation numérale des Egyptiens, tant *hiéroglyphique* qu'*hiératique* et *démotique*, a une signe pour 10 et pour chacune des puissances de 10: elle exprime chacun des neuf nombres d'unités de chaque ordre décimal, soit par la répétition du signe simple, soit par un coëfficient ajouté à ce signe, soit par un signe unique et spécial pour ce nombre. La valeur décimale de position des chiffres est donc entièrement étrangère à tout ce système égyptien: la multiplication par les coëfficients y joue seule quelque rôle à côté de l'addition des valeurs des signes.

La prétendue *arithmétique binaire* des Chinois n'est qu'un rêve de Leibniz 13). Aussi haut qu'on peut remonter dans leur histoire, on trouve que leur numération tant parlée qu'écrite est purement décimale pour les nombres entiers. Ils ont deux systèmes principaux de notation numérale. L'un de ces systèmes présente plusieurs variétés, dont quelques unes sont très antiques: il a neuf chiffres pour les neuf premiers nombres et d'autres chiffres pour 10 et pour chacune des puissances de 10; il exprime les nombres de dixaines, de centaines, des milliers, etc., à l'aide des signes des nombres d'unités simples pris comme coëfficients. Il n'y a donc là nulle trace de valeur de position. L'autre système emploie des barres dont chacune représente une unité. Les barres se juxtaposent jusqu'à 5 inclusivement; mais, pour exprimer les nombres de 6 à 9 inclusivement, cinq barres sont remplacées par une seule posée autrement que les autres. Le système décimal ayant son origine dans le calcul sur les doigts des deux mains, il est naturel que la somme des cinq doigts d'une main puisse être considérée comme une unité d'un ordre intermédiaire. L'application de cette considération si naturelle se montre aussi dans les notations numérales non alphabétiques des Babyloniens, des Syriens et des Palmyréniens, dans la notation des Romains et dans une très ancienne méthode de notation numérale grecque par les initiales des noms de nombre 14). On retrouve l'application de cette même *période quinaire* subordonnée au *système décimal* dans les abacus à boules, à fiches et à jetons des Chinois, des Grecs et des Romains 15). Si ce système des *barres numérales* est antique en Chine, il a dû avoir autrefois des signes pour les

---

13) Voyez ci-dessus, chapitre III. — 14) Voyez ci-dessus, chapitre I, fin, et chapitres VIII, XI et XVII.—15) Voyez ci-dessus, chapitre IX.

dixaines, les centaines et les milliers. Mais les plus anciens exemples que l'on cite de ce système ne sont pas antérieurs au VII[e] siècle de notre ère. Dans tous les exemples connus comme dans l'usage actuel des savants, auxquels l'emploi de ce système est réservé chez les Chinois, le zéro indien, avec la valeur de position, empruntée aussi aux Indiens, vient se joindre aux neuf groupes de barres numérales, qui suffisent ainsi à l'expression de tous les nombres. Mais il y a là certainement une importation étrangère.

La notation cunéiforme 16), employée en Assyrie, en Babylonie et en Perse, avait des signes simples pour l'unité, la dixaine et la centaine, et des signes complexes pour exprimer les puissances plus élevées de 10. Pour l'expression des nombres d'unités ou de dixaines jusqu'à 5, ce système procède par répétition du signe de l'unité ou de la dixaine, comme la notation hiéroglyphique des Egyptiens et comme le système chinois des barres numérales. Pour exprimer les nombres d'unités et de dixaines audessus de 5, le signe de l'unité plus grand signifie 5, quand il est placé à gauche d'unités simples, et 50 lorsqu'il est placé à gauche de dixaines. Les nombres de centaines, de milliers, etc., s'expriment par les signes des neuf premiers nombres, qui, mis à gauche, servent de coëfficients, tandisque, placés à droite, ils s'ajoutent au nombre total. La valeur de position décimale est étrangère à ce système.

Le système romain 17) pour la notation des nombres est probablement d'origine étrusque, comme les figures primitives des signes employés. Les principes de ce système ressemblent beaucoup à ceux du système conéiforme, malgré la différence complète des figures. Dans le système romain, chacune des puissances de 10 a un signe. Jusqu'à 1000, ces signes sont simples; audessus de 1000, les signes sont complexes; mais le plus souvent on en évite l'emploi. Les nombres d'unités de chaque ordre décimal s'expriment par la répétition du signe de l'unité de cet ordre; mais 5 et ses multiples par les puissances de 10 ont aussi des signes spéciaux, dont les valeurs s'additionnent avec les unités de même ordre. De plus, le signe de l'unité, de la dixaine ou de la centaine, placé à gauche d'un signe simple de valeur supérieure audessous de 1000, s'emploie par soustraction. A gauche du signe de 1000, les signes inférieurs servent de multiplicateurs, et permettent d'éviter l'emploi des signes complexes pour les puissances de 10 supérieures à 1000. Le signe de 1000 lui-même peut être remplacé par un trait horizontal audessus des signes qui expriment le nombre de milliers, et par le point marquant la séparation des signes numéraux en deux tranches. Quand il y a deux ou plusieurs tranches ainsi séparées, l'unité de la tranche à gauche vaut 1000 fois ou 100 fois l'unité de la tranche à droite, suivant que celle-ci a des centaines ou qu'elle n'en a pas. Si les Romains s'étaient avisés de donner à leurs tranches une valeur de position *décuple seulement,* de réduire au *maximum* de 9 le nombre des unités exprimées par chaque tranche, et d'inventer un zéro pour marquer la place des tranches nulles, ils seraient arrivés à un système équivalent en principe à notre système actuel venu de l'Inde, mais analogue au système des barres numérales chinoises par la complication de l'expression de chacun des neuf nombres d'unités simples. Mais les Romains n'ont par conçu la pensée de cette heureuse innovation. Ils reçurent tardivement des néopythagoriciens grecs un système à peu près équivalent à celui-là pour les calculs, mais qui, n'ayant par le zéro, ne pouvait s'appliquer que sur un tableau à colonnes préparé d'avance.

La notation cunéiforme des nombres a appartenu d'une part a des peuples de race scythique ou touranienne fixés dans l'empire des Perses, d'autre part aux Perses eux-mêmes, peuple de la famille indo-européenne, et enfin aux populations sémitiques de l'Assyrie et de la Babylonie. Mais, outre l'écriture cunéiforme employée dans leurs inscriptions, ces dernières avaient peut-être, pour les usages ordinaires de la vie, une écriture alphabétique et une notation par lettres numérales 18). Quant aux populations sémitiques de l'Asie occidentale 19), il est certain que les Syriens, les Palmyréniens et les Phéniciens ont eu concurremment deux systèmes de notation des nombres, l'un non alphabétique et plus

---

16) Voyez ci-dessus, chapitre II. — 17) Voyez ci-dessus, chapitre XI. — 18) Voyez ci-dessus, chapitre II. — 19) Voyez ci-dessus, chapitre I, fin, et chapitre XVII.

ou moins analogue au système hiéroglyphique des Egyptiens et au système cunéiforme par le principe de répétition du signe de l'unité, l'autre alphabétique et offrant une lettre pour chaque nombre d'unités et de dixaines. Ce dernier système paraît avoir existé seul chez les Hébreux.

Très anciennement, les Grecs 20) avaient une notation numérale analogue à celle des Romains par ses procédés, quoique très différent par ses figures. Dans cette vieille notation grecque, les nombres 1, 5, 10, 100, 1000 et 10000 étaient désignés chacun par la lettre initiale majuscule du nom grec de chacun de ces nombres; les nombres d'unités de chaque ordre décimal s'exprimaient par la répétition de la lettre numérale jusqu'au nombre 4 inclusivement; le Π enveloppant la lettre numérale servait de coïfficient pour exprimer cinq unités de chaque ordre, et l'on pouvait exprimer ainsi un nombre quelconque jusqu'à 100000 exclusivement. Mais un système de chiffres alphabétiques, établi à l'imitation de celui des Phéniciens et completé par trois caractères ajoutés aux 24 de l'alphabet ionien, fut le système prédominant chez les Grecs. Il offrait un signe pour chacun des neuf nombres d'unités, de dixaines et de centaines, et les neuf premiers signes, avec une virgule à gauche exprimaient les neuf nombres de milliers. Quelquefois les 18 signes suivants, avec la virgule à gauche, exprimaient les neuf nombres de dixaines de mille et les neuf nombres de centaines de mille, de sorte qu'on allait ainsi jusqu'au million exclusivement. Mais, plus habituellement, la myriade, prise comme multiplicande, servait d'unité nouvelle, et on l'exprimait soit en toutes lettres, soit par une initiale, soit simplement par un point, qui séparait les lettres numérales placées à gauche et exprimant le nombre de myriades, des lettres numérales placées à droite et exprimant le nombre d'unités simples; une seconde tranche à gauche pouvait être séparée de même, pour exprimer les myriades de myriades, et ainsi de suite. Ce système grec des tranches, formulé par Apollonius, est bien plus régulier que le système romain. Quant à l'invention d'Archimède, qui consistait à doubler le nombre des ordres décimaux de chaque tranche, elle n'avait nullement pour objet de fournir aux calculateurs grecs un système de notation plus commode, mais bien de donner à la langue grecque un moyen d'exprimer avec précision des nombres énormes, et de prouver ainsi que ces nombres ne sont ni infinis, ni indéfinis. Pour arriver à notre système actuel, le plus commode pour les calculs, bien loin de doubler chacune de leurs tranches de quatre ordres décimaux, les Grecs auraient dû réduire chaque tranche à un seul ordre décimal, faire jouer ainsi à la décade le rôle qu'ils donnaient à la myriade pour la valeur de position, et inventer un signe pour marquer les ordres vides. Mais les Grecs n'ont pas eu plus que les Romains la pensée de cette simplification de leurs tranches numérales.

C'est aux Indiens qu'appartient l'honneur d'avoir inventé notre système moderne de numération en chiffres, c'est-à-dire l'application parfaite de la valeur décimale de position avec neuf chiffres et le zéro 21). Très inférieurs aux Grecs pour le génie d'observation et d'induction et pour la rigueur du raisonnement déductif, ils avaient au plus haut degré l'imagination inventive dans le domaine des spéculations arithmétiques ou métaphysiques, et une mémoire étonnante, développée par des exercices persévérants. A peine avaient-ils une écriture, que déjà ils imaginaient, comparaient et exprimaient par la parole des nombres prodigieux. Des Indiens contemporains d'Archimède le devançaient dans cet art. Ils avaient sans doute dès lors les vieux chiffres couchites pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 9 et pour d'autres nombres; mais ces chiffres avaient dû s'offrir à eux sans valeur de position, comme ils étaient employés aussi en Egypte. Jusqu'à l'invention du zéro, les Indiens durent les employer de même. Mais probablement ils calculaient avec des boules auxquelles ils pouvaient donner des valeurs décimales de position. Peut-être l'invention du système des neuf chiffres et du zéro fut-elle précédée et préparée chez eux par l'emploi de mots symboliques représentant les neuf premiers nombres et entrant dans des vers mnémoniques où ils leur donnaient des valeurs décimales de position, en marquant aussi par des mots symboliques les places des

---

20) Voyez ci-dessus, chapitre VIII. — 21) Voyez ci-dessus, chapitre IV.

ordres décimaux laissés vides dans les nombres ainsi exprimés. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'au moins à partir du Ve siècle de notre ère, l'usage de cette numération mnémonique par mots symboliques mis en vers et doués d'une valeur décimale de position, a coëxisté dans l'Inde avec l'emploi des neuf chiffres et du zéro dans un système de notation semblable au nôtre, comme aussi avec l'emploi persistant d'autres systèmes de chiffres, de lettres numérales et de mots symboliques, auxquels la valeur décimale de position était étrangère.

Il n'est pas moins certain 22) que vers l'an 800 la valeur de position, les neuf chiffres et le zéro ont été enseignés par les Indiens aux Arabes orientaux, que ceux-ci ont transmis cette connaissance aux Grecs byzantins à une époque inconnue, mais certainement avant le XIVe siècle, et que, vers le commencement du XIIe siècle, les Arabes occidentaux l'ont transmise aussi aux populations chrétiennes de l'Occident. Mais, chez ces dernières, une autre invention, provisoirement utile, avait précédé de sept siècles l'introduction de la méthode indo-arabe: cette invention est celle de l'*abacus* des néopythagoriciens. Quelques considérations sont nécessaires pour en expliquer l'importance historique.

L'utilité des chiffres ne consiste pas seulement à exprimer les nombres aux yeux d'une manière briève et claire, mais encore à en fixer les éléments d'une manière nette et bien distincte, pour la commodité des calculs. Cependant les opérations arithmétiques peuvent s'affectuer sans chiffres.

Par exemple, on peut, très difficilement, il est vrai, opérer de mémoire sur les nombres exprimés par les mots dans un certain système de numération, puisque cette numération parlée distingue les éléments de chaque nombre total, comme de chiffres pourraient le faire.

Les opérations arithmétiques peuvent aussi s'effectuer, moins difficilement, en écrivant les noms de nombre en toutes lettres ou en abrégé, et en opérant sur eux comme on opérerait sur les chiffres. Longtemps après avoir connu la notation indienne, des mathématiciens arabes ont persisté à opérer ainsi dans des traités d'arithmétique où il n'y a pas un seul signe numéral, et où les nombres entrent dans les calculs, tel que la langue les fournit, c'est-à-dire sans que leurs éléments aient une valeur de position 23).

D'un autre côté, on peut, très lentement, il est vrai, mais très facilement et d'une manière indépendante de tout système particulier de numération parlée ou figurée, faire les opérations arithmétiques avec des boules que l'on compte. Par exemple, on peut mettre une boule dans un vase, chaque fois que l'on retranche un nombre de boules *diviseur* d'un nombre de boules *dividende;* quand l'opération cesse d'être possible, il n'y a plus qu'à compter les boules du *quotient* et celles du *reste,* s'il y en a.

Mais les mêmes opérations s'effectuent d'une manière plus commode, plus prompte et plus intelligente, en rangeant les boules ou les jetons suivant une série de colonnes douées de valeurs décimales de position, a fin d'avoir beaucoup moins de boules ou jetons à compter. Tel est le principe du *suan-pan* chinois à boules enfilées; tel était le principe de l'*abacus* primitif des Grecs et des Romains 24). Il y avait des *abacus* où les colonnes étaient marquées par des rainures; il y en avait où elles étaient marquées par des lignes tracées sur du sable fin.

Un progrès important consista à remplacer chaque nombre de jetons dans chaque colonne de l'abacus par une seule pièce mobile portant ce même nombre écrit, ou bien par ce même nombre tracé directement en signes numéraux quelconques dans les colonnes de l'abacus. Des néopythagoriciens alexandrins, auteurs de cette invention tardive, y imprimèrent le cachet de leur secte et du pays qu'ils habitaient: au lieu de prendre les caractères grecs qui exprimaient les neuf premiers nombres, ils choisirent neuf figures adaptées à leurs interprétations symboliques, qu'ils exprimèrent aussi par des noms grecs mystérieux donnés aux neuf nombres 25).

En Grèce, cette invention des néopythagoriciens paraît s'être peu répandue, et il ne faut pas trop s'en étonner. En effet, pour le calcul avec des jetons, la valeur de position dans les colonnes de l'abacus

---

22) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 23) Voyez ci-dessus, chapitre XVII. — 24) Voyez ci-dessus, chapitres IX, X, XIII, XIV, XV et XVI. — 25) Voyez ci-dessus, chapitre XVI.

était d'une utilité évidente, puisque, par exemple, cinq jetons dans la troisième colonne étaient plus vite comptés que 500 jetons, qu'ils remplaçaient. Mais, quand, au lieu de jetons dont chacun représentait une unité, on employait en dehors de l'abacus les lettres numérales grecques, dont chacune représentait un nombre, ces lettres, sans valeur de position, semblaient laisser peu à désirer pour la facilité des calculs 26). En effet, dans ce système grec, chaque nombre d'unités de chaque ordre décimal était représenté par une seule lettre, comme il l'était par un seul chiffre dans le système des néopythagoriciens. Il est vrai que dans celui-ci un même nombre d'unités était toujours réprésenté par un même chiffre, quel que fût l'ordre décimal de ces unités, tandisque pour un même nombre d'unités la lettre numérale changeait suivant l'ordre décimal. Par conséquent, pour multiplier par 10 ou par une puissance de 10 un nombre exprimé en lettres numérales grecques, il fallait changer toutes les lettres, tandisqu'il suffisait de reculer d'une ou de plusieurs colonnes vers la gauche de l'abacus tous les chiffres pythagoriques, sans en changer un seul. Il est encore vrai que dans les opérations partielles chaque lettre grecque entrait avec toute sa valeur numérale, tandisque chaque chiffre pythagorique n'y entrait qu'avec sa valeur simple, inférieure à 10, sans sa valeur de position. Mais il ne faut pas s'exagérer cet avantage; car, par exemple, dans la multiplication de 975 par 36, la multiplication partielle de 900 par 30 n'est pas beaucoup plus difficile que celle de 9 par 3. D'ailleurs, les avantages réels du système nouveau étaient compensés par l'inconvénient non moins réel d'avoir perpétuellement besoin de l'abacus, dont on se passait parfaitement avec les lettres numérales grecques. Si le système indien avec le zéro s'était présenté aux Grecs au lieu de l'abacus pythagorique, ils l'auraient bien vite adopté.

Les Romains, et les peuples de l'Occident, pliés aux habitudes romaines, n'avaient pas les mêmes motifs de dédaigner l'invention des néopythagoriciens. Car la notation numérale romaine, très inférieure aux système des lettres numérales grecques pour l'expression claire, et simple des nombres, l'était bien plus encore pour la commodité des calculs 27). Les seuls nombres d'unités, de dixaines et de centaines qu'elle exprimât chacun par un seul signe étaient 1 et 5: pour exprimer chacun des sept autres nombres d'unités de ces différents ordres décimaux, il fallait réunir deux, trois, quatre ou cinq signes. Outre ses autres avantages, le système nouveau avait pour ces peuples celui de les dispenser de faire entrer dans les calculs ce lourd bagage des signes incommodes, ou bien, s'ils voulaient le conserver, de le rendre plus simple, plus maniable et plus clair, en le réduisant aux sept groupes de signes qui, avec les signes de 1 et de 5, exprimaient les neuf premiers nombres, et en isolant chacun de ces groupes dans les colonnes de l'abacus. On conçoit donc que, pour les calculs, le système de l'abacus pythagorique, avec ou sans les figures des neuf chiffres, ait prévalu en Occident, jusqu'au jour où il dut disparaître devant le système indien transmis par les Arabes, système dont l'avantage considérable dû à l'usage du zéro, est de permettre non-seulement d'exprimer tous les nombres, mais d'exécuter facilement et clairement tous les calculs, sans avoir besoin d'un tableau à colonne tracé d'avance.

Ainsi la valeur décimale de position, pour les boules ou jetons employés dans les calculs, a été connue de beaucoup de peuples anciens, et notamment des Grecs et des Romains. Une secte grecque a inventé tardivement l'application de cette valeur de position à un système de neuf chiffres; mais avec la nécessité d'un appareil gênant. Les Indiens ont inventé de leur côté la valeur de position des chiffres; mais, au lieu de 9 seulement, ils ont eu l'heureuse pensée d'en prendre de plus un dixième, pour conserver aux autres leurs rangs en marquant les places vides. C'est ainsi qu'ils ont rendu commode l'application de la valeur de position. Employé d'abord par eux et ensuite par les Arabes à des usages assez restreints ce système domine aujourd'hui à juste titre chez tous les peuples civilisés.

---

26) Comparez M. Chasles, *Sur le passage du premier livre de la Géométrie de Boèce relatif à un nouveau système de numération* (Bruxelles, 1836, in-4), et M. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, kap. IV, *Die Logistik der Griechen*. — 27) Voyez ci-dessus, chapitre XI.

* *

Longtemps l'origine et l'histoire de ce système ont été mal comprises, parcequ'on s'est imaginé qu'elles devaient être identiques avec l'origine et l'histoire des figures des neuf chiffres. C'est ainsi qu'on a voulu refuser aux Grecs et aux Romains antérieurs à l'islamisme le système de l'abacus avec valeur de position des chiffres pour le faire venir de l'Inde par les Arabes 28). C'est ainsi que, par une erreur contraire, on a été tenté d'attribuer aux Grecs et aux Romains, avec l'abacus et les neuf chiffres, l'usage indien du zéro, qui est venu rendre l'abacus inutile 29).

Ces deux erreurs pourraient chercher un appui ou un pretexte dans une difficulté que j'ai essayé de résoudre 30). Si le système gréco-romain de l'abacus avec neuf chiffres seulement et le système indo-arabe des neuf chiffres et du zéro sans abacus, n'ont pas la même origine, comment se fait-il qu'entre les neuf chiffres indiens et les neuf chiffres gréco-romains il y ait des ressemblances trop grandes pour être dues au hasard? Ces chiffres seraient-ils donc une invention grecque transmise à l'Inde, ou bien une invention indienne transmise à la Grèce? Non, puisque, dès une époque où les Grecs n'avaient certainement pas ces neuf chiffres, et où les Indiens n'étaient pas même encore arrivés sur le sol de l'Inde, cinq de ces chiffres, parfaitement reconnaissables, ceux des nombres 1, 2, 3, 4 et 9, existaient dans la notation égyptienne des jours de mois, qui n'avait que cinq chiffres pour les nombres audessous de 10. Nous savons que ces cinq chiffres ont été empruntés à l'Egypte par des néopythagoriciens d'Alexandrie, qui leur ont adjoint quatre autres chiffres pour le nombres 5, 6, 7 et 8, et qu'ils ont été introduits chez les Romains par un néopythagoricien grec écrivant en latin, et après lui par Boèce. Mais comment ces cinq chiffres egyptiens ont-ils passé dans l'Inde? Ce n'est pas par l'intermédiaire des Grecs, puisque les quatre autres chiffres des néopythagoriciens pour les nombres 5, 6, 7 et 8 diffèrent etièrement des chiffres indiens correspondants, à quelque époque qu'on les prenne. Il faut donc, ou que les Indiens aient emprunté directement les cinq chiffres à l'Egypte, ou que les Egyptiens et les Indiens les aient tirés d'une même source. De ces deux hypothèses, je ne dis pas que la première soit absolument impossible; car, dès l'époque des Ptolémées, mais surtout depuis l'époque d'Auguste 31), beaucoup de bâtiments de commerce allaient de l'Egypte dans l'Inde; l'île de Socotora était peuplée d'Egyptiens, de Grecs et d'Indiens 32), et au V[e] siècle non-seulement des commerçants indiens, mais des bracmanes, venaient en Egypte 33). Mais la seconde hypothèse me paraît plus vraisemblable. Car ces cinq chiffres peuvent avoir appartenu aux populations couchites répandues autrefois depuis l'Egypte et l'Ethiopie jusqu'aux bouches du Gange; ils ont pu être adoptés par les Egyptiens dès la plus haute antiquité; ils ont pu se conserver dans l'Inde chez les populations couchites, auxquelles les Indiens Aryas les auraient empruntés 34). Quoi qu'il en soit, il faut choisir entre ces deux hypothèses, et celle qui fait venir de l'Inde les neuf chiffres pythagoriques doit être rejetée.

Les Arabes musulmans acceptèrent d'abord les notations numérales alphabétiques des peuples conquis. Puis ils employèrent de même les lettres de leurs divers alphabets arabes, toujours sans valeur de position, et ce mode de notation est resté chez eux dominant, à côté de la métode bien plus incommode, qu'ils ont conservée aussi, de faire entrer dans les calculs les noms de nombre eux-mêmes écrits en toutes lettres. Cependant, vers le commencement du IX[e] siècle, les Arabes orientaux s'étaient approprié le système indien avec les neuf chiffres, le zéro et la valeur de position. De leur côté, les Arabes occidentaux connurent de bonne heure sans doute l'abacus pythagorique propagé en Occident par Boèce. Plus tard vers le X[e] siècle, le système indien leur fut transmis par les Arabes orientaux; mais, en l'acceptant, ils gardèrent les neuf chiffres pythagoriques, dont quatre différaient des chiffres indiens correspondants,

---

28) Voyez la discussion obstinée de M. Libri contre M. Chasles, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 7 et 14 octobre 1839. — 29) Voyez Niebuhr et Playfair, cités ci-dessus, chapitre VIII. — 30) Voyez ci-dessus, chapitres XVI et XVII. — 31) Voyez Strabon, II, 5, § 9 et 12, et XV, 1, § 4, p. 116, 118 et 686 (éd. Casaubon); le *Périple de la mer Erythrée*, p. 174) (éd. Blancanus); Pline, VI, 26, t. 1, p. 440 (éd. Sillig.), et Ammien Marcellin, XXII, 7. — 32) Voyez le *Périple de la mer Erythrée*, p. 159. éd. Blancanus), et Cosmas, *Topographie chrétienne*, p. 178 (éd. Montfaucon). — 33) Voyez Damascius, vie d'Isidore, dans Photius, *Biblioth.* cod. 242, p. 340 (éd. Bekker). — 34) Voyez ci-dessus, chapitre XVII.

et qui avaient aussi pénetré un peu chez les Arabes orientaux. Légèrement modifiés par les Arabes, ces neuf chiffres pythagoriques, dont cinq seulement ressemblaient beaucoup aux chiffres indiens, prirent le nom de chiffres *gobâr,* et les Arabes les employèrent comme ils employaient les chiffres indiens, c'est-à-dire tantôt avec le zéro mis dans les places vides, à la manière indienne, qui est aussi la nôtre, tantôt en marquant l'ordre décimal de chaque chiffre par des zéros ou des points placés audessus 35).

Jusqu'à la fin du XI[e] siècle, les peuples chrétiens de l'Occident avaient conservé l'usage de l'abacus de Boèce 36). Mais, à partir du commencement du XII[e] siècle, ils l'abandonnèrent peu à peu, pour adopter le système indien transmis par les Arabes 37). Cependant, en leur empruntant le zéro sous sa forme la plus ancienne, ils gardèrent les neuf chiffres pythagoriques, qui, un peu modifiés sous l'influence de l'imitation des chiffres *gobâr* occidentaux, devinrent nos chiffres modernes, chiffres égypto-alexandrins par leur origine et liés primitivement au système gréco-romain de l'abacus, mais joints plus tard au zéro indien, et adaptés ainsi au système indo-arabe, qui est la méthode de notation numérale la plus parfaite.

---

35) Voyez ci-dessus, chapitres XVII et XVIII. — 36) Voyez ci-dessus, chapitres XIX-XXIII. — 37) Voyez ci-dessus, chapitres XXIII et XXIV.



PUBBLICAZIONI RECENTI.

G. Novi — Trattato di Algebra superiore. Parte I: Analisi Algebrica. — *Firenze*, 1863.

Paiwin — Propriétés des points d'inflexion des courbes du 3e ordre et des points de rebroussement des courbes de la 3e classe *(Extrait des Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille)*.

G. Salmon — A treatise on conic sections etc. Fourth edition. — *London*, 1863.

Poudra — Œuvres des Desargues — Deux tomes. *Paris*, 1864.

Junghann — Tetraedrometrie. 2 Th. *Gotha* 1862-63.

R. Townsend — Chapters on the modern Geometry of the point, line and circle etc. Vol. I. — *Dublin*, 1863.

Marsano — Considerazioni sul triangolo rettilineo. — *Genova*, 1863.

H. Weissenborn — Die Element der Planimetrie. — *Halle*, 1864.

Picart — Essai d'une théorie géométrique des surfaces. — *Paris*, 1863.

Lucas — Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes. — *Paris*, 1864.

Briot — Essais sur la théorie Mathématique de la lumière. — *Paris*, 1864.

J. De la Gournerie — Mémoire sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace. — *Paris*, 1863.

Lejeune-Dirichlet — Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind — *Braunschweig*, 1863.

G. Salmon — Analytische Geometrie des Raumes, deutsch bearbeitet von W. Fiedler. I Theil. Die Element und die Theorie der Flächen zweiten grades. — *Leipzig*, 1863,

E. Catalan — Mémoire en réponse à la question suivante: Trouver les lignes de courbure du lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante. — *Bruxelles*, 1864.

J. Bertrand — Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral. — Calcul différentiel. — *Paris*, 1864.

L. Cremona — Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba. *Bologna*, 1863.

C. Taylor — Geometrical conics, including anharmonic ratio and projection. — *London*, 1863.

Plana Jean. Mémoire sur le mouvement du centre de gravité d'un corps solide lancé vers la terre entre les centres de la lune, et de la terre supposés finis immédiatement après l'impulsion. (Dalle Memorie dell'Accademia di Torino tom. XX. Serie seconda 1863).

— Réflexions sur la préface d'un Mémoire du Lagrange intitulé Solution d'un problème d'arithmétique publié dans le Tom. IV des Miscellanea Taurinensis. (Dalle Memorie etc.).

— Mémoire sur la théorie des nombres. (Dalle Memorie etc.).

— Réflexions sur les objections soulevées par Arag contre la priorité de Galilé pour la double decouverte des taches solaires noires, et de la rotation uniforme du globo du soleil. (Dalle Memorie etc.

— Mémoire sur la théorie des trascendantes elliptiques. (Dalle Memorie etc.).

— Note sur l'origine de la fraction W définie au commencement du premier § du *Mémoire* sur la théorie des trascendantes élliptiques. (Dalle Memorie etc.).

INDICE GENERALE

DI TUTTI GLI ARTICOLI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA.

AVVERTENZA PER IL REGISTRO.

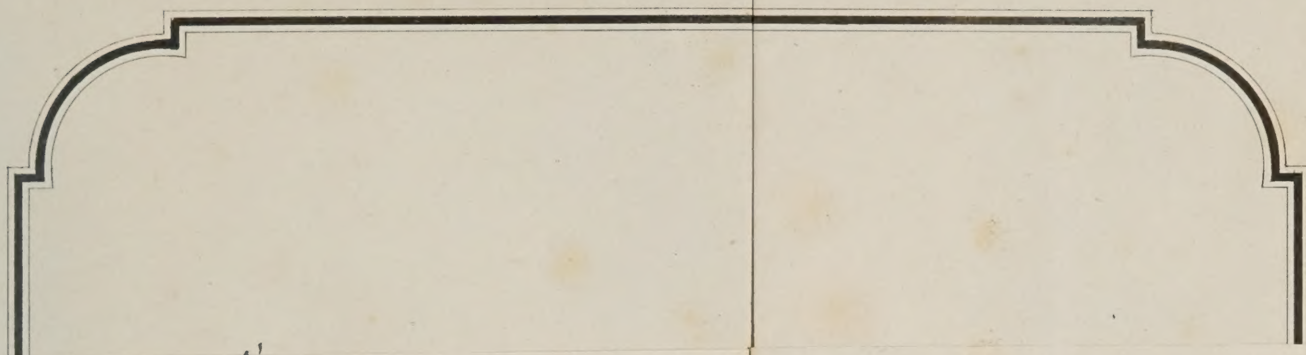
Il Foglio 7: oltre le otto pagine contiene un Cartesino di altre quattro pagine, per cui termina con la pagina 60: il foglio 8: che avrebbe dovuto cominciare con la pagina 61: per errore comincia con la pagina 57, e si prosegue in questo modo la paginazione fino al termine del volume.

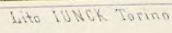
L'ultimo foglio, ossia 49, è composto di dodici pagine.

Il primo fasc. contiene una Tavola di Geometria per la Nota del prof. Bruno che deve esser posta alla fine del Volume.

IMPRIMATUR
Fr. Hieronymus Gigli O. P. S. P. A. Magister.

IMPRIMATUR
Petrus Villanova-Castellacci Archiep. Petr. Vicesgerens.




Lit° FUNCK Torino

